ΘΕΩΡΙΑ ΤΕΛΕΣΤΩΝ (Θ.13)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ IV

Αν H, K είναι χώροι Hilbert και $y \in K$, γράφουμε $y^* : K \mapsto \mathbb{C} : z \mapsto \langle z, y\rangle$ και για κάθε $x \in H$ θεωρούμε τον τελεστή

$$xy^* : K \mapsto \mathbb{C} \mapsto H : z \mapsto \langle z, y\rangle \mapsto \langle z, y\rangle x\,.$$

Ο xy^* είναι φραγμένος τελεστής πρώτης τάξης (αν-ν $x \neq 0, y \neq 0$).

Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ είναι τελεστής πεπερασμένης τάξης, ορίζουμε το *ίχνος (trace)* του T:

$$\mathrm{tr}(T) := \sum_n \langle Te_n, e_n\rangle$$

όπου $\{e_n\}$ ορθοκανονική βάση του H (ή του $(\ker T)^\perp$).

Άσκηση 1. *Δείξτε ότι το* $\mathrm{tr}(T)$ *δεν εξαρτάται από την ορθοκανονική βάση και ότι* $\mathrm{tr}(TS) = \mathrm{tr}(ST)$ *αν* $S, T \in \mathcal{B}(H)$ *και ένας (τουλάχιστον) από τους δύο έχει πεπερασμένη τάξη.*

Άσκηση 2. *Αν* $x, y \in H$*, δείξτε ότι*

$$\omega_{x,y}(A) = \mathrm{tr}(Axy^*), \quad A \in \mathcal{B}(H)\,.$$

Δείξτε ότι για κάθε $\omega \in \mathcal{B}_\sim(H)$ *υπάρχει μοναδικός* $T_\omega \in \mathcal{B}(H)$ *πεπερασμένης τάξης ώστε*

$$\omega(A) = \mathrm{tr}(AT_\omega), \quad A \in \mathcal{B}(H)$$

και ότι η απεικόνιση $\omega \mapsto T_\omega$ *είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων από τον* $\mathcal{B}_\sim(H)$ *στον χώρο των φραγμένων τελεστών πεπερασμένης τάξης* $H \mapsto H$.

Ο τελεστής $|T_\omega| = (T_\omega^* T_\omega)^{1/2}$ είναι θετικός τελεστής πεπερασμένης τάξης. Επομένως (φασματικό θεώρημα σε χώρους πεπερασμένης διάστασης) διαγωνοποιείται: Αν $\{x_n\}$ είναι τα ιδιοδιανύσματα και $\{\lambda_n\}$ οι ιδιοτιμές του,

$$|T_\omega| = \sum_n \lambda_n x_n x_n^*\,.$$

Ο χώρος $\mathcal{B}_\sim(H)$ αποτελείται από συνεχείς γραμμικές μορφές $\omega : \mathcal{B}(H) \to \mathbb{C}$. Επομένως εφοδιάζεται με τη νόρμα του δυικού χώρου του $\mathcal{B}(H)$: $\|\omega\| = \sup\{|\omega(A)| : A \in \mathrm{ball}\mathcal{B}(H)\}$.

Άσκηση 3. *Δείξτε ότι για κάθε* $\omega \in \mathcal{B}_\sim(H)$ *έχουμε*

$$\|\omega\| = \inf\left\{\sum_k \|x_k\|\,\|y_k\| : \omega = \sum_k \omega_{x_k,y_k}\right\} = \sum_n \lambda_n$$

όπου $\{\lambda_n\}$ *οι ιδιοτιμές του τελεστή* $|T_\omega|$*. (Το* $\inf$ *λαμβάνεται ως προς όλες τις αναπαραστάσεις του* ω *ως γραμμικού συνδυασμού των* $\omega_{x,y}$*).*

Άσκηση 4. *Δείξτε ότι αν* $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(H)$ *είναι άλγεβρα von Neumann και* $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}(H)$ *είναι η ομάδα όλων των unitary τελεστών της* $\mathcal{M}'$*, τότε*

$$\mathcal{M} = \{T \in \mathcal{B}(H) : UTU^{-1} = T\ \forall U \in \mathcal{U}\}.$$

Δηλαδή μια άλγεβρα von Neumann αποτελείται από όλους τους τελεστές που σταθεροποιούνται από μια ομάδα ισομετριών του χώρου H.

Άσκηση 5. *Δείξτε ότι κάθε απειροδιάστατη άλγεβρα von Neumann περιέχει μιά άπειρη ακολουθία κάθετων ανά δύο προβολών, και άρα ένα ισομετρικό αντίγραφο του* ℓ^∞*,. Συνεπώς δεν είναι διαχωρίσιμη*[1] *στην τοπολογία της νόρμας. Επομένως δεν μπορεί να είναι η norm-κλειστή γραμμική θήκη ενός* αριθμήσιμου *συνόλου προβολών (μολονότι είναι η norm-κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου των προβολών της).*

[1] Καμμιά φορά στη βιβλιογραφία αναφέρεται ο όρος 'separable von Neumann algebra $\mathcal{M}$'. Εννοείται ότι η $\mathcal{M}$ δρα σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert (πιό σωστός όρος είναι 'separably acting').