ΘΕΩΡΙΑ ΤΕΛΕΣΤΩΝ (Θ.13)

ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ IV

Άσκηση 2. *Αν* $x, y \in H$*, δείξτε ότι*

$$\omega_{x,y}(A) = \mathrm{tr}(Axy^*), \quad A \in \mathcal{B}(H)\,.$$

Δείξτε ότι για κάθε $\omega \in \mathcal{B}_\sim(H)$ *υπάρχει μοναδικός* $T_\omega \in \mathcal{B}(H)$ *πεπερασμένης τάξης ώστε*

$$\omega(A) = \mathrm{tr}(AT_\omega), \quad A \in \mathcal{B}(H)$$

και ότι η απεικόνιση $\omega \mapsto T_\omega$ *είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων από τον* $\mathcal{B}_\sim(H)$ *στον χώρο των φραγμένων τελεστών πεπερασμένης τάξης* $H \mapsto H$*.*

Η ισότητα $\omega_{x,y}(A) = \mathrm{tr}(Axy^*)$ είναι εύκολη: Αν $\{e_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του H, [1]

$$\mathrm{tr}(Axy^*) = \sum_n \langle Axy^* e_n, e_n\rangle = \sum_n \langle \langle e_n, y\rangle Ax, e_n\rangle = \sum_n \langle Ax, \overline{\langle e_n, y\rangle} e_n\rangle = \langle Ax, \sum_n \langle y, e_n\rangle e_n\rangle = \langle Ax, y\rangle.$$

Έχουμε δείξει ότι κάθε $\omega \in \mathcal{B}_\sim(H)$ γράφεται ως άθροισμα $\omega = \sum_{k=1}^n \omega_{x_k,y_k}$, οπότε για κάθε $A \in \mathcal{B}(H)$ έχουμε

$$\omega(A) = \sum_{k=1}^n \omega_{x_k,y_k}(A) = \sum_k \mathrm{tr}(Ax_k y_k^*) = \mathrm{tr}(A\sum_k x_k y_k^*)$$

οπότε θέτοντας $T_\omega := \sum_k x_k y_k^*$ έχουμε $\omega(A) = \mathrm{tr}(AT_\omega)$ για κάθε $A \in \mathcal{B}(H)$.

Μοναδικότητα Αν επίσης $\omega(A) = \mathrm{tr}(AS)$ για κάθε $A \in \mathcal{B}(H)$, τότε θέτοντας $A = uv^*$ για τυχόντα $u, v \in H$ έχουμε (θυμόμαστε ότι $\mathrm{tr}(AS) = \mathrm{tr}(SA)$)

$$\langle Su, v\rangle = \mathrm{tr}(Suv^*) = \mathrm{tr}(uv^*S) = \mathrm{tr}(uv^*T_\omega) = \mathrm{tr}(T_\omega uv^*) = \langle T_\omega u, v\rangle$$

κι αφού η ισότητα ισχύει για κάθε $u, v \in H$ έχουμε $S = T_\omega$.

Για τον ισομορφισμό των χώρων $\mathcal{B}_\sim(H)$ και $\mathcal{F}(H)$ (=φραγμένοι τελεστές πεπερασμένης τάξης):

Έχουμε μια καλά ορισμένη απεικόνιση

$$\phi : \mathcal{B}_\sim(H) \to \mathcal{F}(H) : \omega \to T_\omega.$$

Αντίστροφα, αν $T \in \mathcal{F}(H)$ ορίζουμε

$$\omega_T : \mathcal{B}(H) \to \mathbb{C} : \omega_T(A) = \mathrm{tr}(AT) \quad (A \in \mathcal{B}(H)).$$

(Το $\mathrm{tr}(AT)$ είναι καλά ορισμένο γιατί ο AT έχει πεπερασμένη τάξη). Είναι προφανές ότι η ω_T είναι γραμμική (από τη γραμμικότητα του tr). Για να δείξουμε ότι $\omega_T \in \mathcal{B}_\sim(H)$, θεωρούμε μια ορθοκανονική βάση $\{e_n = 1, \ldots, K\}$ του χώρου $(\ker T)^\perp$ και την επεκτείνουμε σε ορθοκανονική βάση του H οπότε (αφού $ATe_n = 0$ για κάθε $A \in \mathcal{B}(H)$ όταν $n > K$) έχουμε

$$\omega_T(A) = \mathrm{tr}(AT) = \sum_{n=1}^\infty \langle ATe_n, e_n\rangle = \sum_{n=1}^N \langle ATe_n, e_n\rangle = \sum_{n=1}^N \langle Af_n, e_n\rangle = \sum_{n=1}^N \omega_{f_n,e_n}(A)$$

(όπου $f_n = Te_n$), δηλαδή $\omega_T = \sum_{n=1}^N \omega_{f_n,e_n}$. Δείξαμε λοιπόν ότι $\omega_T \in \mathcal{B}_\sim(H)$, οπότε έχουμε μια καλά ορισμένη απεικόνιση

$$\psi : \mathcal{F}(H) \to \mathcal{B}_\sim(H) : T \to \omega_T.$$

[1] Αν μάλιστα δεχτούμε ότι αρκεί να χρησιμοποιήσουμε μια ο.κ. βάση του χώρου $\ker(Axy^*)^\perp$, είναι ακόμα πιο εύκολη, καθώς ο χώρος αυτός είναι ο $\mathrm{span}\{y\}$ (γιατί;) οπότε αρκεί να πάρουμε την $\{e\}$ όπου $e = \frac{y}{\|y\|}$ και προκύπτει αμέσως το ζητούμενο...

Μάλιστα δείξαμε ότι αν $\omega = \omega_T = \sum_{n=1}^N \omega_{f_n,e_n}$ τότε $T = T_\omega = \sum_n f_n e_n^*$. Και αντίστροφα αν $T = T_\omega$ τότε $\omega_T(A) = \mathrm{tr}(AT) = \mathrm{tr}(AT_\omega) = \omega_{T_\omega}(A)$ για κάθε A, δηλαδή $\omega_T = \omega_{T_\omega}$. Συνεπώς οι ϕ και ψ είναι αντίστροφες η μια της άλλης.

Είναι τέλος πολύ εύκολο να ελέγξει κανείς ότι η $\psi : \mathcal{F}(H) \to \mathcal{B}_\sim(H)$ είναι γραμμική απεικόνιση: αν $S, T \in \mathcal{F}(H)$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ τότε για κάθε $A \in \mathcal{B}(H)$ έχουμε

$$\omega_{T+\lambda S}(A) = \mathrm{tr}(A(T+\lambda S)) = \mathrm{tr}(AT) + \lambda \mathrm{tr}(AS) = \omega_T(A) + \lambda \omega_S(A)$$

δηλαδή $\psi(T+\lambda S) = \psi(T) + \lambda\psi(S)$. □

Άσκηση 3. *Ο χώρος $\mathcal{B}_\sim(H)$ αποτελείται από συνεχείς γραμμικές μορφές $\omega : \mathcal{B}(H) \to \mathbb{C}$. Επομένως εφοδιάζεται με τη νόρμα του δυικού χώρου του $\mathcal{B}(H)$: $\|\omega\| = \sup\{|\omega(A)| : A \in \mathrm{ball}\mathcal{B}(H)\}$.*

Δείξτε ότι για κάθε $\omega \in \mathcal{B}_\sim(H)$ έχουμε

$$\|\omega\| = \inf\left\{\sum_k \|x_k\|\,\|y_k\| : \omega = \sum_k \omega_{x_k,y_k}\right\} = \sum_n \lambda_n$$

όπου $\{\lambda_n\}$ οι ιδιοτιμές του τελεστή $|T_\omega|$. (Το $\inf$ λαμβάνεται ως προς όλες τις αναπαραστάσεις του ω ως γραμμικού συνδυασμού των $\omega_{x,y}$).

Για κάθε αναπαράσταση $\omega = \sum_k \omega_{x_k,y_k}$ έχουμε από την τριγωνική ανισότητα
$\|\omega\| \leqslant \sum_k \|\omega_{x_k,y_k}\| \leqslant \sum_k \|x_k\|\,\|y_k\|$ (γιατί $|\omega_{x_k,y_k}(A)| = |\langle Ax, y\rangle| \leqslant \|A\|\|x\|\|y\|$) και άρα
$\|\omega\| \leqslant \inf\left\{\sum_k \|x_k\|\,\|y_k\| : \omega = \sum_k \omega_{x_k,y_k}\right\}$.

Για την αντίστροφη ανισότητα, θεωρούμε τον τελεστή πεπερασμένης τάξης T_ω για τον οποίο ισχύει $\omega(A) = \mathrm{Tr}(AT_\omega)$ και τη πολική αναπαράσταση $T_\omega = V|T_\omega|$. Από το φασματικό θεώρημα σε χώρους πεπερασμένης διάστασης, ο θετικός τελεστής $|T_\omega|$ διαγωνοποιείται: Αν $\{e_n\}$ είναι τα (ορθοκανονικά) ιδιοδιανύσματα και $\{\lambda_n\}$ οι ιδιοτιμές του,

$$|T_\omega| = \sum_{n=1}^N \lambda_n e_n e_n^*\,.$$

Επεκτείνοντας την $\{e_n\}$ σε ορθοκανονική βάση του H, έχουμε

$$\omega(A) = \mathrm{Tr}(AT_\omega) = \mathrm{Tr}(AV|T_\omega|) = \sum_{n=1}^N \langle AV|T_\omega|e_n, e_n\rangle = \sum_{n=1}^N \langle AV\lambda_n e_n, e_n\rangle = \sum_{n=1}^N \langle Af_n, e_n\rangle = \sum_{n=1}^N \omega_{f_n e_n}(A)$$

όπου $f_n = V\lambda_n e_n$, οπότε $\|f_n\| = \lambda_n$ γιατί $\|e_n\| = 1$ και η V είναι μερική ισομετρία. Επομένως

$$\|\omega\| \leqslant \inf\left\{\sum_k \|x_k\|\,\|y_k\| : \omega = \sum_k \omega_{x_k,y_k}\right\} \leqslant \sum_n \|f_n\|\,\|e_n\| = \sum_n \lambda_n\,.$$

Όμως,

$$\omega(V^*) = \sum_{n=1}^N \omega_{f_n e_n}(V^*) = \sum_n \langle V^* f_n, e_n\rangle = \sum_n \langle f_n, Ve_n\rangle = \sum_n \langle V\lambda_n e_n, Ve_n\rangle = \sum_n \lambda_n \langle Ve_n, Ve_n\rangle = \sum_n \lambda_n$$

γιατί $\|Ve_n\|^2 = 1$. Συνεπώς

$$\|\omega\| \leqslant \inf\left\{\sum_k \|x_k\|\,\|y_k\| : \omega = \sum_k \omega_{x_k,y_k}\right\} \leqslant \sum_n \lambda_n = |\omega(V^*)| \leqslant \|\omega\|\ .$$

οπότε έχουμε τις ζητούμενες ισότητες. □