ΘΕΩΡΙΑ ΤΕΛΕΣΤΩΝ (Θ.13)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ V

Άσκηση 1. *Δείξτε ότι* $E \odot \mathbb{K} \simeq E$ *μέσω της απεικόνισης* $x \otimes \lambda \mapsto \lambda x$ *και ότι, για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, $E \odot \mathbb{K}^n \simeq E^n$ *μέσω της απεικόνισης* $x \otimes e_i \mapsto (0 \ldots, 0, x, 0 \ldots, 0)$ *(i θέση) για* $i = 1, \ldots, n$.

Άσκηση 2. *Δείξτε ότι* $H_1^* \odot H_2 \simeq \mathcal{B}_\sim(H_2, H_1)$ *μέσω της απεικόνισης* $\sum_i x_i^* \otimes y_i \mapsto \sum_i \omega_{y_i, x_i}$.

Ορισμός 1. *Έστω* H_1, H_2 *χώροι Hilbert. Στον* $H_1 \odot H_2$ *θέτω*

$$\langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \rangle_{hs} = \langle x_1, x_2 \rangle_{H_1} \cdot \langle y_1, y_2 \rangle_{H_2}.$$

Δηλαδή αν $u = \sum_i x_i \otimes y_i$ *και* $v = \sum_i x_i' \otimes y_i'$ *τότε*

$$\langle u, v \rangle_{hs} = \sum_{i,j} \langle x_i, x_j' \rangle_{H_1} \cdot \langle y_i, y_j' \rangle_{H_2}.$$

Ονομάζουμε $H_1 \otimes H_2$ *την πλήρωση του χώρου* $(H_1 \odot H_2, \|\cdot\|_{hs})$ *όπου* $\|u\|_{hs} := \sqrt{\langle u, u \rangle_{hs}}$.

Άσκηση 3. *Δείξτε ότι το* $\langle \cdot, \cdot \rangle_{hs}$ *είναι καλά ορισμένο εσωτερικό γινόμενο στον* $H_1 \odot H_2$.

Άσκηση 4. *Αν* $\{e_i\}_I$ *είναι ορθοκανονική βάση του* H_1 *και* $\{f_j\}_J$ *είναι ορθοκανονική βάση του* H_2, *δείξτε ότι ο* $H_1 \otimes H_2$ *έχει ορθοκανονική βάση* $\{e_i \otimes f_j\}_{I \times J}$.

Άσκηση 5. *Αν* $: H_1 \to K_1$ *και* $B : H_2 \to K_2$ *είναι φραγμένοι τελεστές μεταξύ χώρων Hilbert, δείξτε ότι ορίζεται μοναδικός φραγμένος τελεστής* $C : H_1 \otimes H_2 \to K_1 \otimes K_2$ *που ικανοποιεί* $C(\xi \otimes \eta) = A\xi \otimes B\eta$ *για κάθε* $\xi \in H_1, \eta \in H_2$. *Ο τελεστής* C *ονομάζεται* $A \otimes B$.