Συναρτήσεις Borel αυτοσυζυγούς τελεστή

Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ αυτοσυζυγής τελεστής, $D_A := \{t \in R : |t| \leqslant \|A\|\}$. Για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση $g : D_A \to \mathbb{C}$ θα ορίσουμε έναν φυσιολογικό τελεστή $g(A) \in \mathcal{B}(H)$. Η απεικόνιση $g \to g(A)$ θα διατηρεί άθροισμα, γινόμενο και ενέλιξη, θα επεκτείνει τον συναρτησιακό λογισμό για συνεχείς συναρτήσεις, και θα ικανοποιεί

$$\|g(A)\| \leqslant \sup\{|g(t)| : t \in D_A\}\,.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε δύο βασικά θεωρήματα:

Θεώρημα 1 (Συναρτησιακός λογισμός (functional calculus))**.**
*Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ αυτοσυζυγής τελεστής. Υπάρχει μοναδικός ισομετρικός αλγεβρικός *-μορφισμός*

$$\Phi_c : (C(\sigma(A)), \|\cdot\|_{\sigma(A)}) \to (\mathcal{B}(H), \|\cdot\|) : f \to f(A)$$

που απεικονίζει τη σταθερή συνάρτηση $f_0(t) = 1$ στον ταυτοτικό τελεστή $I \in \mathcal{B}(H)$ και την ταυτοτική συνάρτηση $f_1(t) = t$ στο $A \in \mathcal{B}(H)$.

Επίσης, ισχύει η ισότητα $\Phi_c(p) = p(A)$ για κάθε πολυώνυμο.

Θεώρημα 2 (Φασματικό Θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές)**.** *Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ αυτοσυζυγής τελεστής. Υπάρχει χώρος μέτρου (X, μ), συνάρτηση $h \in L^\infty(X, \mu)$ και ορθομοναδιαίος τελεστής $U : L^2(X, \mu) \to H$ ώστε $A = UM_hU^{-1}$.*

Επίσης, η συνάρτηση h παίρνει τιμές (μ-σχεδόν πάντα) στο $\sigma(A)$.

Παρατήρηση 3. *Για κάθε $f \in C(D_A)$, ισχύει η σχέση*

$$f(A) = UM_{f\circ h}U^{-1}\,.$$

Απόδειξη. Από τη σχέση $A = UM_hU^{-1}$ έχουμε $A^2 = UM_hU^{-1}UM_hU^{-1} = UM_{h^2}U^{-1}$ και επαγωγικά $A^n = UM_{h^n}U^{-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως, αν $p(z) = \sum\limits_{n=0}^{N} c_n z^n$ τότε

$$p(A) = \sum_{n=0}^{N} c_n UM_{h^n}U^{-1}$$

$$\text{δηλαδή} \quad \Phi_c(p) = UM_{p\circ h}U^{-1}$$

αφού $(p \circ h)(t) = \sum\limits_{n=0}^{N} c_n h(t)^n$ για κάθε $t \in X$.

Αν $f \in C(D_A)$, από το Θεώρημα Stone-Weierstrass υπάρχει ακολουθία (p_n) πολυωνύμων ώστε $\lim_n p_n(z) = f(z)$ ομοιόμορφα ως προς $z \in D_A$, δηλαδή $\|f - p_n\|_{D_A} \to 0$. Αλλά η συνάρτηση h παίρνει τιμές (μ-σχεδόν πάντα) στο D_A. Έπεται ότι $\|f\circ h - p_n\circ h\|_\infty \to 0$, άρα $\|M_{f\circ h} - M_{p_n\circ h}\| \to 0$. Από την άλλη μεριά, αφού ο συναρτησιακός λογισμός Φ_c είναι ισομετρία, έχουμε $\|\Phi_c(f) - \Phi_c(p_n)\| \to 0$. Κατά συνέπεια

$$f(A) := \Phi_c(f) = \lim_n \Phi_c(p_n) = \lim_n UM_{p_n\circ h}U^{-1} = UM_{f\circ h}U^{-1} \quad f \in C(\sigma(A))\,.$$

□

Συμβολισμός: *Ονομάζουμε $\mathcal{L}^\infty(D_A)$ το σύνολο όλων των* συναρτήσεων $g : D_A \to \mathbb{C}$ *που είναι φραγμένες και Borel μετρήσιμες.*

Η $\mathcal{L}^\infty(D_A)$, εφοδιασμένη με πράξεις και ενέλιξη κατά σημείο και τη νόρμα supremum, είναι μεταθετική C*-άλγεβρα με μονάδα.

Αν $g \in \mathcal{L}^\infty(D_A)$, εφόσον η συνάρτηση h παίρνει τιμές (μ-σχεδόν πάντα) στο D_A, η συνάρτηση

$$g \circ h : (X, \mu) \to D_A \to \mathbb{C}$$

είναι μετρήσιμη και ουσιωδώς φραγμένη, μάλιστα

$$\|g \circ h\|_\infty = \text{esssup}|g \circ h| \leqslant \sup\{|g(z)| : z \in D_A\} = \|g\|_\infty \ .$$

Επομένως ορίζεται ο φραγμένος τελεστής $M_{g\circ h} : L^2(X, \mu) \to L^2(X, \mu) : \xi \to (g \circ h).\xi$ και $\|M_{g\circ h}\| = \|g \circ h\|_\infty \leqslant \|g\|_\infty$.

Ορισμός 1. *Για κάθε $g \in \mathcal{L}^\infty(D_A)$ ορίζουμε τον τελεστή*

$$g(A) := UM_{g\circ h}U^{-1} \in \mathcal{B}(H).$$

Ο συναρτησιακός λογισμός για συναρτήσεις Borel (the Borel functional calculus) *είναι η απεικόνιση*

$$\Phi_b : g \to g(A) := UM_{g\circ h}U^{-1} : \mathcal{L}^\infty(D_A) \to \mathcal{B}(H).$$

Θεώρημα 4. *Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ αυτοσυζυγής τελεστής, $D_A := \{z \in \mathbb{R} : |z| \leqslant \|A\|\}$. Η απεικόνιση $\Phi_b : g \to g(A)$ είναι μορφισμός *-αλγεβρών (δηλ. διατηρεί άθροισμα, γινόμενο και ενέλιξη), που επεκτείνει τον συναρτησιακό λογισμό Φ_c για συνεχείς συναρτήσεις, και ικανοποιεί*

$$\|g(A)\| \leqslant \sup\{|g(z)| : z \in D_A\} \, .$$

Απόδειξη. Έχουμε $\|g(A)\| = \left\|UM_{g\circ h}U^{-1}\right\| = \|M_{g\circ h}\| \leqslant \|g\|_\infty$. Επειδή οι απεικονίσεις $g \to g \circ h$, $f \to M_f$ και $T \to UTU^{-1} = UTU^*$ διατηρούν το άθροισμα, το γινόμενο και την ενέλιξη, έπεται ότι η $\Phi_b : \mathcal{L}^\infty(D_A) \to \mathcal{B}(H)$ είναι μορφισμός *-αλγεβρών. Από την Παρατήρηση 3, η Φ_b επεκτείνει την Φ_c. $\square$

Πρόταση 5. *Έστω $g_n, g \in \mathcal{L}^\infty(D_A)$. Αν $\lim_n g_n = g$ κατά σημείο στο D_A και $\sup_n \|g_n\|_\infty < \infty$, τότε η ακολουθία τελεστών $(g_n(A))$ ικανοποιεί*

$$\lim_n \langle g_n(A)x, y\rangle = \langle g(A)x, y\rangle \ \text{ για κάθε } x, y \in H \, .$$

(Λέμε ότι $g_n(A) \to g(A)$ ως προς την WOT (Weak Operator Topology - ορισμός αργότερα).)

Απόδειξη. Έχουμε $g(A) = UM_{g\circ h}U^*$ όπου $U : L^2(X, \mu) \to H$ unitary. Σταθεροποιούμε $x, y \in H$ και θέτουμε $\xi = U^*x, \eta = U^*y \in L^2(X, \mu)$, οπότε

$$\begin{aligned} \langle g(A)x, y\rangle &= \langle UM_{g\circ h}U^*x, y\rangle = \langle M_{g\circ h}U^*x, U^*y\rangle = \langle M_{g\circ h}\xi, \eta\rangle = \langle (g \circ h)\xi, \eta\rangle \\ &= \int_X (g \circ h)\xi\bar{\eta}d\mu \end{aligned}$$

$$\text{άρα} \quad \langle g_n(A)x, y\rangle - \langle g(A)x, y\rangle = \int_X ((g_n \circ h) - (g \circ h))\xi\bar{\eta}d\mu \, .$$

Η συναρτήσεις $f_n := ((g_n \circ h) - (g \circ h))\xi\bar{\eta}$ είναι μετρήσιμες και $|f_n| = |(g_n \circ h) - (g \circ h)|.|\xi\bar{\eta}| \leqslant 2C|\xi\bar{\eta}|$ (όπου $C = \sup_n \|g_n\|_\infty$). Αλλά η συνάρτηση $2C|\xi\bar{\eta}|$ ανήκει στον $L^1(X, \mu)$ (αφού $\xi, \bar{\eta} \in L^2(X, \mu)$). Συνεπώς από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε $\lim_n \int f_n d\mu = \int \lim_n f_n d\mu = 0$, δηλαδή $\langle g_n(A)x, y\rangle - \langle g(A)x, y\rangle \to 0$, όπως θέλαμε. □

Πόρισμα 6. *Με τις υποθέσεις της προηγούμενης Πρότασης, αν ένας $T \in \mathcal{B}(H)$ ικανοποιεί $g_n(A)T = Tg_n(A)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε ο T ικανοποιεί και $g(A)T = Tg(A)$.*

Απόδειξη. Για κάθε $x, y \in H$ έχουμε $\lim_n \langle g_n(A)x, y\rangle = \langle g(A)x, y\rangle$ και συνεπώς

$$\begin{aligned}\langle Tg(A)x, y\rangle &= \langle g(A)x, (T^*y)\rangle = \lim_n \langle g_n(A)x, (T^*y)\rangle = \lim_n \langle Tg_n(A)x, y\rangle = \lim_n \langle g_n(A)(Tx), y\rangle \\ &= \langle g(A)(Tx), y\rangle .\end{aligned}$$

□

Ορισμός 2 (Φασματικές προβολές του A)**.** *Για κάθε Borel υποσύνολο $\Omega \subseteq D_A$ ονομάζουμε $E_A(\Omega) \in \mathcal{B}(H)$ τον τελεστή*

$$E_A(\Omega) := \chi_\Omega(A) .$$

Πρόταση 7. *Η οικογένεια $\{E_A(\Omega) : \Omega \subseteq D_A \text{ Borel}\} \subseteq \mathcal{B}(H)$ ικανοποιεί*

1. *$E_A(\Omega)^* = E_A(\Omega)$.*
2. *$E_A(\Omega_1)E_A(\Omega_2) = E_A(\Omega_1 \cap \Omega_2)$.*
   Επομένως κάθε $E_A(\Omega)$ είναι ορθή προβολή.
3. *$E_A(\varnothing) = 0, E_A(\sigma(A)) = I$, οπότε $E_A(\Omega) = E_A(\Omega \cap \sigma(A))$ για κάθε Ω.*
4. *Για κάθε $x \in H$, η απεικόνιση $\mu_x : \Omega \longrightarrow \langle E_A(\Omega)x, x\rangle$ είναι θετικό μέτρο Borel.*

Απόδειξη. (1) $(E_A(\Omega))^* = \Phi_b(\chi_\Omega)^* = \Phi_b(\bar{\chi}_\Omega) = \Phi_b(\chi_\Omega) = E_A(\Omega)$.

(2) $E_A(\Omega_1)E_A(\Omega_2) = \Phi_b(\chi_{\Omega_1})\Phi_b(\chi_{\Omega_2}) = \Phi_b(\chi_{\Omega_1}\chi_{\Omega_2}) = \Phi_b(\chi_{\Omega_1 \cap \Omega_2}) = E_A(\Omega_1 \cap \Omega_2)$.
Επομένως $E_A(\Omega)^2 = E_A(\Omega \cap \Omega) = E_A(\Omega)$ άρα ο τελεστής $E_A(\Omega)$ είναι ταυτοδύναμος και αυτοσυζυγής από το (1), δηλαδή ορθή προβολή.

(3) Αφού $\chi_\varnothing = 0$, έχουμε $E_A(\varnothing) = 0$. Επίσης, εφόσον η συνάρτηση h παίρνει τιμές (μ-σχεδόν πάντα) στο $\sigma(A)$, η σύνθεση $(\chi_{\sigma(A)} \circ h)(t) = 1$, μ-σχεδόν για κάθε $t \in X$. Επομένως

$$E_A(\sigma(A)) = UM_{\chi_{\sigma(A)} \circ h}U^* = UM_{\mathbf{1}}U^* = I.$$

Συνεπώς $E_A(\Omega) = E_A(\Omega)E_A(\sigma(A)) = E_A(\Omega \cap \sigma(A))$ (από το (2)) για κάθε Ω.

(4) Για κάθε $x \in H$ θέτοντας $\xi = U^*x \in L^2(X, \mu)$ έχουμε

$$\mu_x(\Omega) = \langle E(\Omega)x, x\rangle = \langle UM_{\chi_\Omega \circ h}U^*x, x\rangle = \langle M_{\chi_\Omega \circ h}\xi, \xi\rangle = \int_X (\chi_\Omega \circ h)|\xi|^2 d\mu .$$

Αν $\Omega_n, n \in \mathbb{N}$ είναι ξένα ανά δύο σύνολα Borel και $\Omega = \cup_n \Omega_n$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\chi_\Omega &= \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{\Omega_k} \\
\text{άρα } \ 0 \leqslant (\chi_\Omega \circ h)|\xi|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} (\chi_{\Omega_k} \circ h)|\xi|^2 \\
\text{άρα } \ \int_X (\chi_\Omega \circ h)|\xi|^2 d\mu &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_X (\chi_{\Omega_k} \circ h)|\xi|^2 d\mu \quad (\text{ Θ. μονότονης σύγκλισης}) \\
\text{άρα } \ \mu_x(\Omega) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu_x(\Omega_k)\,.
\end{aligned}$$

Σημείωση Αν $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ είναι σύνολο Borel, ορίζουμε $F(\Omega) := \chi_{\Omega \cap \sigma(A)}(A)$ δηλαδή $F(\Omega) = E_A(\Omega \cap \sigma(A))$. Έχουμε λοιπόν $F(\Omega) = E_A(\Omega \cap D_A)$ (αφού $E_A(\Omega \cap \sigma(A)) = E_A((\Omega \cap D_A) \cap \sigma(A)) = E_A(\Omega \cap D_A)$ από την (3). Για τον λόγο αυτό, πολλοί ορίζουν τις φασματικές προβολές για κάθε σύνολο Borel $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, και παρατηρούν ότι το $E_A(\cdot)$ φέρεται στο συμπαγές σύνολο $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Παρατήρηση 8. *Κάθε φασματικό μέτρο είναι βεβαίως πεπερασμένα προσθετικό (αφού κάθε μ_x ($x \in H$) είναι πεπερασμένα προσθετικό), δηλαδή $E(\Omega_1 \cup \Omega_2) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$ όταν τα Ω_1, Ω_2 είναι Borel και ξένα. Δεν είναι όμως (πλην τετριμμένων περιπτώσεων) σ-προσθετικό στην τοπολογία της νόρμας του $\mathcal{B}(H)$. Δηλαδή αν $\{\Omega_n\}$ είναι ακολουθία ξένων ανά δύο Borel υποσυνόλων, η σειρά $\sum_n E(\Omega_n)$ δεν συγκλίνει, γιατί τα μερικά της αθροίσματα, όταν δεν είναι ίσα, έχουν διαφορά νόρμας 1 (γιατί είναι ορθές προβολές[1]).*

Ισχύει όμως μια ασθενέστερη μορφή σ-προσθετικότητας:

Πόρισμα 9. *Αν $\Omega_n, n \in \mathbb{N}$ είναι ξένα ανά δύο σύνολα Borel, τότε για κάθε $x \in H$,*

$$\lim_n \left\| \sum_{k=1}^{n} E_A(\Omega_k)x - E_A\Big(\bigcup_n \Omega_n\Big)x \right\|_H = 0.$$

Απόδειξη. Επειδή η απεικόνιση $\Omega \to E(\Omega)$ είναι πεπερασμένα προσθετική, αν θέσουμε $V_n = \bigcup_{k \leqslant n} \Omega_k$ και $\Omega = \bigcup_k \Omega_k$ τότε

$$E(\Omega) = E(V_n) + E(\Omega \backslash V_n) = \sum_{k=1}^{n} E(\Omega_k) + E(\Omega \backslash V_n).$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\lim_n \|E(\Omega \backslash V_n)x\| = 0$ για κάθε $x \in H$. Αλλά η $E(\Omega \backslash V_n)$ είναι ορθή προβολή, άρα $\|E(\Omega \backslash V_n)x\|^2 = \langle E(\Omega \backslash V_n)x, x\rangle = \mu_x(\Omega \backslash V_n)$ που τείνει στο 0 αφού το μ_x είναι σ-προσθετικό μέτρο.

Σημείωση Ο συναρτησιακός λογισμός Φ_b ορίζεται και όταν ο τελεστής A είναι φυσιολογικός. Η κατασκευή είναι ανάλογη, και στηρίζεται στο Φασματικό Θεώρημα για φυσιολογικούς τελεστές (που δεν έχουμε αποδείξει εδώ).

[1] Πράγματι, $\sum_{k=n}^{m} E(\Omega_k) = E(\bigcup_{k=n}^{m} \Omega_k)$

Πρόταση 10. *Κάθε αυτοσυζυγής τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$ ανήκει στην $\|\cdot\|$-κλειστή γραμμική θήκη των φασματικών προβολών του. Συγκεκριμένα, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση $D_A = \bigcup_{k=1}^n \Omega_k$ του D_A σε ξένα ανά δυο διαστήματα ώστε*

$$\left\| A - \sum_{k=1}^n \lambda_k E_A(\Omega_k) \right\|_{\mathcal{B}(H)} < \epsilon$$

για κάθε επιλογή σημείων $\lambda_k \in \Omega_k, \ k = 1, \ldots, n$. Γράφουμε

$$A = \int \lambda dE_A(\lambda)\,.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε (αλλάζοντας την h σε ένα σύνολο μ-μέτρου 0, πράγμα που δεν επηρεάζει τον M_h) ότι $h(t) \in D_A$ για κάθε $t \in X$.

Επιλέγουμε $-\|A\| = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \|A\|$ ώστε $\max|x_k - x_{k-1}| < \epsilon$ και θέτουμε $\Omega_k = [x_{k-1}, x_k), \ k = 1, \ldots, n-1$ και $\Omega_n = [x_{n-1}, x_n]$. Τότε, για κάθε $t \in X$, αφού $h(t) \in D_A$, υπάρχει ακριβώς ένα Ω_m ώστε $h(t) \in \Omega_m$ και συνεπώς

$$\left| h(t) - \sum_{k=0}^n \lambda_k \chi_{\Omega_k}(h(t)) \right| = |h(t) - \lambda_m| < \epsilon$$

αφού το πλάτος της διαμέρισης είναι μικρότερο από ϵ. Δηλαδή $\left\| h - \sum\limits_{k=0}^n \lambda_k \chi_{\Omega_k} \circ h \right\|_\infty < \epsilon$ και επομένως $\left\| M_h - \sum\limits_{k=0}^n \lambda_k M_{\chi_{\Omega_k} \circ h} \right\| < \epsilon$. Έπεται ότι

$$\left\| A - \sum_{k=1}^n \lambda_k E(\Omega_k) \right\| = \left\| U M_h U^* - \sum_{k=1}^n \lambda_k U M_{\chi_{\Omega_k} \circ h} U^* \right\| < \epsilon$$

όπως θέλαμε. □

Παρατήρηση 11. *Αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο ότι, αν f είναι συνεχής στο D_A τότε $f(A) = \int f(\lambda) dE_A(\lambda)$.*

Παρατήρηση 12. *Η απεικόνιση $\Omega \to E_A(\Omega) : \mathrm{Bor}(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(H)$ (όπου $\mathrm{Bor}(\sigma(A))$ τα Borel υποσύνολα του $(\sigma(A))$ ονομάζεται επίσης* φασματική ανάλυση της μονάδας (spectral resolution of the identity) για τον *A. Αποδεικνύεται ότι είναι η μοναδική απεικόνιση $F : \mathrm{Bor}(\sigma(A)) \to B(H)$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες της Πρότασης 7 και την $A = \int \lambda dF_\lambda$.*

Πρόταση 13. *Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ αυτοσυζυγής τελεστής. Ένας $B \in \mathcal{B}(H)$ μετατίθεται με τον A αν και μόνον αν ο B μετατίθεται με κάθε φασματική προβολή $E_A(\Omega), \ \Omega \subseteq D_A$ Borel.*

Απόδειξη. Έστω ότι $BE_A(\Omega) = E_A(\Omega)B$ για κάθε $\Omega \subseteq D_A$ Borel. Εφόσον ο A ανήκει στην κλειστή γραμμική θήκη των φασματικών προβολών του, έπεται άμεσα ότι $AB = BA$.

Έστω αντίστροφα ότι $AB = BA$. Τότε $A^n B = BA^n$ για κάθε n, άρα $p(A)B = Bp(A)$ για κάθε πολυώνυμο p και άρα $f(A)B = Bf(A)$ για κάθε συνεχή συνάρτηση ορισμένη στο D_A (από το συναρτησιακό λογισμό για συνεχείς συναρτήσεις).

Αν $\Omega \subseteq D_A$ είναι σύνολο Borel, να δείξουμε ότι $BE_A(\Omega) = E_A(\Omega)B$.

(i) Υποθέτουμε πρώτα ότι το Ω είναι κλειστό. Υπάρχει τότε ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : D_A \to [0,1]$ ώστε $f_n(t) = 1$ για κάθε $t \in \Omega$ και $f_n(s) = 0$ όταν $\text{dist}(s, \Omega) \geqslant \frac{1}{n}$. Η ακολουθία (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη και συγκλίνει στην χ_Ω σε κάθε σημείο του D_A. Επειδή $f_n(A)B = Bf_n(A)$ για κάθε n, από το Πόρισμα 6 προκύπτει ότι $\chi_\Omega(A)B = B\chi_\Omega(A)$, δηλαδή $E_A(\Omega)B = BE_A(\Omega)$.

(ii) Θεωρούμε τώρα την οικογένεια $\mathcal{S} := \{S \subseteq D_A$ Borel $: \ E_A(S)B = BE_A(S)\}$.
Δείξαμε μόλις ότι η $\mathcal{S}$ περιέχει τα κλειστά σύνολα. Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{S}$ είναι σ-άλγεβρα.

Πράγματι: (α) Η $\mathcal{S}$ είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα (αν $E_A(S)B = BE_A(S)$ τότε $E_A(S^c)B = BE_A(S^c)$ διότι $E_A(S^c) = I - E_A(S)$).

(β) Η $\mathcal{S}$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές (αν $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ τότε $E_A(S_1 \cap S_2)B = E_A(S_1)E_A(S_2)B = E_A(S_1)BE_A(S_2) = BE_A(S_1)E_A(S_2) = BE_A(S_1 \cap S_2)$).

Από τα (α) και (β) έπεται ότι η $\mathcal{S}$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες ενώσεις.

(γ) Η $\mathcal{S}$ είναι κλειστή ως προς αύξουσες αριθμήσιμες ενώσεις: αν $S_n \in \mathcal{S}$ και $S_n \subseteq S_{n+1}$ για κάθε n, θέτοντας $S = \cup S_n$ θα δείξω ότι $S \in \mathcal{S}$.

Πράγματι, για κάθε $x \in H$ έχουμε

$$\|E(S)x - E(S_n)x\|^2 = \|E(S \backslash S_n)x\|^2 = \langle E(S \backslash S_n)x, x\rangle = \mu_x(S \backslash S_n) \to 0$$

γιατί η $(S \backslash S_n)_n$ φθίνει προς το $\varnothing$ και το μ_x είναι σ-προσθετικό. Έχουμε λοιπόν, για κάθε $x, y \in H$, $\lim_n E_A(S_n)Bx = E_A(S)Bx$ και $\lim_n E_A(S_n)x = E_A(S)x$, άρα

$$\begin{aligned}\langle E_A(S)Bx, y\rangle &= \lim_n \langle E_A(S_n)Bx, y\rangle = \lim_n \langle BE_A(S_n)x, y\rangle \quad (\text{αφού } S_n \in \mathcal{S}) \\ &= \lim_n \langle E_A(S_n)x, B^*y\rangle = \langle E_A(S)x, B^*y\rangle = \langle BE_A(S)x, y\rangle,\end{aligned}$$

άρα $E_A(S)B = BE_A(S)$.

Κατά συνέπεια, η $\mathcal{S}$ είναι σ-άλγεβρα. Αφού λοιπόν περιέχει τα κλειστά υποσύνολα του D_A, θα περιέχει όλα τα Borel: η σχέση $E_A(S)B = BE_A(S)$ ισχύει για κάθε Borel υποσύνολο S του D_A, όπως θέλαμε. $\square$

Βιβλιογραφία

Orr Shalit, *Introduction to von Neumann algebras*

A. Κατάβολος, *Θεωρία Τελεστών. Σημειώσεις*