Αναλλοίωτοι υπόχωροι

Έστω H ένας χώρος Hilbert.

Ένας υπόχωρος $E \subseteq H$ είναι *αναλλοίωτος (invariant)* από έναν φραγμένο τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ αν $A(E) \subseteq E$, δηλ. αν $Ax \in E$ για κάθε $x \in E$. Τότε ο *κλειστός* υπόχωρος $\overline{E}$ είναι τότε και αυτός A-αναλλοίωτος.

(Πράγματι: αν $x \in \overline{E}$ υπάρχει (x_n) στον E με $x_n \to x$, άρα $Ax = \lim_n Ax_n \in \overline{E}$ αφού κάθε $Ax_n \in E$.)

Θα λέμε ότι ο υπόχωρος E *ανάγει (reduces)* τον A όταν και ο E και ο $E^\perp$ είναι A-αναλλοίωτοι.

Γράφοντας $H = \overline{E} \oplus E^\perp$, ο A γράφεται

$$A = \left[\begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right].$$

Οι απεικονίσεις A_{ij} είναι οι εξής (όπου $P = P(\overline{E})$)

$$\begin{array}{llllll} A_{11}: & \overline{E} \to \overline{E}: & x \to PAx & A_{12}: & E^\perp \to \overline{E}: & y \to PAy \\ A_{21}: & \overline{E} \to E^\perp: & x \to (I-P)Ax & A_{22}: & E^\perp \to E^\perp: & y \to (I-P)Ay. \end{array}$$

Έπεται ότι $A(E) \subseteq E$ αν και μόνον αν $A_{21} = 0$ (δηλ. αν-ν ο πίνακας για τον A είναι (block-) άνω τριγωνικός), και ότι ο A ανάγεται από τον E αν και μόνον αν $A_{12} = A_{21} = 0$ (δηλ. αν-ν ο πίνακας για τον A είναι (block-) διαγώνιος).

Ας παρατηρήσουμε ότι η προβολή $P^\perp$ στον $E^\perp$ είναι ο $I - P$.

Λήμμα 1 *(α) Ένας κλειστός υπόχωρος E είναι A-αναλλοίωτος αν και μόνον αν $AP = PAP$ (ισοδύναμα, αν και μόνον αν $P^\perp AP = 0$).*

(β) Ο E είναι A^*-αναλλοίωτος αν και μόνον αν ο $E^\perp$ είναι A-αναλλοίωτος, αν και μόνον αν $PA = PAP$ (ισοδύναμα, αν και μόνον αν $PAP^\perp = 0$).

(γ) Συνεπώς ο E ανάγει τον A αν και μόνον αν $A(E) \subseteq E$ και $A^*(E) \subseteq E$, ισοδύναμα αν και μόνον αν $AP = PA$.

Απόδειξη (α) Αν ο E είναι A-αναλλοίωτος, τότε για κάθε $x \in H$ έχουμε $Px \in E$ άρα $APx \in E$ οπότε $P(APx) = APx$. Δείξαμε ότι $AP = PAP$, δηλ. $(I-P)AP = 0$, δηλ. $P^\perp AP = 0$.

Αν ισχύει η σχέση $AP = PAP$, τότε για κάθε $x \in E$ έχουμε $Px = x$ και συνεπώς $Ax = APx = PAPx$, οπότε το Ax είναι στο σύνολο τιμών της P, που είναι ο E.

(β) Εφαρμόζοντας το (α) για τον A^* βρίσκουμε ότι ο E είναι A^*-αναλλοίωτος αν και μόνον αν $P^\perp A^* P = 0$, ισοδύναμα (αφού $P^* = P$) αν και μόνον αν $PAP^\perp = 0$, δηλ. $AP^\perp = P^\perp AP^\perp$. Όμως η τελευταία ισότητα (πάλι από το (α)) ισχύει αν και μόνον αν ο $E^\perp$ είναι A-αναλλοίωτος.

(γ) Απο το (β), ο E και ο $E^\perp$ είναι A-αναλλοίωτοι αν και μόνον αν $A(E) \subseteq E$ και $A^*(E) \subseteq E$, ισοδύναμα αν και μόνον αν $AP = PAP$ και $PA = PAP$. Οι δύο τελευταίες σχέσεις δίνουν $AP = PA$.

Αντίστροφα, αν $AP = PA$ τότε $AP^2 = PAP$ δηλαδή $AP = PAP$ οπότε $A(E) \subseteq E$, και επίσης $PAP = P^2A$ δηλαδή $PAP = PA$ οπότε $A(E^\perp) \subseteq E^\perp$. □

Συμπέρασμα: *Ένας* αυτοσυζυγής *τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$ ή ένα* αυτοσυζυγές *σύνολο τελεστών $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ αφήνουν (όλοι) έναν κλειστό υπόχωρο $E \subseteq H$ αναλλοίωτο αν και μόνον αν η αντίστοιχη προβολή P στον E μετατίθεται με τον A (ή $P \in \mathcal{A}'$).*

Υπάρχουν αναλλοίωτοι υπόχωροι;

Παρατήρηση Αν $x \in H$, ο υπόχωρος $E_x = \overline{\text{span}\{x, Ax, A^2x, \dots\}}$ είναι A-αναλλοίωτος, διαχωρίσιμος. Αν ο χώρος H *δεν* είναι διαχωρίσιμος και $x \neq 0$, ο E_x είναι μη τετριμμένος.

Συμπέρασμα: Σε μη διαχωρίσιμο χώρο, κάθε τελεστής έχει κλειστό αναλλοίωτο υπόχωρο εκτός από τους τετριμμένους $\{0\}$ και H.

Επίσης, κάθε ιδιόχωρος του A είναι A-αναλλοίωτος. Αν ο H είναι *μιγαδικός* χώρος πεπερασμένης διάστασης, κάθε τελεστής έχει ιδιοτιμές.[1]

Συμπέρασμα: Σε *μιγαδικό* χώρο πεπερασμένης διάστασης, κάθε τελεστής έχει μη τετριμμένο κλειστό αναλλοίωτο υπόχωρο. [2]

Μένει η περίπτωση απειροδιάστατου αλλά διαχωρίσιμου χώρου.

> Το πρόβλημα του αναλλοίωτου υπόχωρου:
> *Είναι αλήθεια ότι κάθε φραγμένος τελεστής A σε έναν (διαχωρίσιμο, απειροδιάστατο) χώρο Hilbert H έχει μη τετριμμένο κλειστό αναλλοίωτο υπόχωρο;*

... ή μήπως υπάρχει τελεστής A που ικανοποιεί $E_x = H$ για κάθε $x \neq 0$;

Η απάντηση είναι *άγνωστη* για τον ℓ^2 και γενικότερα για *αυτοπαθείς* χώρους Banach.

Έχουν όμως κατασκευασθεί χώροι Banach στους οποίους ορίζονται τελεστές χωρίς αναλλοίωτους υποχώρους.

• Το πρώτο παράδειγμα: P. Enflo, On the invariant subspace problem in Banach spaces, *Acta Math.*, 158, 1987.

• Στον ℓ_1: C.J. Read, A solution to the invariant subspace problem on the space ℓ_1, *Bull. London Math. Soc.* 17, 1985.

• Ένας χώρος όπου κάθε τελεστής έχει αναλλοίωτο υπόχωρο: S.A. Argyros and R.G. Haydon, A hereditarily indecomposable $\mathcal{L}_\infty$-space that solves the scalar-plus-compact problem, *Acta Mathematica* 206, No. 1 (2011).

• Μια σύγχρονη παρουσίαση: I. Chalendar and J. R. Partington, *Modern approaches to the invariant subspace problem*, Cambridge University Press, 2011.

[1]... λέει το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας.

[2]Βεβαίως σε πραγματικούς χώρους αυτό δεν ισχύει: για παράδειγμα ο τελεστής της στροφής κατά γωνία $\pi/3$ στον $\mathbb{R}^2$ δεν αφήνει αναλλοίωτο κανέναν γνήσιο υπόχωρο.