Παρατηρήσεις στο πρώτο φυλλάδιο

Masa-πρότυπα Έστω $a = [a(i,j)] \in M_n(\mathbb{C})$. Ο *φορέας (support)* του a είναι το σύνολο των $(i,j) \in [n] \times [n]$ ώστε $a(i,j) \neq 0$, ή ισοδύναμα το συμπλήρωμα του μηδενοσυνόλου null(a) του a, δηλ. του συνόλου [1]

$$\{(i,j) \in [n] \times [n] : a(i,j) = 0\} = \{(i,j) \in [n] \times [n] : e_{ii}ae_{jj} = 0\}.$$

Ο φορέας supp$(\mathcal{S})$ ενός υποσυνόλου $\mathcal{S} \subseteq M_n(\mathbb{C})$ είναι του συμπλήρωμα του μηδενοσυνόλου του null$(\mathcal{S})$, όπου

$$\text{null}(\mathcal{S}) = \bigcap_{a \in \mathcal{S}} \text{null}(a) = \{(i,j) \in [n] \times [n] : e_{ii}ae_{jj} = 0 \ \forall a \in \mathcal{S}\}$$

$$\text{άρα } \text{supp}(\mathcal{S}) = \{(i,j) \in [n] \times [n] : \exists\, a \in \mathcal{S} : e_{ii}ae_{jj} \neq 0\}.$$

Παρατήρηση Το σύνολο $\{e_{ij} : (i,j) \in [n] \times [n]\}$ είναι (αλγεβρική) βάση του γραμμικού χώρου $M_n(\mathbb{C})$ και το σύνολο $\{e_{ii} : i \in [n]\}$ είναι (αλγεβρική) βάση του υποχώρου D_n. Μάλιστα το δεύτερο σύνολο αποτελείται από κάθετες ανά δύο (ορθές) προβολές.

Έστω $\Omega \subseteq [n] \times [n]$ μη κενό σύνολο. Ορίζω

$$\mathcal{M}(\Omega) = \{a \in M_n(\mathbb{C}) : \text{supp}(a) \subseteq \Omega\} = \{a \in M_n(\mathbb{C}) : a|_{\Omega^c} = 0\}.$$

Εύκολα φαίνεται ότι το $\mathcal{M}(\Omega)$ είναι δι-πρότυπο (bimodule ή αμφίπλευρο πρότυπο) στην masa D_n: είναι δηλαδή υπόχωρος της $M_n(\mathbb{C})$ και για κάθε $a \in \mathcal{S}$ και $d_1, d_2 \in D_n$ έχουμε $d_2ad_1 \in \mathcal{S}$.

Πρόταση *Αν $\mathcal{S} \subseteq M_n(\mathbb{C})$ είναι D_n-δι-πρότυπο τότε $\mathcal{S} = \mathcal{M}(\Omega)$ όπου $\Omega :=$ supp$(\mathcal{S})$.*

Απόδειξη Είναι προφανές απ' τον ορισμό του φορέα ότι κάθε $a \in \mathcal{S}$ φέρεται στο supp$(\mathcal{S})$ (δηλαδή ο φορέας του a περιέχεται στο supp$(\mathcal{S})$).

Συνεπώς $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}(\Omega)$.

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, έστω $b \in \mathcal{M}(\Omega)$. Να δείξουμε ότι $b \in \mathcal{S}$.

Έστω (i,j) τέτοιο ώστε $b(i,j) \neq 0$, δηλαδή $(i,j) \in \text{supp}\, b \subseteq \text{supp}\, \mathcal{S}$. Έχουμε τότε $e_{ij} \in \mathcal{S}$. Πράγματι, απ' τον ορισμό του supp $\mathcal{S}$, υπάρχει $a \in \mathcal{S}$ ώστε $a(i,j) \neq 0$, δηλαδή $e_{ii}ae_{jj} \neq 0$. Όμως $e_{ii}ae_{jj} \in \mathcal{S}$ (αφού $a \in \mathcal{S}$ και $e_{ii}, e_{jj} \in D_n$) και $e_{ii}ae_{jj} = a(i,j)e_{ij}$. Συνεπώς $a(i,j)e_{ij} \in \mathcal{S}$, άρα $e_{ij} \in \mathcal{S}$. Επειδή

$$b = \sum_{(i,j) \in [n] \times [n]} b(i,j)e_{ij},$$

από τον Ισχυρισμό έπεται ότι $b \in \mathcal{S}$, όπως θέλαμε. □

[1] Άσκηση: Για την παρακάτω ισότητα, παρατήρησε ότι $e_{ii}ae_{jj} = a(i,j)e_{ij}$.

Παρατήρηση *Ένα D_n-δι-πρότυπο $\mathcal{S} \subseteq M_n(\mathbb{C})$ είναι σύστημα τελεστών αν και μόνον αν ο φορέας του περιέχει την διαγώνιο $\Delta = \{(i,i) : i \in [n]\}$ και είναι συμμετρικός (δηλ. $(i,j) \in \mathrm{supp}(\mathcal{S}) \Rightarrow (j,i) \in \mathrm{supp}(\mathcal{S})$. Ισοδύναμα, αν και μόνον αν το $E := \mathrm{supp}(\mathcal{S})\backslash\Delta$ είναι το σύνολο ακμών ενός γραφήματος.*

Γενίκευση Αντί για τον $\ell^2(n)$, θεωρούμε έναν χώρο Hilbert της μορφής $H = L^2(\mu)$ όπου μ ένα σ-πεπερασμένο μέτρο, κι αντί για την άλγεβρα D_n των διαγωνίων τελεστών θεωρούμε την άλγεβρα

$$\mathcal{D}(\mu) := \{M_f \in \mathcal{B}(H) : f \in L^\infty(\mu)\}$$

των πολλαπλασιαστικών τελεστών (όπου $M_f(g) = fg,\ g \in H$). Αν $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)\}$ είναι $\mathcal{D}(\mu)$-διπρότυπο, υπάρχει τρόπος ορισμού του φορέα του $\mathcal{S}$. Η αναμενόμενη γενίκευση της Πρότασης ισχύει για το μέτρο απαρίθμησης (δηλ. όταν $H = \ell^2(\mathbb{N})$), αλλά δεν ισχύει γενικά.

Το φαινόμενο αυτό είναι αντίστοιχο της αποτυχίας της φασματικής σύνθεσης στην Αρμονική Ανάλυση.

Πρόταση [Υπόχωροι συνδιάστασης 1] *Έστω E χώρος με νόρμα, $\phi : E \to \mathbb{C}$ γραμμική μορφή. Ο γραμμικός υπόχωρος $F := \ker\phi$ είναι κλειστός αν η ϕ είναι συνεχής και πυκνός αν η ϕ είναι ασυνεχής.*

Απόδειξη Επειδή $F = \phi^{-1}(\{0\})$, αν η ϕ είναι συνεχής τότε ο F είναι κλειστός: αντίστροφη εικόνα κλειστού.

Αν η ϕ είναι ασυνεχής, υπάρχει μια ακολουθία (x_n) με $x_n \in E$, $\|x_n\| = 1$ ώστε $\phi(x_n) > n$ για κάθε n.

Έστω $y \in E$. Παρατηρούμε ότι $y\phi(x_n) - x_n\phi(y) \in \ker\phi$ για καθε n, άρα $y_n := y - \frac{\phi(y)}{\phi(x_n)}x_n \in \ker\phi$ για καθε n. Όμως

$$\|y - y_n\| = \left\|\frac{\phi(y)}{\phi(x_n)}x_n\right\| = \left|\frac{\phi(y)}{\phi(x_n)}\right| \|x_n\| < \frac{|\phi(y)|}{n} \to 0$$

και συνεπώς $y = \lim y_n \in \overline{F}$. □