Καλώς ήρθατε στη Θεωρία Τελεστών!

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH175/

Χειμερινό Εξάμηνο 2019-20

Περιεχόμενα I

Εισαγωγικά

Χώροι τελεστών και γραφήματα,
Τελεστές, υπερτελεστές και Θεωρία Πληροφορίας

Γραφήματα - μεταθετικά και μη

Ορισμός

Ένα γράφημα $G = (V, \mathscr{E})$ *αποτελείται από ένα μη κενό σύνολο* V, *τις ακμές (the "vertex set"), και ένα σύνολο* $\mathscr{E} \subseteq V \times V$, *τις κορυφές (the "edge set"), ώστε*
(1) $(v, v) \notin \mathscr{E}$ *για κάθε* $v \in V$, *(no loops) και*
(2) αν $v \neq w \in V$ *και* $(v, w) \in \mathscr{E}$, *τότε* $(w, v) \in \mathscr{E}$.

Γράφουμε $v \sim_{\mathscr{E}} w$ όταν $(v, w) \in \mathscr{E}$
και $v \simeq_{\mathscr{E}} w$ όταν $(v, w) \in \mathscr{E}$ ή $v = w$.

Ορισμός

Αν $G = (V, \mathscr{E})$ *είναι γράφημα, το συμπλήρωμα (complement) του* G, *που συμβολίζουμε* $\bar{G} = (V, \bar{\mathscr{E}})$, *ορίζεται από τη σχέση*
$(v, w) \in \bar{\mathscr{E}} \iff (w \neq v$ *και* $(v, w) \notin \mathscr{E})$.

Συστήματα Τελεστών (Operator Systems)

Αν $a = [a_{ij}] \in M_n$, ο συζυγής a^* είναι ο πίνακας $a^* = [\overline{a_{ji}}]$.

Ορισμός

Συστήμα τελεστών στον $M_n := M_n(\mathbb{C})$ λέγεται ένα $\mathscr{S} \subseteq M_n$ με τις ιδιότητες

- *είναι γραμμικός υπόχωρος του M_n*
- *είναι αυτοσυζυγής, δηλ. $a \in \mathscr{S} \Rightarrow a^* \in \mathscr{S}$*
- *περιέχει τον ταυτοτικό πίνακα $\mathbf{1} \in M_n$.*

Κάθε γράφημα $G = (V, \mathscr{E})$ με $|V| = n < \infty$ ορίζει ένα σύστημα τελεστών $\mathscr{S}_G \subseteq M_n$ ως εξής

$$\mathscr{S}_G := \{a = [a_{ij}] \in M_n : a_{ij} \neq 0 \Rightarrow i \simeq_{\mathscr{E}} j\}.$$

Δηλαδή το $\mathscr{S}_G$ αποτελείται από όλους τους πίνακες που 'φέρονται' στο $\mathscr{E} \cup \{(i,i) : i \in [n]\}$.

Συστήματα Τελεστών (Operator Systems)

Το σύστημα $\mathscr{S}_G$ έχει τις επιπλέον ιδιότητες:
Αν $a \in \mathscr{S}_G$ και $b \in D_n$ (:διαγώνιος πίνακας) τότε $ab \in \mathscr{S}_G$ και $ba \in \mathscr{S}_G$. Συνοπτικά $D_n \mathscr{S}_G D_n \subseteq \mathscr{S}_G$.

Λέμε ότι το $\mathscr{S}_G$ είναι διπρότυπο (bimodule) πάνω στην *-άλγεβρα D_n των διαγωνίων πινάκων.

Το σύνολο D_n είναι σύστημα τελεστών, επιπλέον είναι και άλγεβρα, δηλ. $a, b \in D_n \Rightarrow ab \in D_n$.

Είναι μεταθετική άλγεβρα, και μάλιστα είναι μεγιστική αβελιανή αυτοσυζυγής άλγεβρα (maximal abelian selfadjoint algebra - masa).

Ασκήσεις

Αν $\mathscr{X} \subseteq M_n$ είναι μη κενό σύνολο ο μεταθέτης (commutant) $\mathscr{X}' := \{b \in M_n : ab = ba \, \forall a \in \mathscr{X}\}$ είναι πάντα άλγεβρα (δηλ. γραμ. χώρος και κλειστή στο γινόμενο πινάκων) και περιέχει τον ταυτοτικό πίνακα $\mathbf{1} \in M_n$. Πάντα έχουμε $\mathscr{X} \subseteq (\mathscr{X}')' := \mathscr{X}''$.

Έστω $\mathscr{A} \subseteq M_n$ μια αυτοσυζυγής άλγεβρα με $\mathbf{1} \in \mathscr{A}$. Τότε $\mathscr{A} = \mathscr{A}''$.

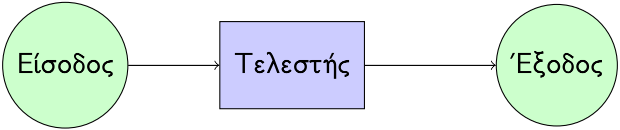
Η $\mathscr{A}$ είναι μεταθετική ανν $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{A}'$. Είναι μεγιστική αβελιανή ανν $\mathscr{A} = \mathscr{A}'$. Παράδειγμα: $\mathscr{A} = D_n$. Υπάρχουν άλλες;

Πότε ένα σύστημα τελεστών $\mathscr{S} \subseteq M_n$ είναι της μορφής $\mathscr{S} = \mathscr{S}_G$ για κατάλληλο γράφημα G;

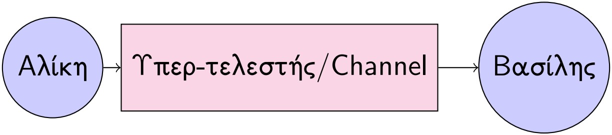
Alice and Bob

Δύο εργαστήρια: Εργαστήριο Αλίκης, Εργαστήριο Βασίλη.

[Εργαστήριο Αλίκης]



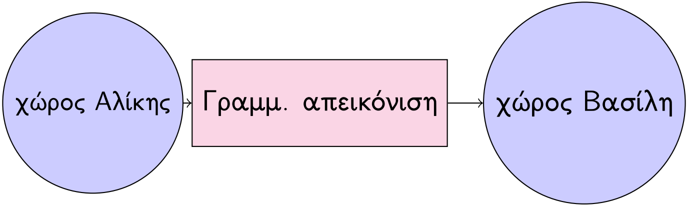
Μετάδοση Πληροφοριών



Τελεστές και Υπερτελεστές

[Χώρος Τελεστών Αλίκης]

[Απεικόνιση μεταξύ χώρων τελεστών Αλίκης $\to$ Βασίλη]



Γραμμικοί χώροι, χώροι με εσωτερικό γινόμενο και Τελεστές

Γραμμικοί χώροι

$\mathbb{K}$ είναι το σώμα $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

Ορισμός

Ένα $X \neq \emptyset$ λέγεται $\mathbb{K}$-γραμμικός χώρος αν είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις $+ : X \times X \to X$ και $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ ώστε

(I) Αξιώματα της πρόσθεσης: $\forall\, x, y, z \in X$,

(i) $x + y = y + x$.

(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$.

(iii) $\exists\, \vec{0} \in X$ *ώστε* $\forall\, x \in X$, $\vec{0} + x = x$.

(iv) $\forall x \in X\ \exists\, (-x) \in X$ *ώστε* $x + (-x) = \vec{0}$.

(II) Αξιώματα του πολλαπλασιασμού: $\forall\, x, y \in X$ *και* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

(i) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

(ii) $1x = x$.

(iii) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

(iv) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων

• Το $\mathbb{C}$.

• Αν $n \in \mathbb{N}$, ο $\mathbb{C}^n$ που αποτελείται από όλες τις n-αδες μιγαδικών αριθμών,

$$\vec{x} = (x(1), x(2), \dots, x(n))$$

με πράξεις κατά συντεταγμένη. Γράφουμε καμμιά φορά τα στοιχεία του $\mathbb{C}^n$ ως διανύσματα-στήλες (column vectors).

$$\begin{bmatrix} x(1) \\ \vdots \\ x(n) \end{bmatrix} = [x(1), \dots, x(n)]^T$$

(το σύμβολο T σημαίνει «ανάστροφος» (transpose)).

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων ΙΙ

- Ο χώρος

$$c_{00} = c_{00}(\mathbb{N}) := \{x = (x(n)) : x(n) \in \mathbb{C} \text{ τ.ω. } \exists n_x \in \mathbb{N} \text{ με } x(n) = 0 \forall n > n_x\}$$

με πράξεις κατά συντεταγμένη.
Έστω $e_m = (\delta_m(n))$ όπου $\delta_m(n) = 1$ όταν $n = m$ και $\delta_m(n) = 0$ αλλιώς. Η (άπειρη) οικογένεια $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη και παράγει τον c_{00}: κάθε $x = x(n)) \in c_{00}$ γράφεται (μοναδικά) ως γραμμικός συνδυασμός $x = \sum\limits_{m=1}^{n_x} x(m)e_m$.
Δηλαδή η $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ είναι (αλγεβρική ή Hamel) βάση του c_{00}.

Παρατηρούμε ότι ο c_{00} είναι ο χώρος όλων των συναρτήσεων $x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ τω οποίων ο φορέας $\operatorname{supp} x := \{n \in \mathbb{N} : x(n) \neq 0\}$ είναι πεπερασμένο σύνολο (περιέχεται στο $\{1, 2, \ldots, n_x\}$).

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων III

• Το σύνολο $\mathscr{S}$ όλων των ακολουθιών πραγμ. ή μιγ. αριθμών γίνεται γραμμικός χώρος αν ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά συντεταγμένη:

$$x+y=(\xi(k)+\eta(k)) \quad , \quad \lambda x=(\lambda\xi(k))$$

για $x=(\xi(k))$, $y=(\eta(k))$ και $\lambda\in\mathbb{K}$.

• Αν $A\neq\emptyset$ και $\mathbb{K}^A$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f:A\to\mathbb{K}$, τότε το $\mathbb{K}^A$ γίνεται γραμμικός χώρος αν ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά σημείο:
αν $f,g\in\mathbb{K}^A$ και $\lambda\in\mathbb{K}$, ορίζουμε $f+g,\ \lambda f\in\mathbb{K}^A$ θέτοντας

$$(f+g)(t)=f(t)+g(t) \quad , \quad (\lambda f)(t)=\lambda f(t) \quad , \quad t\in A.$$

(Πρτρ: $\mathscr{S}=\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$).

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων IV

• Ο χώρος $\mathscr{L}^1[0,1]$ των Lebesgue-ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f:[0,1]\to\mathbb{C}$.
Κάθε συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ γράφεται μοναδικά $f=u+iv$ όπου $u(t):=\frac{1}{2}(f(t)+\overline{f(t)})$, $v(t):=\frac{1}{2i}(f(t)-\overline{f(t)})$ (παίρνουν πραγματικές τιμές). Η f λέγεται (Lebesgue)-ολοκληρώσιμη όταν οι u και v είναι Lebesgue-ολοκληρώσιμες, και τότε ορίζουμε

$$\int f(t)d\lambda(t):=\int u(t)d\lambda(t)+i\int v(t)d\lambda(t),$$

Ο $\mathscr{L}^1[0,1]$ είναι γραμμ. χώρος (πράξεις κατά σημείο) λόγω της γραμμικότητας του ολοκληρώματος.

• Ο χώρος $\ell^2=\ell^2(\mathbb{N})$ αποτελείται από όλες τις ακολουθίες μιγ. αριθμών (= συναρτήσεις $x:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$) που είναι τετραγωνικά αθροίσιμες, δηλ. $\sum_n|x(n)|^2<\infty$. Είναι γραμμ. χώρος (πράξεις κατά συντεταγμένη). Γιατί;

Παρατήρηση - Άσκηση Κάθε γραμμικός χώρος «είναι» ένας χώρος συναρτήσεων σε κάποιο σύνολο.

Γραμμικές απεικονίσεις

Ορισμός

Έστω E, F *(πραγματικοί ή μιγαδικοί) γραμμικοί (:διανυσματικοί) χώροι. Μια απεικόνιση* $T : E \mapsto F$ *λέγεται γραμμική αν*

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \ T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y).$$

Μια γραμμική απεικόνιση λέγεται (γραμμικός) ισομορφισμός αν επι πλέον είναι 1-1 και επί.
Δυο γραμμικοί χώροι E, F *λέγονται ισόμορφοι αν υπάρχει ισομορφισμός* $T : E \mapsto F$.

Γραμμικοί χώροι με νόρμα

Νόρμα σε έναν γραμμ. χώρο X είναι μια απεικόνιση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ ώστε για κάθε $x, y, \in X$ και $\lambda \in \mathbb{K}$,

- (N $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$,
- (N $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ και
- (N $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (τριγωνική ανισότητα).

Ορισμός

Αν $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα στον X, τότε το ζεύγος $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος με νόρμα.
Η συνάρτηση $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με $d(x,y) = \|x - y\|, \quad x, y \in X$ είναι μετρική (η μετρική που επάγεται στον X από τη νόρμα του). Όταν ο μετρ. χώρος (X, d) είναι πλήρης, ο $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος Banach.

Αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα και $x_n, x \in X$, τότε $x_n \to x$ σημαίνει $\|x_n - x\| \to 0$.

Παρατήρηση Πολύ συχνά στις εφαρμογές, η νόρμα (ή η μετρική) προσδιορίζεται από την σύγκλιση που μελετάμε.
Για παράδειγμα, η νόρμα supremum στον $C([a,b])$ (δες πιο κάτω) εκφράζει την ομοιόμορφη σύγκλιση μιας ακολουθίας (f_n) συνεχών συναρτήσεων:

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0 \iff f_n \to f \text{ ομοιόμορφα στο } [a,b].$$

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ορισμός

Έστω E ένας $\mathbb{K}$-γραμμικός χώρος ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Ένα *εσωτερικό γινόμενο (inner product ή scalar product)* *στον E είναι μια απεικόνιση*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$$

τέτοια ώστε

$$\begin{array}{ll} (i) & \langle x_1 + \lambda x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \lambda \langle x_2, y \rangle \\ (ii) & \overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle \\ (iii) & \langle x, x \rangle \geq 0 \\ (iv) & \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0 \end{array}$$

για κάθε $x, x_1, x_2, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

άρα $\quad (i)' \ \langle x, y_1 + \lambda y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y_2 \rangle .$

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Πρόταση (Ανισότητα Cauchy-Schwarz)

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο,
(α) για κάθε $x, y \in E$ ισχύει

$$|\langle x, y\rangle| \leq \langle x, x\rangle^{1/2} \langle y, y\rangle^{1/2}.$$

(β) Ισότητα ισχύει αν και μόνον αν τα x, y είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Πρόταση

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, η απεικόνιση $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ όπου $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ είναι νόρμα στον E.

Χώροι Hilbert

Ορισμός

Ένας χώρος $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *με εσωτερικό γινόμενο λέγεται χώρος Hilbert αν είναι πλήρης ως προς την μετρική που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.*

Παραδείγματα (a) Ο χώρος $\mathbb{K}^n$, εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x(k)\overline{y(k)}$, είναι βέβαια χώρος Hilbert. Είναι επίσης πλήρης ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_\infty$, αλλά δεν είναι χώρος Hilbert ως προς αυτήν (γιατί δεν ικανοποιείται ο κανόνας του παραλληλογράμμου), μολονότι οι δυο νόρμες είναι ισοδύναμες.

(b) Κάθε χώρος $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο και $\dim E<\infty$ είναι χώρος Hilbert.

(c) Ο χώρος ℓ^2, με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\overline{y(k)}$, είναι χώρος Hilbert, και ο χώρος c_{oo} των ακολουθιών με πεπερασμένο φορέα είναι πυκνός υπόχωρος του. Επομένως ο χώρος $(c_{oo},\|\cdot\|_2)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο αλλά όχι Hilbert, εφ' όσον δεν είναι πλήρης.

(d) Ο χώρος $C([a,b])$ δεν είναι πλήρης ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_2$ που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

Πίνακες και Τελεστές

Αν $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle), (F, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης, κάθε γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ είναι συνεχής. Αν επιλέξω ορθοκανονικές βάσεις $\{e_1, \dots, e_m\}$ του E και $\{f_1, \dots, f_n\}$ του F, ορίζεται ένας $n \times m$ πίνακας (n γραμμές, m στήλες) $[a_{ik}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ από την σχέση

$$a_{ik} = \langle Te_k, f_i \rangle, i = 1, \dots n, k = 1, \dots m.$$

Αντίστροφα, κάθε $[a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ ορίζει μια μοναδική γραμμική απεικόνιση $T_A : E \to F$ που ικανοποιεί τη σχέση αυτή:
αν $x = \sum \xi_j e_j$ τότε $T_A(x) = \sum \eta_k f_k$ όπου

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = [a_{ij}] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j}\xi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj}\xi_j \end{bmatrix}.$$

Η απεικόνιση $M_{nm}(\mathbb{K}) \to \mathscr{L}(E, F) : A \to T_A$ είναι 1-1, επί και γραμμική. Όταν $n = m$, απεικονίζει το γινόμενο πινάκων στη σύνθεση τελεστών (η γενικότερα όταν ορίζεται γινόμενο).

Πίνακες και Τελεστές

Αν $A \in M_{nm}$, ορίζουμε $A^t \in M_{mn}$ τον $A^t = [b_{ij}]$ όπου $b_{ij} = a_{ji}$.
Θέτουμε $A^* = [\overline{a_{ji}}]$. Τότε $\langle T_{A^*} y, x\rangle = \langle y, T_A x\rangle$ για κάθε $y \in F, x \in E$.
Συνεπώς:

Παρατήρηση

Αν $H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle), (H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης, και $T : H_1 \to H_2$ ένας τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής $T^* : H_2 \to H_1$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle T^* x_2, x_1\rangle_{H_1} = \langle x_2, Tx_1\rangle_{H_2} \qquad \text{για κάθε } x_1 \in H_1, x_2 \in H_2.$$

Ιδιότητες: Αν $T, S \in \mathscr{L}(H_1, H_2), R \in \mathscr{L}(H_2, H_3)$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, έχουμε $(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*$, $(TR)^* = R^* T^*$, $T^{**} = T$.

Το πλησιέστερο διάνυσμα (βέλτιστη προσέγγιση) (I)

Λήμμα

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $x \in E$ και $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ πεπερασμένη ορθοκανονική ακολουθία στον E. Το διάνυσμα $y_x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$ είναι το (μοναδικό) πλησιέστερο στο x στοιχείο του υποχώρου $F = \mathrm{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.
Επιπλέον το $x - y_x$ είναι κάθετο στον F και αντίστροφα, αν $y \in F$ και $x - y \perp F$, τότε $y = y_x$.

Δηλαδή η απεικόνιση

$$\mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+ : (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \to \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|$$

έχει ολικό ελάχιστο στο σημείο $(\langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle, \ldots, \langle x, e_n \rangle)$.

Το πλησιέστερο διάνυσμα (Βέλτιστη προσέγγιση) (I)

Απόδειξη Λήμματος Κάθε $y \in F$ γράφεται $y = \sum_{k=1}^n \langle y, e_k \rangle e_k$.
Τώρα: $(x-y) \perp F \iff \langle x-y, e_k \rangle = 0 \; \forall k, \iff$
$\langle y, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle \; \forall k, \iff y = y_x$.
Αν $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$x - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = \left(x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right) + \left(\sum_{k=1}^n (\langle x, e_k \rangle - \lambda_k) e_k \right) = z + y_1$$

παρατηρούμε ότι $z \perp F$ (γιατί $\langle z, e_k \rangle = 0$ για $k = 1, \dots n$) και
$y_1 \in F$, άρα $y_1 \perp z$. Πυθαγόρειο: $\|z + y_1\|^2 = \|z\|^2 + \|y_1\|^2$ δηλαδή

$$\begin{aligned}
\left\| x - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\|^2 &= \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^n (\langle x, e_k \rangle - \lambda_k) e_k \right\|^2 \\
&= \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle - \lambda_k|^2 \quad (1)
\end{aligned}$$

Bessel κ.λπ.

Παρατήρηση

Έστω E χώρος με εσωτ. γιν. και $\{e_1, e_2, \dots\}$ ορθοκανονική ακολουθία.

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \quad \forall x \in E, n \in \mathbb{N}.$$

(από την (1) με $\lambda_k = 0$).

Πρόταση (Ανισότητα Bessel)

(ι) $\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$

(ιι) Στην (ι) ισχύει ισότητα αν και μόνον αν $x \in [e_i : i = 1, \dots, n]$.

Πρόταση (Γενικευμένη ανισότητα Bessel)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Ορθογώνιες διασπάσεις

Θεώρημα (Ύπαρξη καθέτου διανύσματος)

Αν H είναι χώρος Hilbert και M είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του H τότε υπάρχει $z \in H$, $z \neq 0$ ώστε $z \perp M$.

Αν A είναι μη κενό υποσύνολο του H, θέτω

$$A^{\perp} = \{x \in E : \langle x, y \rangle = 0 \text{ για κάθε } y \in A\}.$$

Ο $A^{\perp}$ είναι πάντα κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H.

Θεώρημα (Ορθογώνια διάσπαση)

Αν M είναι κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H, τότε

$$M \oplus M^{\perp} = H.$$

Πόρισμα (Ορθή προβολή)

Έστω M κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H. Η απεικόνιση

$$P_M : H \to H : y \to P_M(y)$$

όπου $P_M(y) \in M$ και $y - P_M(y) \in M^{\perp}$ είναι γραμμική και συνεχής.

Ο δυϊκός ενός χώρου Hilbert

Θεώρημα (Riesz)

Έστω H χώρος Hilbert. Για κάθε γραμμική και συνεχή $f : H \to \mathbb{K}$ υπάρχει μοναδικό $x_f \in H$ ώστε

$$f(y) = \langle y, x_f \rangle \quad \text{για κάθε} \;\; y \in H$$

(και αντίστροφα).

Ορθοκανονικές Βάσεις

Ορισμός

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Μια οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ λέγεται ορθοκανονική βάση του E αν
(i) είναι ορθοκανονική, (δηλ. $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}\ \forall i, j$) και
(ii) Η γραμμική θήκη της είναι πυκνός υπόχωρος του E, δηλ. $\overline{\mathrm{span}\{e_i : i \in I\}} = E$.

Παρατήρηση Σε απειροδιάστατους χώρους, μια ορθοκανονική βάση δεν είναι συνήθως αλγεβρική βάση (π.χ. στον ℓ^2).

Σε διαχωρίσιμο χώρο, για κάθε $x \in E$,

(ι) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$

(σύγκλιση ως προς τη νόρμα του E).

(ιι) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$.

Χώροι Hilbert

Τρία πράγματα:

(1) Ύπαρξη κάθετου διανύσματος

(2) Συνεχείς γραμμικές μορφές είναι τα εσωτερικά γινόμενα.

(3) Ύπαρξη ορθοκανονικών βάσεων.

Φραγμένοι τελεστές

Έστω $(E, \|\cdot\|_E)$ και $(F, \|\cdot\|_F)$ χώροι με νόρμα.

Παρατήρηση. Καμμιά γραμμική συνάρτηση (εκτός απ' την 0) δεν είναι φραγμένη με τη συνήθη έννοια σε όλον το χώρο.

Ορισμός

Μία γραμμική *απεικόνιση* $T : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ *λέγεται* *φραγμένη* ή *φραγμένος τελεστής (bounded operator)* *αν*

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} < +\infty.$$

$(\mathscr{B}(E,F), \|\cdot\|)$*: ο χώρος των φραγμένων τελεστών.*
Είναι χώρος Banach (δηλ. πλήρης) ανν $(F, \|\cdot\|_F)$ *Banach.*

$$\left\|Tx - Tx'\right\|_F \overset{\text{γρ.}}{=} \left\|T(x - x')\right\|_F \overset{\text{φρ.}}{\leq} \|T\| \left\|x - x'\right\|_E$$

Αν T γραμμική,
φραγμένη $\iff$ συνεχής $\iff$ ομοιόμορφα συνεχής.

Φραγμένοι τελεστές

Η επόμενη Πρόταση είναι βασικό εργαλείο:

Πρόταση

Έστω $(E, \|.\|_E)$ *χώρος με νόρμα,* $(F, \|.\|_F)$ *χώρος Banach,* $D \subseteq E$ *πυκνός υπόχωρος και*

$$T : D \to F$$

γραμμική απεικόνιση.
Αν η T *είναι συνεχής, τότε (και μόνο τότε) δέχεται συνεχή επέκταση*

$$\tilde{T} : E \to F \quad \text{δηλ.} \;\; \tilde{T}|_D = T\,.$$

Η επέκταση $\tilde{T}$ *είναι μοναδική (αν υπάρχει) και* $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Ο συζυγής τελεστής

Θεώρημα

Αν H_1, H_2 είναι δύο χώροι Hilbert και $T : H_1 \to H_2$ ένας φραγμένος τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός φραγμένος τελεστής $T^* : H_2 \to H_1$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle T^* x_2, x_1 \rangle_{H_1} = \langle x_2, T x_1 \rangle_{H_2} \qquad \text{για κάθε } x_1 \in H_1, x_2 \in H_2.$$

Ο $T^* : H_2 \to H_1$ ονομάζεται ο συζυγής (adjoint) του T. Είναι φραγμένος τελεστής και $\|T^*\| = \|T\|$.

Προειδοποίηση Ο συζυγής ενός μη φραγμένου τελεστή δεν ορίζεται με τον ίδιο τρόπο.

Ο συζυγής τελεστής

Πρόταση

Η απεικόνιση $T \to T^* : \mathscr{B}(H_1, H_2) \to \mathscr{B}(H_2, H_1)$ *έχει τις εξής ιδιότητες:*
(α) είναι αντιγραμμική, δηλαδή $(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*$.
(β) $T^{**} = T$.
(γ) $\|T^*\| = \|T\|$.
(δ) Αν $H_1 \xrightarrow{S} H_2 \xrightarrow{T} H_3$ *φραγμένοι τελεστές,* $(TS)^* = S^* T^*$.
(ε) $\|T^* T\| = \|T\|^2$.

Ειδικότερα (αν $H_1 = H_2 = H$),
η $T \to T^* : \mathscr{B}(H) \to \mathscr{B}(H)$ είναι μια ενέλιξη (involution) που ικανοποιεί την λεγόμενη ιδιότητα C^*, δηλ. την (ε).

Η νόρμα τελεστή

Αν $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$,

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tx\|_2 : x \in H_1, \|x\|_1 \leq 1\} \\ &= \sup\{|\langle Tx, y\rangle_2| : x \in B_1(H_1), y \in B_2(H_2)\} \end{aligned}$$

Αν $\dim H_1 = m, \dim H_2 = n$ και $a_{ij} = \langle Te_j, f_i\rangle$ έχουμε

$$\|T\| = \sup\left\{\left|\sum_{i,j} y_i a_{ij} x_j\right| : \sum_{j=1}^{m} |x_j|^2 \leq 1, \sum_{i1}^{n} |y_i|^2 \leq 1\right\}$$

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Κάθε φραγμένος τελεστής $T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ ορίζει έναν $\infty \times \infty$ πίνακα $[\langle Te_k, e_i \rangle]$, όπου $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ η συνηθισμένη ορθοκανονική βάση του ℓ^2. Δεν ισχύει όμως το αντίστροφο. Παράδειγμα;

- Διαγώνιοι τελεστές Αν $a = (a_n)$, $a_n \in \mathbb{C}$, είναι τυχούσα ακολουθία, η απεικόνιση $(x(n)) \to (a_n x(n))$ στέλνει τον ℓ^2 στον ℓ^2 ανν $(a_n) \in \ell^\infty$ και τότε ορίζει φραγμένο τελεστή D_a με νόρμα $\|D_a\| = \|a\|_\infty$. Έχουμε $\langle D_a e_k, e_i \rangle = a_k \delta_{ik}$ (διαγώνιος πίνακας).

- Τελεστές Hilbert-Schmidt Μία ικανή (αλλά όχι αναγκαία) συνθήκη ώστε ένας $\infty \times \infty$ πίνακας $[a_{ik}]$ να ορίζει φραγμένο τελεστή $T : \ell^2 \to \ell^2$ ώστε $a_{ik} = \langle Te_k, e_i \rangle$ για κάθε $i, k \in \mathbb{N}$ είναι η $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < \infty$ (σύγκρινε με τους διαγώνιους). Έχουμε

$$(Tx)(i) = \langle Tx, e_i \rangle = \sum_k a_{ik} x(k).$$

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Τελεστές μετατόπισης (shift operators) στον $\ell^2(\mathbb{Z})$:

Για κάθε

$$x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots)$$

Ορίζω U:

$$Ux = (\dots, x(-2), x(-1), x(0), x(1), \dots)$$

δηλαδή $(Ux)(n) = x(n-1)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.
Προφανώς $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$, γραμμικός, ισομετρία και επί.
Ο συζυγής U^*:

$$x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots)$$
$$U^*x = (\dots, x(0), x(1), x(2), x(3), \dots)$$

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

Ισοδύναμα:

- Τελεστές μετατόπισης (shift operators) (α) Στον $\ell^2(\mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned} Ue_n &= e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \\ \text{και} \;\; U^*e_n &= e_{n-1} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)} \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z})$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$-ισομετρίες, άρα επεκτείνονται σε ισομετρίες $\ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$.

- (β) Στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$:

$$\begin{aligned} Se_n &= e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \;\; (n \in \mathbb{Z}_+) \\ \text{και} \;\; S^*e_n &= \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)} \end{aligned}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z}_+)$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$-συστολές (δηλ. $\|Sx\|_2 \leq \|x\|_2$ για κάθε $x \in c_{00}(\mathbb{Z}_+)$), άρα επεκτείνονται σε συστολές $\ell^2(\mathbb{Z}_+) \to \ell^2(\mathbb{Z}_+)$).
(Μάλιστα ο S είναι ισομετρία. Ο S^*;)

- (γ) Στον $L^2(\mathbb{R})$ (translation operators):

Έστω $t \in \mathbb{R}$. Αν $f \in C_c(\mathbb{R})$, ορίζω $f_t : s \to f_t(s) = f(s-t)$. Τότε $f_t \in C_c(\mathbb{R})$ και η απεικόνιση

$$\lambda_t : (C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) \to C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) : f \to f_t$$

είναι (γραμμική) ισομετρία επί (γιατί;). Άρα επεκτείνεται σε γραμμική ισομετρία $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, επί.

C^*-άλγεβρες

Ορισμός

Ενέλιξη (involution) σε μια μιγαδική άλγεβρα $\mathscr{A}$ είναι μια απεικόνιση $\mathscr{A} \to \mathscr{A} : a \to a^*$, που έχει τις ιδιότητες:
(α) είναι αντιγραμμική, δηλαδή $(a+\lambda b)^* = a^* + \bar{\lambda} b^*$.
(β) $a^{**} = a$.
(δ) $(ab)^* = b^* a^*$.
για κάθε $a, b \in \mathscr{A}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$.

Παράδειγμα, η $A \to A^*$ στον $\mathscr{B}(H)$.
Επίσης, η $f \to f^*$ στην $C(K)$, όπου $f^*(t) = \overline{f(t)}$, $t \in K$ (όπου K συμπαγής χώρος Hausdorff – πχ. μετρικός).

C^*-άλγεβρες

Ορισμός

C^*-άλγεβρα είναι μια άλγεβρα Banach $\mathscr{A}$ εφοδιασμένη με μια ενέλιξη $\mathscr{A} \to \mathscr{A} : a \to a^*$ που η νόρμα της ικανοποιεί την λεγόμενη ιδιότητα C^*:

$$\|a^* a\| = \|a\|^2 .$$

Αν H είναι χώρος Hilbert, η $\mathscr{B}(H)$ είναι C^*-άλγεβρα. Μια $\|\cdot\|$-κλειστή υπάλγεβρα $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}(H)$ είναι C^*-άλγεβρα ανν είναι αυτοσυζυγής (selfadjoint), δηλ. αν ικανοποιεί $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^* \in \mathscr{A}$.

Θεώρημα (Gelfand-Naimark)

Κάθε C^*-άλγεβρα $\mathscr{A}$ είναι ισομορφική, ως C^*-άλγεβρα, με μία κλειστή αυτοσυζυγή υπάλγεβρα κάποιου $\mathscr{B}(H)$. Ακριβέστερα, υπάρχει χώρος Hilbert H και απεικόνιση $\pi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(H)$ που διατηρεί την αλγεβρική δομή (άθροισμα, γινόμενο, ενέλιξη) και την νόρμα.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Πολλαπλασιαστικοί τελεστές στον $L^2([a,b])$ Αν $f \in C([a,b])$, ορίζουμε

$$M_f^o : C([a,b]) \to C([a,b]) : g \to fg$$

(κατά σημείο γινόμενο). Επειδή $\|fg\|_2 \le \|f\|_\infty \|g\|_2$, ο M_f^o επεκτείνεται σε $M_f : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ με $\|M_f\| \le \|f\|_\infty$ (μάλιστα, ισότητα).

• Η απεικόνιση $f \to M_f : C([a,b]) \to \mathscr{B}(L^2([a,b]))$ αποτελεί μια 1-1 αναπαράσταση της C*-άλγεβρας $C([a,b])$ στον χώρο Hilbert $L^2([a,b])$.

(Αλλιώς: με μέτρο) Πάρε $f \in L^\infty(\mu)$ και όρισε $M_f : L^2(\mu) \to L^2(\mu) : g \to fg$. Είναι καλά ορισμένος και $\|M_f\| \le \|f\|_\infty$ (ισότητα για σ-πεπερασμένο μ).

Υπενθύμιση: Ο $L^\infty(X,\mathscr{S},\mu)$

Αν $(X,\mathscr{S},\mu)$ είναι χώρος μέτρου, μία $f : X \to \mathbb{C}$ ανήκει στον $\mathscr{L}^\infty(X,\mathscr{S},\mu)$ αν (α) είναι $\mathscr{S}$-μετρήσιμη και
(β) είναι ουσιωδώς φραγμένη (essentially bounded),
δηλ. υπάρχει $M < +\infty$ ώστε $|f(x)| \le M$ σχεδόν παντού,
δηλ. $\mu(\{x \in X : |f(x) > M\}) = 0$.

Ο μικρότερος τέτοιος M (υπάρχει και) λέγεται το ουσιώδες φράγμα (essential supremum) της $|f|$.
Δηλ. ορίζουμε
$\|f\|_\infty := \mathrm{esssup}|f| := \min\{M : \mu(\{x \in X : |f(x) > M\}) = 0\}$.

Αν $f \in \mathscr{L}^\infty(X,\mathscr{S},\mu)$, τότε
$\|f\|_\infty = 0$ ανν $f(x) = 0$ μ-σχεδόν για κάθε $x \in X$.

Ο $L^\infty(X,\mathscr{S},\mu)$ είναι ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμίας, modulo ισότητα μ-σχεδόν παντού, συναρτήσεων του $\mathscr{L}^\infty(X,\mathscr{S},\mu)$.

Η $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα στον $L^\infty(X,\mathscr{S},\mu)$, που γίνεται C* άλγεβρα με τις πράξεις κατά σημείο (μ-σχεδόν παντού).

Κατηγορίες τελεστών

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.
(i) Ένας $T \in \mathscr{B}(H_1)$ λέγεται φυσιολογικός (normal) αν $T^*T = TT^*$.(σαν τις συναρτήσεις)
(ii) Ένας $T \in \mathscr{B}(H_1)$ λέγεται αυτοσυζυγής (self-adjoint) αν $T = T^*$. (σαν τις πραγματικές συναρτήσεις)
(iii) Ένας $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$ λέγεται ορθομοναδιαίος (unitary) αν $T^*T = I_{H_1}$ και $TT^* = I_{H_2}$. (σαν τις συναρτήσεις που $|f(t)| = 1$)

Παραδείγματα: Ο shift S δεν είναι φυσιολογικός. Κάθε M_f είναι φυσιολογικός. Ένας M_f είναι αυτοσυζυγής ανν $f(t) \in \mathbb{R}$ για κάθε t. Ο μετασχηματισμός Fourier $F : L^2([0,2\pi]) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ είναι ορθομοναδιαίος.

Ορισμός

Έστω $\mathscr{A}$ μια C^* άλγεβρα.

(i) Ένα $a \in \mathscr{A}$ λέγεται φυσιολογικό (normal) αν $a^*a = aa^*$.

(π.χ. κάθε $f \in C(K)$)

(ii) Ένα $a \in \mathscr{A}$ λέγεται αυτοσυζυγές (self-adjoint) αν $a = a^*$.

(π.χ. κάθε $f \in C(K)$ με $f(K) \subseteq \mathbb{R}$)

(iii) Αν η $\mathscr{A}$ έχει μονάδα $\mathbf{1}$, ένα $u \in \mathscr{A}$ λέγεται ορθομοναδιαίο (unitary) αν $u^*u = \mathbf{1}$ και $uu^* = \mathbf{1}$.

(π.χ. κάθε $f \in C(K)$ με $f(K) \subseteq \mathbb{T}$)

Αυτοσυζυγείς και θετικοί τελεστές

Κάθε $T \in \mathscr{B}(H)$ γράφεται μοναδικά στην μορφή

$$A = A_1 + iA_2, \quad \text{όπου } A_i = A_i^* \ (i = 1, 2).$$

Γράφω $\mathscr{B}_h(H) = \{T \in \mathscr{B}(H), T = T^*\}$.

Ορισμός

(i) Ένας τελεστής $T \in \mathscr{B}(H)$ λέγεται θετικός (positive) αν $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ για κάθε $x \in H$ (οπότε $T \in \mathscr{B}_h(H)$). Το σύνολο των θετικών τελεστών συμβολίζουμε $\mathscr{B}_+(H)$.
(ii) Αν $T, S \in \mathscr{B}_h(H)$, ορίζουμε $T \geq S$ αν $\langle Tx, x \rangle \geq \langle Sx, x \rangle$ για κάθε $x \in H$, αν δηλαδή $T - S \in \mathscr{B}_+(H)$.

Θετικοί τελεστές

Η διάταξη $\geq$ στον $\mathscr{B}_h(H)$ είναι συμβιβαστή με την γραμμική του δομή, δηλαδή

$$\begin{aligned} A \geq B, S \geq T &\Rightarrow A+S \geq B+T \\ \text{και } \lambda \geq \mu \geq 0\,(\lambda,\mu \in \mathbb{R}) &\Rightarrow \lambda A \geq \mu B. \end{aligned}$$

Δεν είναι όμως αλήθεια ότι αν $A \geq 0$ και $B \geq 0$ τότε $AB \geq 0$.

Επίσης, αν $T_n \geq 0$ και $\|T_n - T\| \to 0$, τότε ο T είναι θετικός.

Αν $A = A^*$ τότε $\; -\|A\|I \leq A \leq \|A\|I$

$$\text{άρα } \; A = (A + \|A\|I) - \|A\|I \quad \text{(διαφορά δυο θετικών)}$$

Παρατήρηση: Κάθε τελεστής A της μορφής $A = B^*B$ είναι θετικός. Θα δούμε αργότερα ότι ισχύει και το αντίστροφο.

Προβολές

M κλειστός υπόχωρος χώρου Hilbert H:

$$H = M \oplus M^{\perp} : \quad x = x_M + x_{M^{\perp}}$$

Η ορθή προβολή επί του M:

$$P_M : H \to H : x \to x_M$$

γραμμική και ταυτοδύναμη ($P^2 = P$) με $\|P\| \leq 1$: δηλ. $P \in \mathscr{B}(H)$.
Επίσης, είναι αυτοσυζυγής ($P = P^*$) μάλιστα θετικός.

Αντίστοφα, αν $Q \in \mathscr{B}(H)$ ικανοποιεί $Q = Q^2 = Q^*$, τότε είναι η ορθή προβολή επί του $\mathrm{im}\, Q$ (και $\ker Q = (\mathrm{im}\, Q)^{\perp}$).

Πρόταση

Έστω H χώρος Hilbert και $P : H \to H$ γραμμική και ταυτοδύναμη απεικόνιση (δηλ. $P^2 = P$). Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(α) *Υπάρχει κλειστός υπόχωρος M του H ώστε $P = P_M$.*

(β) $(\ker P) \perp (\mathrm{im}\, P)$.

(γ) $\|P\| \leq 1$.

Σχόλια στο πρώτο φυλλάδιο ασκήσεων

Δείτε το αρχείο `prtpa.pdf`

Το φάσμα ενός $x \in \mathscr{A}$

Έστω $\mathscr{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα $\mathbf{1}$. Ένα $x \in \mathscr{A}$ λέγεται αντιστρέψιμο (invertible) αν υπάρχει $x^{-1} \in \mathscr{A}$ με $xx^{-1} = x^{-1}x = \mathbf{1}$. Γράφουμε $x \in \mathrm{Inv}(\mathscr{A})$.
Αν T είναι γραμμικός φραγμένος τελεστής σ' έναν χώρο Banach X το σύνολο $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ όχι 1-1}\}$ είναι το σύνολο των ιδιοτιμών του T, ενδεχομένως κενό. Όμως θα δούμε ότι το $\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \mathrm{Inv}(\mathscr{B}(X))\}$ δεν είναι ποτέ κενό.

Ορισμός

Έστω $\mathscr{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα και $x \in \mathscr{A}$. Το φάσμα (spectrum) $\sigma(x)$ του x είναι το σύνολο

$$\sigma(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \mathbf{1} - x \notin \mathrm{Inv}(\mathscr{A})\}.$$

Το φάσμα ενός στοιχείου

Παράδειγμα Αν $f \in C([0,1])$, τότε $\sigma(M_f) = \sigma(f) = f([0,1])$. (Άσκηση!)

Πρόταση

Σε κάθε άλγεβρα Banach $\mathscr{A}$ (με μονάδα), το φάσμα $\sigma(x)$ κάθε $x \in \mathscr{A}$ είναι μη κενό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Μάλιστα, αν $|\lambda| > \|x\|$ τότε $\lambda \notin \sigma(x)$.

Το φάσμα και η φασματική ακτίνα

Έστω $\mathscr{A}$ άλγεβρα Banach (με μονάδα) και $a \in \mathscr{A}$. Η φασματική ακτίνα (spectral radius) $\rho(a)$ είναι η ακτίνα του μικρότερου δίσκου στο $\mathbb{C}$ που περιέχει το $\sigma(a)$. Δηλαδή

$$\rho(a) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Δείξαμε ότι $\rho(a) \leq \|a\|$, αλλά η ανισότητα μπορεί να είναι γνήσια (π.χ. όταν $a \neq 0$ και $a^2 = 0$).

Θεώρημα (Gelfand-Beurling)

Έστω $\mathscr{A}$ άλγεβρα Banach (με μονάδα) και $a \in \mathscr{A}$. Τότε

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} = \lim_n \|a^n\|^{1/n}.$$

Πόρισμα

Αν $\mathscr{A}$ είναι C-άλγεβρα (με μονάδα) και $a \in \mathscr{A}$ φυσιολογικό (δηλ. $a^*a = aa^*$) τότε $\rho(a) = \|a\|$.*

Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις

Σταθεροποιούμε έναν $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Αν p πολυώνυμο, $p(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k$ $(c_k \in \mathbb{C})$, θέτουμε $p(A) = \sum_{k=0}^{n} c_k A^k$ (όπου $A^0 = I$).
Στόχος: να ορίσουμε τελεστές της μορφής $f(A)$ για άλλες κλάσεις συναρτήσεων f.

Γενικότερα, έστω $\mathscr{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathscr{A}$.
Ορίζουμε πάλι $p(a) = \sum_{k=0}^{n} c_k a^k$,

Πρτρ. Η απεικόνιση $\Phi_\pi : p \to p(a)$ διατηρεί $+$ και $\cdot$.

Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις

Θεώρημα

Έστω $\mathscr{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα. Αν $a \in \mathscr{A}$ και $a = a^*$ τότε, για κάθε πολυώνυμο p,

$$\|p(a)\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(a)\} := \|p\|_{\sigma(a)}.$$

Χρειάζονται τα

Πρόταση (Λήμμα Φασματικής Απεικόνισης)

Έστω $\mathscr{A}$ άλγεβρα με μονάδα. Αν $a \in \mathscr{A}$ και p είναι πολυώνυμο, τότε

$$\sigma(p(a)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Πρόταση

Έστω $\mathscr{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathscr{A}$.

$$a = a^* \implies \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}.$$

Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις

Έστω $\mathscr{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα.

Θεώρημα (Συναρτησιακός λογισμός (functional calculus))

*Αν $a = a^* \in \mathscr{A}$, η απεικόνιση $p \to p(a)$ (όπου p πολυώνυμο) επεκτείνεται μοναδικά σε ισομετρικό *-μορφισμός*

$$\Phi_c : (C(\sigma(a)), \|\cdot\|_{\sigma(a)}) \to (\mathscr{A}, \|\cdot\|) : f \to f(a)$$

Επομένως ισχύει $\Phi_c(p) = p(a)$ για κάθε πολυώνυμο p.

Ορισμός

Έστω $a = a^* \in \mathscr{A}$. Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις (continuous functional calculus) είναι η απεικόνιση $\Phi_c : C(\sigma(a)) \to \mathscr{A}$. Γράφουμε $f(a)$ αντί για $\Phi_c(f)$.

Δηλαδή αν η f είναι συνεχής στο $\sigma(a)$, το στοιχείο $f(a)$ της $\mathscr{A}$ ορίζεται μοναδικά από το όριο

$$f(a) = \lim p_n(a) \text{ όπου } (p_n) \text{ πολυώνυμα με } \|p_n - f\|_{\sigma(a)} \to 0.$$

Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις

Πόρισμα

Έστω $\mathscr{A}$ *μια* C^* *άλγεβρα με μονάδα και* $a = a^* \in \mathscr{A}$. *Το σύνολο*

$$C^*(\mathbf{1}, a) := \{f(a) : f \in C(\sigma(a))\}$$

είναι μεταθετική C^* *άλγεβρα με μονάδα. Είναι η μικρότερη κλειστή υπάλγεβρα της* $\mathscr{A}$ *που περιέχει την μονάδα και το* a. *Κάθε στοιχείο της είναι όριο πολυωνύμων του* a.

Πρόταση

Έστω $\mathscr{A}$ *μια* C^* *άλγεβρα με μονάδα* $a = a^* \in \mathscr{A}$. *Για κάθε* $f \in C(\sigma(a))$ *ισχύει*

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Ανεξαρτησία του φάσματος σε C* άλγεβρες

Έστω $\mathscr{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ κλειστή υπάλγεβρα με $\mathbf{1} \in \mathscr{B}$. Έστω $b \in \mathscr{B}$. Αν $b \in \mathrm{Inv}(\mathscr{B})$, τότε βέβαια $b \in \mathrm{Inv}(\mathscr{A})$. Συνεπώς $\sigma_{\mathscr{A}}(b) \subseteq \sigma_{\mathscr{B}}(b)$. Ισότητα όμως δεν ισχύει πάντα.

Παράδειγμα

$\mathscr{A} = C(\mathbb{T})$ (όπου $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$) και $\mathscr{B}$ η άλγεβρα του δίσκου, δηλ. το σύνολο των $f \in \mathscr{A}$ για τις οποίες υπάρχει συνεχής επέκταση $\tilde{f} : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$, που είναι ολόμορφη στον ανοικτό δίσκο $\mathbb{D}$. Η $f(z) = z$ ανήκει στην $\mathscr{B}$, αλλά η $\frac{1}{f} \in \mathscr{A}$ δεν ανήκει στην $\mathscr{B}$.

Ανεξαρτησία του φάσματος σε C* άλγεβρες

Παράδειγμα

$\mathscr{A} = \mathscr{B}(H)$ όπου $H = \ell^2(\mathbb{Z})$ και $\mathscr{B}$ η κλειστή υπάλγεβρά της που παράγεται από τον ταυτοτικό τελεστή $\mathbf{1}$ και το αμφίπλευρο shift U (όπου $Ue_n = e_{n+1}, n \in \mathbb{Z}$). Εδώ το U ανήκει προφανώς στην $\mathscr{B}$ και έχει αντίστροφο στην $\mathscr{A}$ (τον τελεστή U^* όπου $U^* e_n = e_{n-1}, n \in \mathbb{Z}$), αλλά ο U^* δεν ανήκει στην $\mathscr{B}$.

Πράγματι, η $\mathscr{B}$ είναι η κλειστή γραμμική θήκη των πολυωνύμων $p(U) = c_0 + c_1 U + \cdots + c_k U^k$. Κάθε $p(U)$ είναι κάτω τριγωνικός τελεστής, συνεπώς το ίδιο ισχύει και για κάθε $B \in \mathscr{B}$. Δεν ισχύει όμως για τον U^*.
Αλλιώς: έχουμε $\langle p(U)e_1, e_0 \rangle = 0$ για κάθε πολυώνυμο p, άρα $\langle Be_1, e_0 \rangle = 0$ για κάθε $B \in \mathscr{B}$. Όμως $\langle U^* e_1, e_0 \rangle = 1$.

Ανεξαρτησία του φάσματος σε C* άλγεβρες

Πρόταση

Έστω $\mathscr{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ μια C^* υπάλγεβρα με $\mathbf{1} \in \mathscr{B}$. Τότε για κάθε $b \in \mathscr{B}$ ισχύει

$$\sigma_{\mathscr{A}}(b) = \sigma_{\mathscr{B}}(b).$$

Ειδικότερα, κάθε C* υπάλγεβρα $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{B}(H)$ που περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή $\mathbf{1}$ είναι "inverse - closed", δηλ. αν $A \in \mathscr{B}$ και ο $A : H \to H$ είναι 1-1 και επί, τότε $A^{-1} \in \mathscr{B}$.

Θετικά στοιχεία

Προσωρινή ορολογία Αν $\mathscr{A}$ είναι μια C* άλγεβρα με μονάδα, ένα $a \in \mathscr{A}$ θα λέγεται positive αν $a = a^*$ και $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$.

Δεν είναι προφανές ότι το άθροισμα δυο positive στοιχείων είναι positive!

Θα δείξουμε ότι ένα στοιχείο της $\mathscr{B}(H)$ είναι positive αν και μόνον αν είναι θετικός τελεστής.

Άσκηση

Έστω $\mathscr{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα και $\pi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(H)$ ένας ισομετρικός *-μορφισμός. Ένα $a \in \mathscr{A}$ είναι positive αν και μόνον αν ο $\pi(a)$ είναι θετικός τελεστής.
Συμπέρασμα: (α) το σύνολο $\mathscr{A}_+$ των positive στοιχείων της $\mathscr{A}_+$ είναι κλειστός κώνος.
(β) $\mathscr{A}_+ = \{b^* b : b \in \mathscr{A}\}$.

Τετραγωνική ρίζα

Πρόταση

Αν $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$ τότε υπάρχει μοναδικός αυτοσυζυγής $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ με $\sigma(B) \subseteq \mathbb{R}^+$ ώστε $B^2 = A$. Γράφουμε $B = A^{1/2}$.

Απόδειξη Η συνάρτηση $f(t) = \sqrt{t}$ είναι καλά ορισμένη (πραγματική) και συνεχής στο $\sigma(A)$. Επομένως αν θέσουμε $B = f(A)$, έχουμε $B = B^*$, $\sigma(B) = f(\sigma(A)) \subseteq \mathbb{R}^+$ και $B^2 = A$. □

Ο B μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον A. Πράγματι, αν ένας $T \in \mathscr{B}(H)$ μετατίθεται με τον A τότε θα μετατίθεται και με κάθε πολυώνυμο του A, άρα και με την $f(A) = B$, που είναι όριο πολυωνύμων του A.

Μοναδικότητα: $\longrightarrow$

Μοναδικότητα της τετραγωνικής ρίζας

Έστω C positive (δηλ. $C = C^*$ και $\sigma(C) \subseteq \mathbb{R}_+$) τελεστής ώστε $C^2 = A$.
Υπάρχουν positive τελεστές D και Z με $D^2 = C$ και $Z^2 = B$.
Σταθεροποιούμε ένα $x \in H$ και θέτουμε $y = (C - B)x$. Τότε

$$\begin{aligned}\|Dy\|^2 + \|Zy\|^2 &= \langle D^2 y, y\rangle + \langle Z^2 y, y\rangle = \langle (B + C)y, y\rangle \\ &= \langle (B + C)(B - C)x, y\rangle \overset{(*)}{=} \langle (B^2 - C^2)x, y\rangle = 0\end{aligned}$$

(*) γιατί $CB = BC$ αφου $CA = AC$ άρα $Cf(A) = f(A)C$.
Επομένως $Dy = 0$ και άρα $Cy = D^2 y = 0$. Όμοια, $By = 0$.
Τότε όμως $(C - B)y = 0$ και συνεπώς

$$\|(C-B)x\|^2 = \langle (C-B)x, (C-B)x\rangle = \langle y, (C-B)x\rangle = \langle (C-B)y, x\rangle = 0.$$

Αφού το x είναι αυθαίρετο, δείξαμε ότι $B = C$. $\square$

Θετικοί τελεστές

Υπενθύμιση Ένας $A \in \mathscr{B}(H)$ λέγεται θετικός αν $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ για κάθε $x \in H$.

Λήμμα

Ένας αυτοσυζυγής τελεστής A στον $\mathscr{H}$ είναι θετικός αν και μόνον αν $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$. (δηλ positive $\equiv$ θετικός!)

Αποδειξη Έστω ότι $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$. Τότε ορίζεται ο $B = A^{1/2}$. Για κάθε $x \in \mathscr{H}$,

$$\langle Ax, x\rangle = \langle B^2x, x\rangle = \langle Bx, Bx\rangle = \|Bx\|^2 \geq 0$$

άρα ο A είναι θετικός.

Αντίστροφα έστω ότι ο A είναι θετικός. Αν $\lambda \in \sigma(A)$, υπάρχει (x_n) στον $\mathscr{H}$ με $\|x_n\| = 1$ και $\|(A - \lambda I)x_n\| \to 0$ (γιατί $A = A^*$). Τότε

$$|\langle Ax_n, x_n\rangle - \lambda| = |\langle (A - \lambda I)x_n, x_n\rangle| \leq \|(A - \lambda I)x_n\|.\|x_n\| \to 0$$

άρα $\lambda \geq 0$ (αφού $\lambda \in \mathbb{R}$).

Σημείωσε ότι η υπόθεση $A = A^*$ δεν μπορεί να παραλειφθεί. Για παράδειγμα, ο $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ έχει μη αρνητικό φάσμα ($\sigma(A) = \{0\}$) αλλά δεν είναι θετικός: $\langle Ax, x \rangle = -1$ για $x = (-1, 1)$.

Συνοψίζουμε:

Θεώρημα (Τετραγωνική ρίζα)

Έστω $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) *Ο T είναι θετικός.*

(β) *Υπάρχει $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ θετικός ώστε $T = B^2$.*

(γ) *Υπάρχει $S \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ ώστε $T = S^* S$.*

(δ) *$T = T^*$ και $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}^+$.*

Σχόλια στο δεύτερο φυλλάδιο ασκήσεων

Δείτε το αρχείο `invtn.pdf`

Η πολική αναπαράσταση

Ορισμός

Έστω $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$ *τυχαίος τελεστής. Υπενθυμίζουμε ότι ο τελεστής* $T^*T : H_1 \to H_1$ *είναι θετικός. Η μοναδική θετική τετραγωνική του ρίζα συμβολίζεται* $|T|$.

Άσκηση

Να βρεθούν δύο 2×2 *πίνακες* A, B *ώστε να μην ισχύει η ανισότητα* $|A + B| \leq |A| + |B|$.

Θεώρημα

Έστω $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$ *τυχαίος τελεστής. Υπάρχει φραγμένος τελεστής* $V : H_1 \to H_2$ *με* $\ker V = \ker T$ *με* $V|_{(\ker V)^\perp}$ *ισομετρία (μερική ισομετρία) ώστε*

$$T = V|T|.$$

«Μοναδικότητα»: Αν $T = W|T|$ *όπου* W *μερική ισομετρία* $\ker W = \ker T$ *τότε* $W = V$.

Το Φασματικό Θεώρημα όταν $\dim H < \infty$

Λήμμα

Έστω $T \in \mathscr{B}(H)$ φυσιολογικός τελεστής. (1) Αν $x \in H$ είναι ιδιοδιάνυσμα του T με ιδιοτιμή λ, τότε $T^*x = \bar{\lambda}x$.
(2) Οι ιδιόχωροι ενός φυσιολογικού τελεστή (αν υπάρχουν) τον ανάγουν, και (3) είναι κάθετοι μεταξύ τους.

Θεώρημα

Κάθε φυσιολογικός τελεστής T σ'έναν (μιγαδικό) χώρο Hilbert H διάστασης $n < \infty$ είναι διαγωνοποιήσιμος, δηλαδή υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{x_k : k = 1, \ldots, n\}$ του H και $a_k \in \mathbb{C}$ ώστε $Tx_k = a_k x_k$ $(k = 1, \ldots, n)$.
Ισοδύναμα, ο T είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος (unitarily equivalent) με έναν διαγώνιο τελεστή, δηλαδή υπάρχει ορθομοναδιαίος τελεστής $U : H \to \ell^2(n)$ ώστε ο UTU^{-1} να είναι διαγώνιος.

Το Φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα

Ένας τελεστής $T \in \mathscr{B}(H)$ είναι φυσιολογικός αν και μόνον αν είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με έναν πολλαπλασιαστικό τελεστή, δηλαδή αν υπάρχουν: χώρος μέτρου (X, μ), ορθομοναδιαίος τελεστής $U : H \to L^2(X, \mu)$ και συνάρτηση $h \in L^\infty(X, \mu)$ ώστε $T = U^{-1} M_h U$:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "T"] \arrow[d, "U"] & H \arrow[d, "U"] \\ L^2(\mu) \arrow[r, "M_h"] & L^2(\mu) \end{tikzcd}$$

P.R. Halmos [1963]. What does the spectral theorem say? Amer. Math. Monthly 70.

Το Φασματικό Θεώρημα: Σχόλια

Η απεικόνιση $T \to M_f$ είναι το αντίστοιχο της διαγωνοποίησης $T \to \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ που επιτυγχάνεται σε χώρους πεπερασμένης διάστασης.

Μπορεί κανείς να επιτύχει «ταυτόχρονη διαγωνοποίηση» όλης της C*-υπάλγεβρας του $\mathscr{B}(H)$ που παράγει ο T: σε κάθε $g \in C(\sigma(T))$ αντιστοιχεί ένας πολλαπλασιαστικός τελεστής $M_{g \circ h} \in \mathscr{B}(L^2(X, \mu))$.

Πρόκειται λοιπόν για μια 1-1 αναπαράσταση της C* άλγεβρας $C(\sigma(T))$ στον χώρο $L^2(X, \mu)$.

Υπενθύμιση: Ο συναρτησιακός λογισμός

Ορισμός

Έστω $A \in \mathscr{B}(H)$ αυτοσυζυγής τελεστής.
Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις είναι η μοναδική συνεχής επέκταση

$$\Phi_c : (C(\sigma(A)), \|\cdot\|_{\sigma(A)}) \to (\mathscr{B}(H), \|\cdot\|) : f \to f(A)$$

της απεικόνισης $\Phi_o : p \to p(A)$.

Είναι ισομετρικός *-μορφισμός, δηλ. μια ισομετρική *-αναπαράσταση της C* άλγεβρας $C(\sigma(A)$ στον χώρο H.
Η εικόνα του είναι η $C^*(\mathbf{1}, A)$, η μικρότερη C*-υπάλγεβρα του $\mathscr{B}(H)$ που περιέχει τον A και τον ταυτοτικό τελεστή $\mathbf{1}$.

Για κάθε $f \in C(\sigma(A))$,

$$f(A) = \Phi_c(f) = \|\cdot\|\text{-}\lim p_n(A)$$

όπου p_n πολυώνυμα με $\|p_n - f\|_{\sigma(A)} \to 0$.

Το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz

Αν μ θετικό μέτρο Borel σε συμπαγή (μετρικό) χώρο Σ τότε η απεικόνιση

$$\phi_\mu : C(\Sigma) \to \mathbb{C} : f \to \int f(t) d\mu(t)$$

είναι (συνεχής) γραμμική μορφή, και είναι θετική, δηλ. $f \geq 0 \Rightarrow \phi_\mu(f) \geq 0$.

Αντίστροφα:

Θεώρημα (Riesz)

Για κάθε θετική γραμμική $\phi : C(\Sigma) \to \mathbb{C}$ υπάρχει (μοναδικό) θετικό κανονικό μέτρο Borel μ στο Σ ώστε $\phi = \phi_\mu$.

Αναπαραστάσεις της C* άλγεβρας $C(\Sigma)$

Έστω Σ συμπαγής (μετρικός) χώρος και $\pi : C(\Sigma) \to \mathscr{B}(H)$ μια 1-1 (άρα ισομετρική) *-αναπαράσταση της C* άλγεβρας $C(\Sigma)$ στον χώρο Hilbert H.

Λήμμα

Για κάθε μη μηδενικό $x \in H$ υπάρχει θετικό κανονικό (πεπερασμένο) μέτρο Borel μ_x στο Σ και ισομετρία $U_x : L^2(\Sigma, \mu_x) \to H$ ώστε $U_x M_f = \pi(f) U_x$ για κάθε $f \in C(\Sigma)$.

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\pi(f)} & H \\ {\scriptstyle U_x}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle U_x} \\ L^2(\mu_x) & \xrightarrow[M_f]{} & L^2(\mu_x) \end{array}$$

Το φασματικό θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές

Έστω $A \in \mathscr{B}(H)$ αυτοσυζυγής τελεστής και $\Sigma = \sigma(A)$.

Λήμμα

Για κάθε μη μηδενικό $x \in H$ υπάρχει θετικό κανονικό (πεπερασμένο) μέτρο Borel μ_x στο Σ και ισομετρία $U_x : L^2(\Sigma, \mu_x) \to H$ ώστε $U_x M_f = f(A) U_x$ για κάθε $f \in C(\Sigma)$.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f(A)"] & H \\ L^2(\mu_x) \arrow[u, "U_x"] \arrow[r, "M_f"'] & L^2(\mu_x) \arrow[u, "U_x"'] \end{tikzcd}$$

... άρα $U_x M_h = A U_x$, όπου $h(\lambda) = \lambda$.

Λήμμα

Για κάθε μη μηδενικό $x \in H$ υπάρχει θετικό κανονικό (πεπερασμένο) μέτρο Borel μ_x στο Σ και ισομετρία $U_x : L^2(\Sigma, \mu_x) \to H$ ώστε $U_x M_f = \pi(f) U_x$ για κάθε $f \in C(\Sigma)$.

Σχέδιο Απόδειξης Σταθεροποιούμε ένα μη μηδενικό $x \in H$ και θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση

$$\phi_x : C(\Sigma) \to \mathbb{C} : f \to \langle \pi(f)x, x \rangle.$$

Παρατηρούμε ότι η ϕ_x είναι *θετική* γραμμική μορφή, δηλαδή $\phi_x(f) \geq 0$ για κάθε $f \geq 0$. Από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz υπάρχει (μοναδικό) θετικό πεπερασμένο κανονικό μέτρο Borel μ_x στο Σ ώστε

$$\int f d\mu_x = \phi_x(f) = \langle \pi(f)x, x \rangle \quad \text{για κάθε } f \in C(\Sigma).$$

Αναπαραστάσεις της C* άλγεβρας $C(\Sigma)$

Όμως $C(\Sigma) \subseteq L^2(\Sigma, \mu_x)$. Ορίζουμε

$$U_{ox} : (C(\Sigma), \|\cdot\|_{L^2(\mu_x)}) \to (H, \|\cdot\|_H) : f \to \pi(f)x$$

Ισχυρίζομαι ότι είναι ισομετρία. Πράγματι, για κάθε $f \in C(\Sigma)$,

$$\begin{aligned}\|\pi(f)x\|_H^2 &= \langle \pi(f)x, \pi(f)x\rangle = \langle \pi(f)^*\pi(f)x, x\rangle = \langle \pi(\bar{f}f)x, x\rangle \\ &= \int \bar{f} f d\mu_x = \|f\|_2^2\end{aligned}$$

Άρα επεκτείνεται σε μια ισομετρία

$$U_x : L^2(\Sigma, \mu_x) \to H$$

που ικανοποιεί $U_x(f) = \pi(f)x$ όταν η f είναι συνεχής.

Τέλος, για κάθε $g \in C(\Sigma)$ έχουμε

$$(U_x M_f)(g) = U_x(fg) = \pi(fg)x = \pi(f)(\pi(g)x) = (\pi(f)U_x)(g).$$

... άρα $U_x M_f = \pi(f)U_x$.

Αναπαραστάσεις της C* άλγεβρας $C(\Sigma)$

Το σύνολο τιμών $\mathrm{im}(U_x)$ της ισομετρίας U_x του Λήμματος είναι ακριβώς ο κυκλικός υπόχωρος

$$H_x = \overline{\{\pi(f)x : f \in C(\Sigma)\}}$$

του x για την π.

Ορισμός

Ένα διάνυσμα $x \in H$ λέγεται κυκλικό (cyclic) για την αναπαράσταση $\pi : C(\Sigma) \to \mathscr{B}(H)$ αν ο κυκλικός υπόχωρος (cyclic subspace) που ορίζει είναι όλος ο H, ισοδύναμα αν ο γραμμικός χώρος $\{\pi(f)x : f \in C(\Sigma)\}$ είναι πυκνός στον H.

Πρόταση

Αν μια αναπαράσταση $\pi : C(\Sigma) \to \mathscr{B}(H)$ έχει κυκλικό διάνυσμα, υπάρχει (πεπερασμένο) θετικό κανονικό μέτρο Borel μ στο Σ ώστε όλοι οι τελεστές $\pi(f), f \in C(\Sigma)$ να είναι ταυτοχρόνως ορθομοναδιαία ισοδύναμοι με τούς τελεστές M_f στον $L^2(\Sigma, \mu)$: δηλ. $\exists U : \pi(f) = UM_f U^* \ \forall f \in C(\Sigma)$.

Αναπαραστάσεις της C* άλγεβρας $C(\Sigma)$

Παράδειγμα

Έστω $H = L^2([0,1]) \oplus L^2([0,1])$ [1] και έστω
$\pi : C([0,1]) \to \mathscr{B}(H) : f \to M_f \oplus M_f$.
Τότε η π είναι ισομετρική αναπαράσταση χωρίς κυκλικό διάνυσμα.

Λήμμα

Αν $\pi : C(\Sigma) \to \mathscr{B}(H)$ είναι αναπαράσταση, υπάρχει μια οικογένεια $\{H_i : i \in I\}$
από κάθετους ανά δύο υποχώρους του H, ώστε

(ι) *κάθε H_i να είναι π-αναλλοίωτος, δηλ. $\pi(f)(H_i) \subseteq H_i \; \forall f$*

(ιι) *κάθε H_i να είναι π-κυκλικός, δηλ. να περιέχει π-κυκλικό διάνυσμα*

(ιιι) *το ευθύ άθροισμα $\oplus_i H_i$ (δηλαδή ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του H που περιέχει κάθε H_i) να είναι όλος ο H.*

---

[1] με το εσωτερικό γινόμενο $\langle f_1 \oplus g_1, f_2 \oplus g_2 \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle + \langle g_1, g_2 \rangle$

Το φασματικό θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές

Πρόταση

Αν ένας αυτοσυζυγής τελεστής $A \in \mathscr{B}(H)$ έχει κυκλικό διάνυσμα, υπάρχει (πεπερασμένο) θετικό κανονικό μέτρο Borel μ στο $\sigma(A)$ ώστε ο A να είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με τον τελεστή M_h στον $L^2(\sigma(A), \mu)$ του πολλαπλασιασμού επί την ανεξάρτητη μεταβλητή, $(M_h(g))(x) = xg(x)$.

Παράδειγμα

Έστω $H = L^2([0,1]) \oplus L^2([0,1])$ και έστω $A = M_f \oplus M_f$ όπου $f(\lambda) = \lambda$ $(\lambda \in [0,1])$. Τότε ο A είναι αυτοσυζυγής τελεστής χωρίς κυκλικό διάνυσμα.

Το φασματικό θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές

Λήμμα

Αν $A \in \mathscr{B}(H)$ είναι αυτοσυζυγής, υπάρχει μια οικογένεια $\{H_i : i \in I\}$ από κάθετους ανά δύο υποχώρους του H, ώστε

(ι) *κάθε H_i να είναι A-αναλλοίωτος, δηλ. $A(H_i) \subseteq H_i$*

(ιι) *κάθε H_i να είναι A-κυκλικός, δηλ. να περιέχει ένα A-κυκλικό διάνυσμα*

(ιιι) *το ευθύ άθροισμα $\oplus_i H_i$ (δηλαδή ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του H που περιέχει κάθε H_i) να είναι όλος ο H.*

Από την προηγούμενη Πρόταση, για κάθε i υπάρχει θετικό κανονικό μέτρο Borel μ_i στο $\sigma(A)$ και επί ισομετρία $U_i : L^2(\sigma(A), \mu_i) \to H_i$ ώστε $U_i^* A|_{H_i} U_i = M_{f_i}$ όπου $f_i(\lambda) = \lambda$.

Το φασματικό θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές

Θεώρημα (Φασματικό Θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές)

Έστω $A \in \mathscr{B}(H)$ αυτοσυζυγής τελεστής. Υπάρχει χώρος μέτρου (X, μ), συνάρτηση $f \in L^\infty(X, \mu)$ και ορθομοναδιαίος τελεστής $U : L^2(X, \mu) \to H$ ώστε $A = UM_f U^{-1}$.

Μάλιστα όταν ο χώρος H είναι διαχωρίσιμος, μπορεί να επιλέξει κανείς $X = \mathbb{R}$ και μ ένα σ-πεπερασμένο μέτρο Borel.

Το φασματικό θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές

Θεώρημα (Φασματικό Θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές)

Έστω $A \in \mathscr{B}(H)$ αυτοσυζυγής τελεστής. Υπάρχει χώρος μέτρου (X,μ), συνάρτηση $f \in L^\infty(X,\mu)$ και ορθομοναδιαίος τελεστής $U : L^2(X,\mu) \to H$ ώστε $A = UM_f U^{-1}$.

Σχέδιο Απόδειξης Για κάθε i, υπάρχει επί ισομετρία $U_i : L^2(X_i,\mu_i) \to H_i$ (όπου $X_i = \sigma(A)$) ώστε $U_i^* A|_{H_i} U_i = M_{f_i}$ όπου η $f_i : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, άρα ανήκει στον $L^\infty(X_i,\mu_i)$. Μάλιστα $f_i(t) \in \sigma(A)$ για κάθε $t \in X_i$.
Ορίζουμε (X,μ) την «ξένη ένωση» των χώρων μέτρου (X_i,μ_i).
Τότε ο $L^2(X,\mu)$ ταυτίζεται (μέσω ισομετρικού ισομορφισμού) με το ευθύ άθροισμα $\sum_i \oplus_i L^2(X_i,\mu_i)$.
Ορίζουμε τον τελεστή $U = \sum_i \oplus_i U_i : L^2(X,\mu) \to H$ και τη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ από τη σχέση $f|_{X_i} = f_i$ για κάθε i και έχουμε $UM_f = AU$.

Το φασματικό θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{H} = \vee \mathscr{H}_i \arrow[r, "A"] & \mathscr{H} = \vee \mathscr{H}_i \\
\oplus L^2(X_i, \mu_i) \arrow[r, "\oplus M_{f_i}"] \arrow[u, "\oplus U_i"] & \oplus L^2(X_i, \mu_i) \arrow[u, "\oplus U_i"'] \\
L^2(X, \mu) \arrow[r, "M_f"] \arrow[u, "V"] & L^2(X, \mu) \arrow[u, "V"']
\end{tikzcd}
$$

Συναρτήσεις Borel αυτοσυζυγούς τελεστή

Έστω $A \in \mathscr{B}(H)$ αυτοσυζυγής τελεστής, $D_A := [-\|A\|, \|A\|] \subseteq \mathbb{R}$. Για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση $g : D_A \to \mathbb{C}$ ορίζεται ένας φυσιολογικός τελεστής $g(A) \in \mathscr{B}(H)$.

Η απεικόνιση $g \to g(A)$ διατηρεί άθροισμα γινόμενο και ενέλιξη, επεκτείνει τον συναρτησιακό λογισμό για πολυώνυμα, και ικανοποιεί

$$\|g(A)\| \leq \sup\{|g(t)| : t \in D_A\}.$$

Δείτε και το αρχείο borelfuncalsa.pdf

Θεώρημα (Φασματικό Θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές)

Έστω $A \in \mathscr{B}(H)$ αυτοσυζυγής τελεστής. Υπάρχει χώρος μέτρου (X, μ), συνάρτηση $h \in L^\infty(X, \mu)$ με $h(x) \in \sigma(A)$ μ-σχεδόν για κάθε $x \in X$ και ορθομοναδιαίος τελεστής $U : L^2(X, \mu) \to H$ ώστε $A = UM_h U^{-1}$.

Παρατήρηση

Για κάθε $f \in C(\sigma(A)$, ισχύει η σχέση $f(A) = UM_{f \circ h} U^{-1}$.

Συναρτήσεις Borel αυτοσυζυγούς τελεστή

Ονομάζουμε $\mathscr{L}^\infty(D_A)$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων $g : D_A \to \mathbb{C}$ που είναι φραγμένες και Borel μετρήσιμες.

Ορισμός

Για κάθε $g \in \mathscr{L}^\infty(D_A)$ ορίζουμε τον τελεστή

$$g(A) := UM_{g\circ h}U^{-1} \in \mathscr{B}(H).$$

Ο συναρτησιακός λογισμός για συναρτήσεις Borel (the Borel functional calculus) είναι η απεικόνιση

$$\Phi_b : g \to g(A) := UM_{g\circ h}U^{-1} : \mathscr{L}^\infty(D_A) \to \mathscr{B}(H).$$

Συναρτήσεις Borel αυτοσυζυγούς τελεστή

Θεώρημα

*Η απεικόνιση $\Phi_b : \mathscr{L}^\infty(D_A) \to \mathscr{B}(H) : g \to g(A)$ είναι μορφισμός *-αλγεβρών που επεκτείνει τον συναρτησιακό λογισμό Φ_c για συνεχείς συναρτήσεις, και ικανοποιεί*

$$\|g(A)\| \leq \sup\{|g(z)| : z \in D_A\}.$$

Πρόταση

Έστω $g_n, g \in \mathscr{L}^\infty(D_A)$. Αν $\lim_n g_n = g$ κατά σημείο στο D_A και $\sup_n \|g_n\|_\infty < \infty$, τότε η ακολουθία τελεστών $(g_n(A))$ ικανοποιεί

$$\lim_n \langle g_n(A)x, y\rangle = \langle g(A)x, y\rangle \ \forall x, y \in H.$$

(Λέμε ότι $g_n(A) \to g(A)$ ως προς την wot (Weak Operator Topology - ορισμός αργότερα).)

Συναρτήσεις Borel αυτοσυζυγούς τελεστή

Ορισμός (Φασματικές προβολές του A)

Για κάθε Borel υποσύνολο $\Omega \subseteq D_A$ ονομάζουμε $E_A(\Omega) \in \mathscr{B}(H)$ τον τελεστή

$$E_A(\Omega) := \chi_\Omega(A).$$

Πρόταση

Η οικογένεια $\{E_A(\Omega) : \Omega \subseteq D_A \text{ Borel}\} \subseteq \mathscr{B}(H)$ ικανοποιεί

1. $E_A(\Omega)^* = E_A(\Omega)$
2. $E_A(\Omega_1)E_A(\Omega_2) = E_A(\Omega_1 \cap \Omega_2)$. *Άρα οι $E_A(\Omega)$ είναι προβολές.*
3. $E_A(\emptyset) = 0, E_A(\sigma(A)) = I$.
4. *Για κάθε $x \in H$, η απεικόνιση $\mu_x : \Omega \to \langle E_A(\Omega)x, x\rangle$ είναι θετικό μέτρο Borel.*

Πόρισμα

Αν $\Omega_n, n \in \mathbb{N}$ είναι ξένα ανά δύο σύνολα Borel, τότε

$$\lim_n \left\| \sum_{k=1}^{n} E_A(\Omega_k)x - E_A(\cup_n \Omega_n)x \right\|_H = 0 \quad \text{για κάθε } x \in H.$$

Συναρτήσεις Borel αυτοσυζυγούς τελεστή

Πρόταση

Κάθε αυτοσυζυγής τελεστής $A \in \mathscr{B}(H)$ ανήκει στην $\|\cdot\|$-κλειστή γραμμική θήκη των φασματικών προβολών του. Συγκεκριμένα, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση $D_A = \bigcup_{k=1}^{n} \Omega_k$ του D_A σε ξένα ανά δυο διαστήματα ώστε

$$\left\| A - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_A(\Omega_k) \right\|_{\mathscr{B}(H)} < \varepsilon$$

για κάθε επιλογή σημείων $\lambda_k \in \Omega_k$, $k = 1, \ldots, n$. Γράφουμε

$$A = \int \lambda \, dE_A(\lambda).$$

Παρατήρηση

Αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο ότι, αν f είναι συνεχής στο D_A τότε $f(A) = \int f(\lambda) dE_A(\lambda)$.

Πρόταση

Έστω $A \in \mathscr{B}(H)$ αυτοσυζυγής τελεστής. Ένας $B \in \mathscr{B}(H)$ μετατίθεται με τον A αν και μόνον αν ο B μετατίθεται με κάθε φασματική προβολή $E_A(\Omega)$, $\Omega \subseteq D_A$ Borel.

Σημείωση Ο συναρτησιακός λογισμός Φ_b ορίζεται και όταν ο τελεστής A είναι φυσιολογικός. Η κατασκευή είναι ανάλογη, και στηρίζεται στο Φασματικό Θεώρημα για φυσιολογικούς τελεστές (που δεν έχουμε αποδείξει εδώ).

Ορισμός

Έστω H χώρος Hilbert. Η ισχυρή τοπολογία τελεστών (strong operator topology, sot) στον $\mathscr{B}(H)$ είναι η τοπολογία της σύγκλισης κατά σημείο στον H. Δηλαδή ένα δίκτυο (T_i) από φραγμένους τελεστές συγκλίνει στον φραγμένο τελεστή T ως προς την sot αν και μόνον αν $\|T_i x - Tx\| \to 0$ για κάθε $x \in H$.

Η sot είναι η ασθένεστερη τοπολογία στον $\mathscr{B}(H)$ για την οποία όλες οι ημινόρμες $\{p_x, x \in H\}$ (όπου $p_x(T) = \|Tx\|$) είναι συνεχείς.
Είναι η τοπολογία στον $\mathscr{B}(H)$ που παράγεται από (έχει υποβάση) τα σύνολα $\{V(A,x) : A \in \mathscr{B}(H), x \in H\}$, όπου $V(A,x) := \{T \in \mathscr{B}(H) : \|Tx - Ax\| < 1\}$.

Παρατήρηση Η sot δεν είναι μετρικοποιήσιμη, όταν $\dim H = \infty$. Για παράδειγμα, αν $\mathscr{E} = \{\sqrt{n}P_n :\in \mathbb{N}\}$ όπου οι P_n είναι κάθετες ανά δύο μονοδιάστατες προβολές, ο $0 \in \mathscr{B}(H)$ ανήκει στην sot-κλειστή θήκη του $\mathscr{E}$, αλλά δεν είναι sot-όριο ακολουθίας από το $\mathscr{E}$.

Τοπολογίες στον $\mathscr{B}(H)$: sot

Έστω H απειροδιάστατος χώρος Hilbert.

(i) Ο πολλαπλασιασμός

$$(\mathscr{B}(H), \mathrm{sot}) \times (\mathscr{B}(H), \mathrm{sot}) \longrightarrow (\mathscr{B}(H), \mathrm{sot}) : (A, B) \longrightarrow AB$$

δεν είναι συνεχής.

(ii) Όμως, για κάθε $r > 0$, ο περιορισμός

$$(\mathscr{B}(H)_r, \mathrm{sot}) \times (\mathscr{B}(H), \mathrm{sot}) \longrightarrow (\mathscr{B}(H), \mathrm{sot}) : (A, B) \longrightarrow AB$$

(όπου $\mathscr{B}(H)_r = \{T \in \mathscr{B}(H) : \|T\| \leq r\}$) είναι συνεχής.

(iii) Ο πολλαπλασιασμός είναι *ακολουθιακά συνεχής*, δηλαδή αν $A_n \xrightarrow{\mathrm{sot}} A$ και $B_n \xrightarrow{\mathrm{sot}} B$ τότε $A_n B_n \xrightarrow{\mathrm{sot}} AB$.

(iv) Ο πολλαπλασιασμός είναι *χωριστά συνεχής*, δηλαδή για κάθε $A \in \mathscr{B}(H)$ οι απεικονίσεις

$$\begin{aligned} & L_A : (\mathscr{B}(H), \mathrm{sot}) \longrightarrow (\mathscr{B}(H), \mathrm{sot}) : B \longrightarrow AB \\ \text{και} \qquad & R_A : (\mathscr{B}(H), \mathrm{sot}) \longrightarrow (\mathscr{B}(H), \mathrm{sot}) : B \longrightarrow BA \end{aligned}$$

είναι συνεχείς.

(v) Η ενέλιξη

$$(\mathscr{B}(H), \mathrm{sot}) \longrightarrow (\mathscr{B}(H), \mathrm{sot}) : A \longrightarrow A^*$$

δεν είναι (ούτε ακολουθιακά) συνεχής.

Τοπολογίες στον $\mathscr{B}(H)$: wot

Αν $x, y \in H$, θέτουμε

$$\omega_{x,y} : \mathscr{B}(H) \to \mathbb{C} : T \to \langle Tx, y \rangle.$$

Η $\omega_{x,y}$ είναι $\|\cdot\|$-συνεχής στον $\mathscr{B}(H)$ και $\|\omega_{x,y}\| = \|x\|\|y\|$.

Ορισμός

Έστω H χώρος Hilbert. Η ασθενής τοπολογία τελεστών (weak operator topology, wot) στον $\mathscr{B}(H)$ είναι η ασθενέστερη τοπολογία ως προς την οποία όλες οι γραμμικές μορφές $\omega_{x,y}$ $(x, y \in H)$ είναι συνεχείς.

Δηλαδή ένα δίκτυο (T_i) από φραγμένους τελεστές συγκλίνει στον φραγμένο τελεστή T ως προς την wot αν και μόνον αν $\langle T_i x - Tx, y \rangle \to 0$ για κάθε $x, y \in H$.

Τοπολογίες στον $\mathscr{B}(H)$: wot

Πρόταση

(i) Η ενέλιξη είναι wot-wot *συνεχής στον $\mathscr{B}(H)$.*
(ii) Ο πολλαπλασιασμός είναι χωριστά wot-wot *συνεχής.*
(iii) Ο πολλαπλασιασμός

$$(\mathscr{B}(H), \mathrm{wot}) \times (\mathscr{B}(H), \mathrm{wot}) \longrightarrow (\mathscr{B}(H), \mathrm{wot}) : (A, B) \longrightarrow AB$$

δεν είναι συνεχής, ούτε καν ακολουθιακά (άρα ούτε περιορισμένος σε φραγμένα σύνολα).

Οι τοπολογίες διαφέρουν όταν $\dim H = \infty$.

Παραδείγματα:Αν $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική ακολουθία, θεωρώ $T_n \in \mathscr{B}(H)$ με $T_n(x_k) = x_{k+n}$. Τότε
$T_n^* \stackrel{\mathrm{sot}}{\to} 0$ αλλά $\|T_n^*\| = 1$ για κάθε n, άρα $T_n^* \stackrel{\|\cdot\|}{\not\to} 0$.
$T_n \stackrel{\mathrm{wot}}{\not\to} 0$ αλλά $\|T_n e_1\| = 1$ για κάθε n, άρα $T_n \stackrel{\mathrm{sot}}{\not\to} 0$. .

Τοπολογίες στον $\mathscr{B}(H)$: wot

Πρόταση

Ένα κυρτό υποσύνολο (ειδικότερα, ένας γραμμικός υπόχωρος) $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{B}(H)$ είναι sot-κλειστός αν και μόνον αν είναι wot-κλειστός.

Υπενθύμιση (Διαχωριστικό Θεώρημα Hahn - Banach)

Αν E χώρος με νόρμα, $K \subseteq E$ κυρτό, κλειστό και $x \notin K$, υπάρχει (κλειστό $\mathbb{R}$-υπερεπίπεδο που τα διαχωρίζει, δηλαδή) $\phi : E \to \mathbb{R}$ συνεχής και $\mathbb{R}$-γραμμική και $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\phi(x) > \lambda \geq \phi(y) \ \forall y \in K\,.$$

(Αν ο E είναι χώρος Hilbert, είναι εύκολη συνέπεια της ύπαρξης πλησιέστερου διανύσματος.)

Πρόταση

Μία γραμμική μορφή $\omega : \mathscr{B}(H) \to \mathbb{C}$ είναι wot-συνεχής αν και μόνον αν είναι sot-συνεχής, αν και μόνον αν $\omega \in \mathrm{span}\{\omega_{x,y} : x, y \in H\}$.

Ο $\mathscr{B}(H)$ ως δυϊκός χώρος Banach

Υπενθύμιση Ο $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον δυϊκό του $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ μέσω της απεικόνισης $a \to \phi_a : \ell^\infty \to (\ell^1)^*$ όπου

$$\phi_a(b) := \sum a(n)b(n), \;\; a \in \ell^\infty, b \in \ell^1) \;\; (\text{ή } \phi_a(e_n) := a(n)).$$

Συμβολισμός: $\mathscr{B}_\sim(H) = \mathrm{span}\{\omega_{x,y} : x, y \in H\}$ είναι ο χώρος των wot-συνεχών γραμμικών μορφών, με
$\|\omega\| = \sup\{|\omega(T)| : T \in \mathscr{B}(H), \|T\| \leq 1\})$.

Πρόταση

Ο χώρος $\mathscr{B}(H)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον δυϊκό του χώρου $(\mathscr{B}_\sim(H), \|\cdot\|)$ μέσω της απεικόνισης

$$A \to \phi_A, \quad \text{όπου} \quad \phi_A(\omega) = \omega(A), (A \in \mathscr{B}(H), \;\omega \in \mathscr{B}_\sim(H)).$$

Επομένως ο $\mathscr{B}(H)$ εφοδιάζεται με μια ασθενή-* τοπολογία, που είναι ισχυρότερη από την wot (γνησίως, αν-ν $\dim H = \infty$).
Θα επανέλθουμε στο θέμα.

wot-συμπάγεια της $\mathrm{ball}(\mathscr{B}(H))$

Πρόταση

Η μοναδιαία μπάλα $\mathrm{ball}(\mathscr{B}(H))$ *είναι* wot-*συμπαγής.*

(Συνέπεια του Θεωρήματος Τίχονοφ)
Δείτε και το `wot.pdf`

Ορισμός

Αν H είναι χώρος Hilbert και $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{B}(H)$, ορίζω τον μεταθέτη (commutant) $\mathscr{S}'$ του $\mathscr{S}$ ως εξής

$$\mathscr{S}' = \{T \in \mathscr{B}(H) : TS = ST \ \ \text{για κάθε } S \in \mathscr{S}\}.$$

Το $\mathscr{S}'$ είναι πάντα άλγεβρα και περιέχει τον I_H. Επίσης, είναι wot-κλειστή. Η $\mathscr{S}'$ είναι *-άλγεβρα αν-ν το είναι αυτοσυζυγές σύνολο, οπότε είναι C* άλγεβρα, αφού είναι norm-κλειστή.

Άλγεβρες von Neumann

Ορισμός

Έστω (X,μ) χώρος μέτρου. Η πολλαπλασιαστική άλγεβρα $\mathscr{M}_\mu$ του (X,μ) είναι η

$$\mathscr{M}_\mu = \{M_f : f \in L^\infty(X,\mu)\}.$$

Η $\mathscr{M}_\mu$ είναι αβελιανή C^*-υπάλγεβρα της $\mathscr{B}(L^2(X,\mu))$.

Πρόταση

Αν ο (X,μ) είναι σ-πεπερασμένος, τότε $(\mathscr{M}_\mu)' = \mathscr{M}_\mu$. Ισοδύναμα, η $\mathscr{M}_\mu$ είναι μεγιστική αβελιανή αυτοσυζυγής υπάλγεβρα (maximal abelian selfadjoint algebra - masa) του $\mathscr{B}(L^2(X,\mu))$.

Παράδειγμα

Αν $H = L^2([0,1],m)$ (m: μέτρο Lebesgue) και $\mathscr{M}_0 = \{M_f : f \in C([0,1])\} \subseteq \mathscr{B}(L^2([0,1],m))$, τότε $\mathscr{M}_0' = \mathscr{M}_m$.

Απόδειξη στο `masa.pdf`.

Ορισμός

Έστω H χώρος Hilbert. Μία άλγεβρα von Neumann $\mathscr{M}$ στον H είναι ένα αυτοσυζυγές υποσύνολο του $\mathscr{B}(H)$ που ικανοποιεί

$$\mathscr{M} = \mathscr{M}''.$$

Παρατηρήσεις

(i) Κάθε άλγεβρα von Neumann είναι C^*-άλγεβρα με μονάδα. Επιπλέον όμως είναι wot-κλειστή.

(ii) Αν $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{B}(H)$, τότε το σύνολο $(\mathscr{S} \cup \mathscr{S}^*)''$ είναι η μικρότερη άλγεβρα von Neumann που περιέχει το $\mathscr{S}$, και ονομάζεται η άλγεβρα von Neumann που παράγεται από το $\mathscr{S}$.

(iii) Κάθε άλγεβρα von Neumann $\mathscr{M}$ στον H είναι της μορφής $\mathscr{S}'$ για κάποιο αυτοσυζυγές σύνολο $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{B}(H)$ (π.χ. $\mathscr{S} = \mathscr{M}'$).

(iv) Κάθε άλγεβρα von Neumann $\mathscr{M}$ στον H είναι της μορφής $\mathscr{U}'$ για κάποιο σύνολο $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{B}(H)$ unitary τελεστών (Άσκηση).

Θεώρημα του δεύτερου μεταθέτη (Bicommutant Theorem)

Θεώρημα (von Neumann)

Έστω $\mathscr{A}$ μία αυτοσυζυγής υπάλγεβρα του $\mathscr{B}(H)$ που περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή. Τότε

$$\mathscr{A}'' = \overline{\mathscr{A}}^{\text{sot}} = \overline{\mathscr{A}}^{\text{wot}}.$$

Ειδικότερα, η $\mathscr{A}$ είναι άλγεβρα von Neumann αν και μόνον αν είναι SOT-κλειστή, αν και μόνον αν είναι WOT-κλειστή.

Παρατήρηση Έστω A αυτοσυζυγής τελεστής. Οι φασματικές προβολές $E(\Omega)$ μπορεί να μην ανήκουν στην C^*-άλγεβρα που παράγεται από τον A. Όμως, όπως έχουμε δείξει (βλ. Πρόταση 35), οι προβολές αυτές ανήκουν στην άλγεβρα von Neumann $\{A\}''$ που παράγει ο A.

Πόρισμα

Κάθε άλγεβρα von Neumann είναι η norm-κλειστή γραμμική θήκη των προβολών που περιέχει.

(Μία C^*-άλγεβρα μπορεί να μην έχει μη τετριμμένες προβολές.)

Πόρισμα

Αν $\mathscr{A}$ είναι άλγεβρα von Neumann που δρα σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert, τότε υπάρχει αριθμήσιμο σύνολο $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{A}$ προβολών που παράγει την $\mathscr{A}$ ως άλγεβρα von Neumann, δηλαδή τέτοιο ώστε $\mathscr{E}'' = \mathscr{A}$.

Αβελιανές άλγεβρες von Neumann

Υπενθύμιση Κάθε αβελιανή C*-άλγεβρα είναι ισομετρικά *-ισομορφική με τον $C_0(X)$ για κάποιον τοπικά συμπαγή `χώρο Hausdorff (συμπαγή αν-ν η έχει μονάδα).

Στόχος:

Θεώρημα

*Κάθε αβελιανή άλγεβρα von Neumann που δρα σε διαχωρίσιμο χώρο είναι ισομετρικά *-ισομορφική με τον $L^\infty([0,1],\mu)$ για κάποιο Borel μέτρο πιθανότητας μ.*

Πληροφορία: Κάθε αβελιανή άλγεβρα von Neumann είναι ισομετρικά *-ισομορφική με κάποιον $L^\infty(\Gamma,\nu)$ όπου Γ τοπικά συμπαγής Hausdorff και ν κανονικό μέτρο Borel.

Αβελιανές άλγεβρες von Neumann

Ορισμός

Έστω $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{B}(H)$ *γραμμικός υπόχωρος και* $\xi \in H$.

- *Το* $\xi \in H$ ***διαχωρίζει*** *τον* $\mathscr{S}$ *αν* $S\xi \neq 0$ *για κάθε* $S \in \mathscr{S} \setminus \{0\}$.
- *Το* ξ *είναι* ***κυκλικό*** *για τον* $\mathscr{S}$ *αν ο* $[\mathscr{S}\xi]$ *είναι πυκνός στον* H.

Λήμμα

(i) Αν το ξ *είναι κυκλικό για το* $\mathscr{S}$ *τότε διαχωρίζει τον* $\mathscr{S}'$.
(ii) Αν η $\mathscr{M}$ *είναι άλγεβρα von Neumann και το* ξ *διαχωρίζει την* $\mathscr{M}$ *τότε είναι κυκλικό για την* $\mathscr{M}'$.
Συνεπώς ένα διάνυσμα είναι κυκλικό για μια άλγεβρα von Neumann αν και μόνον αν διαχωρίζει τον μεταθέτη της.

Αβελιανές άλγεβρες von Neumann

Λήμμα

Κάθε αβελιανή άλγεβρα von Neumann $\mathscr{M}$ που δρα σε διαχωρίσιμο χώρο H έχει διαχωρίζον διάνυσμα ξ.
Αν η $\mathscr{M}$ είναι masa, τότε το ξ είναι και κυκλικό.

Λήμμα

Έστω $\mathscr{M}$ αβελιανή άλγεβρα von Neumann σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert H. Τότε υπάρχει αυτοσυζυγής τελεστής $A \in \mathscr{M}$ ώστε $\{A\}'' = \mathscr{M}$. Μπορούμε μάλιστα να επιλέξουμε τον A ώστε $0 \leq A \leq I$.

Μεγιστικές αβελιανές άλγεβρες von Neumann

Έστω $A = A^* \in \mathscr{B}(H)$ με $0 \leq A \leq I$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\xi \in H$ μοναδιαίο κυκλικό διάνυσμα για τον A, άρα και για την $\mathscr{M} := \{A\}''$.

Από την Πρόταση 27, υπάρχει (πεπερασμένο) θετικό κανονικό μέτρο Borel μ στο $\sigma(A) \subseteq [0,1]$ ώστε ο A να είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με τον τελεστή M_h στον $L^2(\sigma(A),\mu)$ του πολλαπλασιασμού επί την ανεξάρτητη μεταβλητή, $(M_h(g))(x) = xg(x)$. Δηλαδή υπάρχει unitary $U : L^2(\sigma(A),\mu) \to H$ ώστε $A = UM_hU^*$.

Η απεικόνιση $\Phi_u : M_f \mapsto UM_fU^*$ είναι ισομετρικός *-ισομορφισμός της $\mathscr{M}_\mu \subseteq \mathscr{B}(L^2(\mu))$ επί της $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{B}(H)$.

Συμπέρασμα:

Πρόταση

*Κάθε masa που δρα σε διαχωρίσιμο χώρο είναι ισομετρικά *-ισομορφική με τον $L^\infty([0,1],\mu)$ για κάποιο Borel μέτρο πιθανότητας μ. Μάλιστα είναι unitarily ισοδύναμη με την πολλαπλασιαστική άλγεβρα $\mathscr{M}_\mu$.*

Αβελιανές άλγεβρες von Neumann:

Σχέδιο απόδειξης θεωρήματος 19:
Έστω $\mathscr{M}$ αβελιανή άλγεβρα von Neumann σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert H και $\xi \in H$ μοναδιαίο διαχωρίζον διάνυσμα για την $\mathscr{M}$.
Αν $H_0 := \overline{\mathscr{M}\xi}$, η απεικόνιση $T \mapsto T|_{H_0} : \mathscr{M} \to \mathscr{B}(H_0)$ είναι 1-1, άρα ισομετρικός *-μορφισμός και η εικόνα του, έστω $\mathscr{M}_0 \subseteq \mathscr{B}(H_0)$ έχει κυκλικό διάνυσμα.
Υπάρχει λοιπόν θετικό κανονικό μέτρο Borel μ στο $[0,1]$ και unitary $U : L^2([0,1],\mu) \to H_0$ ώστε η $\Phi_u : M_f \mapsto UM_f U^*$ να απεικονίζει την $\mathscr{M}_\mu \subseteq \mathscr{B}(L^2(\mu))$ ισομετρικά και *-ισομορφικά επί της $\mathscr{M}_0 \subseteq \mathscr{B}(H_0)$.
Έπεται ότι η σύνθεση

$$\begin{aligned} \Phi : \mathscr{M} &\to \mathscr{M}_0 \to \mathscr{M}_\mu \\ T &\mapsto T|_{H_0} \mapsto U^* T|_{H_0} U \end{aligned}$$

απεικονίζει την $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{B}(H)$ ισομετρικά και *-ισομορφικά επί της $\mathscr{M}_\mu \subseteq \mathscr{B}(L^2(\mu))$. $\square$

Τανυστικά γινόμενα γραμμικών χώρων

Αν E_1, E_2 είναι $\mathbb{K}$-γραμμικοί χώροι, μπορώ να θεωρώ $E_i \hookrightarrow \mathbb{K}^{X_i}$ όπου X_i κάποιο σύνολο (πχ αλγεβρ. ή ο.κ. βάση του E_i). Ορίζω

$$\xi \otimes \eta : X_1 \times X_2 \to \mathbb{K} : (s,t) \to \xi(s)\eta(t).$$

Προσωρινός Ορισμός (Αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο)

$$E_1 \odot E_2 := \mathrm{span}\{\xi \otimes \eta : \xi \in E_1, \eta \in E_2\} \subseteq \mathbb{K}^{X_1 \times X_2}.$$

Παρατήρηση $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$,
$x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$, $(\lambda x) \otimes y = \lambda(x \otimes y) = x \otimes (\lambda y)$.

Πρόταση

Αν $\{x_i : i \in I\} \subseteq E_1$ γραμμικά ανεξάρτητο και $\{y_j : j \in J\} \subseteq E_2$ γραμμ. ανεξάρτητο, τότε $\{x_i \otimes y_j : (i,j) \in I \times J\} \subseteq E_1 \otimes E_2$ γραμμ. ανεξάρτητο.

Πρόταση

Αν $u = \sum_i x_i \otimes y_i \in E_1 \odot E_2$. *ΤΕΕΙ*

(α) $u = 0$.

(β) $\sum_i \phi(x_i)\psi(y_i) = 0 \in \mathbb{C}$ *για κάθε* $\phi \in E_1^d, \psi \in E_2^d$.

(γ) $\sum_i \phi(x_i) y_i = 0 \in E_2$ *για κάθε* $\phi \in E_1^d$.

(δ) $\sum_i \psi(y_i) x_i = 0 \in E_1$ *για κάθε* $\psi \in E_2^d$.

(Με E^d συμβολίζουμε τον χώρο όλων των γραμμικών απεικονίσεων $E \to \mathbb{K}$.)

Παρατήρηση Αρκεί τα ϕ, ψ να ανήκουν σε υπόχωρους των δυικών που χωρίζουν τα σημεία, όπως πχ οι τοπολογικοί δυικοί, όταν οι E_1 και E_2 είναι τοπικά κυρτοί χώροι.

Καθολική ιδιότητα του $(E_1 \odot E_2, \otimes)$

Για κάθε $\mathbb{K}$-γραμμικό χώρο F και κάθε διγραμμική απεικόνιση $b : E_1 \times E_2 \to F$ υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $B : E_1 \odot E_2 \to F$ ώστε $B(x \otimes y) = b(x, y)$ για κάθε $x \in E_1, y \in E_2$:
Δηλ. αν $\pi : E_1 \times E_2 \to E_1 \odot E_2 : (x, y) \to x \otimes y$, το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} E_1 \times E_2 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "b"'] & E_1 \odot E_2 \arrow[dl, "B"] \\ F & \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

$$\mathrm{bil}(E_1 \times E_2, F) \simeq \mathscr{L}(E_1 \odot E_2, F).$$

Μοναδικότητα του $(E_1 \odot E_2, \otimes)$

Έστω G_1, G_2 δυο $\mathbb{K}$-γραμμικοί χώροι και $\pi_i : E_1 \times E_2 \to G_i$ $(i = 1, 2)$ διγραμμικές απεικονίσεις. Υποθ: για κάθε γραμμ. χώρο F και διγραμμική $b : E_1 \times E_2 \to F$, υπάρχουν μοναδικές γραμμ. απεικονίσεις $B_i : G_i \to F$ $(i = 1, 2)$ ώστε $B_i \circ \pi_i = b$ $(i = 1, 2)$.

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[dr, "\exists!\, B_1"'] & E_1 \times E_2 \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "b"] & G_2 \arrow[dl, "\exists!\, B_2"] \\
& F &
\end{tikzcd}$$

Τότε $\exists$ γραμμ. ισομορφισμός $\phi : G_1 \to G_2$ ώστε $\phi \circ \pi_1 = \pi_2$:

$$\begin{tikzcd}
& E_1 \times E_2 \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
G_1 \arrow[rr, "\phi"'] & & G_2
\end{tikzcd}$$

Ορισμός του $(E_1 \odot E_2, \otimes)$

Έπεται ότι ο προσωρινός ορισμός δεν εξαρτάται από την αναπαράσταση $E_i \hookrightarrow \mathbb{K}^{X_i}$: Αν G είναι γραμμικός χώρος και $\otimes' : E_1 \times E_2 \to G$ διγραμμική απεικόνιση ώστε το $(G, \otimes')$ να έχει την καθολική ιδιότητα, τότε υπάρχει γραμμικός ισομορφισμός $T : E_1 \odot E_2 \to G$ ώστε $T(x \otimes y) = x \otimes' y$ για κάθε $x \in E_1, y \in E_2$.

Ορισμός

*Το **Αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο** δυο $\mathbb{K}$ γραμμικών χώρων E_1 και E_2 είναι ο μοναδικός (ως προς γραμμικούς ισομορφισμούς) γραμμικός χώρος $E_1 \odot E_2$ που εφοδιάζεται με μια διγραμμική απεικόνιση $\otimes : E_1 \times E_2 \to E_1 \odot E_2$ με την καθολική ιδιότητα:*

*Για κάθε $\mathbb{K}$-γραμμικό χώρο F και κάθε διγραμμική απεικόνιση $b : E_1 \times E_2 \to F$ υπάρχει **μοναδική** γραμμική απεικόνιση $B : E_1 \odot E_2 \to F$ ώστε $B(x \otimes y) = b(x, y)$ για κάθε $x \in E_1, y \in E_2$:*

Παρατήρηση $E \odot \mathbb{K} \simeq E : x \otimes \lambda \mapsto \lambda x$ και $E \odot \mathbb{K}^n \simeq E^n : x \otimes e_i \mapsto (0 \ldots, 0, x, 0 \ldots, 0)$.

Εφαρμογή: Τελεστές πεπερασμένης τάξης

Αν H, K είναι χώροι Hilbert, θέτουμε $E_2 = K$ και E_1 τον χώρο H^* των *συνεχών* γραμμικών μορφών $H \to \mathbb{K} : z \to \langle z, x \rangle$. Τότε ο H ταυτίζεται γραμμικά με τον υπόχωρο του αλγεβρικού δυικού E_1^d του H^*, που αποτελείται από τις γραμμ. μορφές $\phi_z : E_1 \to \mathbb{K}$ $(z \in H)$ της μορφής $\phi(x^*) = \langle z, x \rangle$.
Κάθε $u = \sum_i x_i^* \otimes y_i \in H^* \odot K$ ορίζει

$$\tilde{u} : H \to K : z \mapsto \sum_i \langle z, x_i \rangle \, y_i := \sum_i y_i x_i^*(z).$$

Αντίστροφα κάθε *φραγμένος* τελεστής πεπερασμένης τάξης $T : H \to K$ είναι της μορφής $T = \hat{u}|_H = \tilde{u}$ όπου $u \in H^* \odot K$ και η $u \to \tilde{u}$ είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων.

Συμπέρασμα: $H^* \odot K \simeq \mathscr{F}(H, K)$.

Επίσης $H^* \odot H \simeq \mathscr{B}_{\sim}(H)$ μέσω της απεικόνισης $\sum_i x_i^* \otimes y_i \mapsto \sum_i \omega_{y_i, x_i}$

Τανυστικά γινόμενα γραμμ. χώρων και Hilbert

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert. Στον $H_1 \odot H_2$ θέτω

$$\langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \rangle_{hs} = \langle x_1, x_2 \rangle_{H_1} \cdot \langle y_1, y_2 \rangle_{H_2} .$$

Ορίζει εσωτ. γινόμενο. (Άσκηση!) Ορίζουμε

$$H_1 \otimes H_2 := \overline{(H_1 \odot H_2, \|\cdot\|_{hs})}.$$

Αν $\{e_i\}_I$ ο.κ. βάση του H_1 και $\{f_j\}_J$ ο.κ. βάση του H_2, ο $H_1 \otimes H_2$ έχει ο.κ. βάση $\{e_i \otimes f_j\}_{I\times J}$.

Παρατήρηση Όταν $\dim H_1 < \infty$ και $\dim H_2 < \infty$, τότε $H_1 \odot H_2 = H_1 \otimes H_2$.

Παράδειγμα $L^2(\mu) \otimes L^2(\nu) = L^2(\pi)$ όπου π μέτρο γινόμενο.

Παράδειγμα $\mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^k \odot \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{nk}$.

Η αριστερή κανονική αναπαράσταση μιας ομάδας

Έστω G μια (αριθμήσιμη) ομάδα. *(Για παράδειγμα, το $\mathbb{Z}$ ή η $\mathbb{F}_2$.)* Θεωρούμε τον χώρο Hilbert

$$\ell^2(G) = \ell^2 G = \{f : G \to \mathbb{C} : \sum_{t \in G} |f(t)|^2 < \infty\}.$$

Ο $\ell^2(G)$ έχει ορθοκανονική βάση $\{\delta_t : t \in G\}$.
Για κάθε $s \in G$ ορίζουμε μια απεικόνιση

$$\lambda_s : \delta_t \to \delta_{st}$$

και επεκτείνουμε γραμμικά σε απεικόνιση $\lambda_s : c_{00}G \to c_{00}G$. Η επέκταση αυτή είναι ισομετρία στην νόρμα του ℓ^2. Επομένως επεκτείνεται σε μια ισομετρία $\lambda_s : \ell^2(G) \to \ell^2(G)$. Η λ_s είναι και επί, συνεπώς unitary. Παρατηρούμε ότι

$$\text{Αν } \ f \in \ell^2(G), \quad (\lambda_s f)(t) = f(s^{-1}t).$$

Η απεικόνιση $s \mapsto \lambda_s : G \to \mathscr{B}(\ell^2 G)$ λέγεται η αριστερή κανονική αναπαράσταση (left regular representation) της G στον $\ell^2(G)$.

Η άλγεβρα von Neumann μιας ομάδας

Ορισμός

Συμβολίζουμε $\mathrm{vN}(G)$ *ή* $\mathscr{L}(G)$ *την* sot-*κλειστή γραμμική θήκη της ομάδας των unitary τελεστών* $\{\lambda_t : t \in G\}$, *δηλαδή*

$$\mathscr{L}(G) := \overline{\mathrm{span}\{\lambda_t : t \in G\}}^{\mathrm{sot}} \subseteq \mathscr{B}(\ell^2(G)).$$

Η $\mathscr{L}(G)$ *ονομάζεται η* ***άλγεβρα von Neumann*** *της ομάδας. Ομοίως ορίζουμε*

$$\mathscr{R}(G) := \overline{\mathrm{span}\{\rho_t : t \in G\}}^{\mathrm{sot}} \subseteq \mathscr{B}(\ell^2(G))$$

όπου $(\rho_s f)(t) = f(ts), \ \ f \in \ell^2(G)$.

Κάθε λ_s μετατίθεται με το σύνολο $\{\rho_t : t \in G\}$, και συνεπώς μετατίθεται με την sot-κλειστή γραμμική του θήκη. Δηλαδή έχουμε

$$\mathscr{L}(G) \subseteq \mathscr{R}(G)'.$$

Στόχος είναι να δείξουμε ότι ισχύει ισότητα.

Αριστερά φραγμένα στοιχεία

Αν $f,g \in \ell^2(G)$, ορίζουμε $(f*g)(t) = \sum_{s\in G} f(s)g(s^{-1}t),\ \ t \in G.$
Παρατηρούμε ότι $|(f*g)(t)| \leq \|f\|_2 \|g\|_2\ \forall t \in G$, άρα ορίζεται
$L_f : g \mapsto f*g : \ell^2(G) \to \ell^\infty(G)$.

Ορισμός

Ένα $f \in \ell^2(G)$ *λέγεται* *αριστερά φραγμένο (left bounded, or a left convolver)* *αν* $f*g \in \ell^2 G$ *για κάθε* $g \in \ell^2 G$, *δηλαδή αν* $L_f(\ell^2(G)) \subseteq \ell^2(G)$. *Γράφουμε* $f \in \mathscr{L}\mathscr{C}(G)$.

Παραδείγματα (α) Κάθε $f \in c_{00}(G)$ είναι αριστερά φραγμένο και $L_f = \sum\limits_{s\in G} f(s)\lambda_s$ (πεπερασμένο άθροισμα).

(β) Στο $G = \mathbb{Z}$ η $f(n) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad n \leq 0 \\ \frac{1}{n^{3/4}} & \text{αν} \quad n \geq 1 \end{cases}$ είναι στον $\ell^2 G$ αλλά δεν είναι φραγμένο στοιχείο, γιατί $f*f \notin \ell^2 G$.

Αριστερά φραγμένα στοιχεία

Λήμμα

Έστω $f \in \ell^2 G$. *Αν* $f \in \mathscr{L}\mathscr{C}(G)$, *τότε ο* L_f *είναι φραγμένος τελεστής στον* $\ell^2 G$.

Λήμμα

Ένα $f \in \ell^2(G)$ *ανήκει στο* $\mathscr{L}\mathscr{C}(G)$ *αν και μόνον αν υπάρχει σταθερά* $c \geq 0$ *ώστε*
$\|f * g\|_2 \leq c\,\|g\|_2$ *για κάθε* $g \in c_{00}(G)$.

Αριστερά φραγμένα στοιχεία

Συμβολισμός Θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\mathscr{LC}(G)$ όχι μόνον για τα αριστερά φραγμένα στοιχεία $f \in \ell^2(G)$, αλλά και για τους τελεστές $L_f \in \mathscr{B}(\ell^2 G)$ που τα στοιχεία αυτά ορίζουν.

Πρόταση

Το σύνολο $\mathscr{LC}(G) \subseteq \mathscr{B}(\ell^2 G)$ είναι sot-*κλειστό υποσύνολο του $\mathscr{B}(\ell^2 G)$ και περιέχει την άλγεβρα von Neumann της ομάδας:*

$$\mathscr{L}(G) \subseteq \mathscr{LC}(G). \tag{2}$$

Δεξιά φραγμένα στοιχεία

Ορισμός

Έστω $g \in \ell^2 G$. Θα λέμε ότι το g είναι *δεξιά φραγμένο στοιχείο* *(γράφουμε $g \in \mathscr{RC}(G)$) αν $\xi \in \ell^2 G \Rightarrow \xi * g \in \ell^2 G$.*

Κάθε δεξιά φραγμένο στοιχείο g ορίζει φραγμένο τελεστή $R_g : f \mapsto f * g$. Χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\mathscr{RC}(G)$ και για το σύνολο των τελεστών αυτών.
Αποδεικνύεται ότι το $\mathscr{RC}(G)$ είναι sot κλειστό υποσύνολο του $\mathscr{B}(\ell^2 G)$. Εφόσον προφανώς $R_g \in \mathscr{RC}(G)$ για κάθε $g \in c_{00} G$ έπεται ότι $\mathrm{span}\{\rho_t : t \in G\} \subseteq \mathscr{RC}(G)$, και συνεπώς

$$\mathscr{R}(G) \subseteq \mathscr{RC}(G). \tag{3}$$

Πρόταση

$\mathscr{LC}(G) \subseteq \mathscr{RC}(G)'$.

Ο μεταθέτης της $\mathscr{LC}(G)$

Θεώρημα

$\mathscr{L}(G) = \mathscr{LC}(G) = \mathscr{R}(G)'$. *Επομένως* $\mathscr{L}(G)' = \mathscr{R}(G)$.

Παρατήρηση

Η $\mathscr{L}(G)$ *είναι το σύνολο όλων των τελεστών* L_f *που προκύπτουν από αριστερά φραγμένα στοιχεία του* $\ell^2 G$*:*

$$\mathscr{L}(G) = \{L_f : f \in \ell^2 G \text{ αριστερά φραγμένο}\}.$$

Με άλλα λόγια, η $\mathscr{L}(G)$ *είναι το σύνολο όλων των συνελίξεων* L_f *που ορίζουν φραγμένους τελεστές.*

Η απεικόνιση $\mathscr{L}(G) \to \ell^2 : X \mapsto X\delta_e$ είναι 1-1 γραμμική με σύνολο τιμών το σύνολο των αριστερά φραγμένων διανυσμάτων. Έχει αντίστροφη την $x \mapsto L_x$.

(Λεπτομέρειες στο αρχείο `gpvnart.pdf`.)

Normal states, tracial states

Υπενθύμιση: Μια γραμμική μορφή ϕ σε μια άλγεβρα von Neumann $\mathscr{M}$ λέγεται

- θετική αν $\phi(X^*X) \geq 0$ για κάθε $X \in \mathscr{M}$,
- πιστή αν $\phi(X^*X) > 0$ για κάθε $X \in \mathscr{M} \setminus \{0\}$.

(Αν ϕ θετική τότε $\|\phi\| = \phi(\mathbf{1})$.)

- Αν $\phi(\mathbf{1}) = 1$ η ϕ λέγεται κατάσταση (state).
- Μια γραμμική μορφή ϕ λέγεται normal στην $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{B}(H)$ αν είναι wot-συνεχής στη μοναδιαία μπάλα της $\mathscr{M}$, δηλ.

$(X_i \in \mathscr{M}, \|X_i\| \leq 1$ και $\langle X_i\xi, \eta\rangle \to 0 \; \forall \xi, \eta \in H) \Rightarrow \phi(X_i) \to 0.$

- Αν μια κατάσταση ικανοποιεί $\phi(XY) = \phi(YX)$ για κάθε $X, Y \in \mathscr{M}$, λέγεται κατάσταση ίχνους (tracial state).
- Αν $\mathscr{M}$ άλγεβρα von Neumann που δρα στον χώρο Hilbert H, ένα $\xi \in H$ λέγεται κυκλικό για την $\mathscr{M}$ αν ο $\mathscr{M}\xi$ είναι πυκνός στον H.
- Λέμε ότι το $\xi \in H$ διαχωρίζει την $\mathscr{M}$ αν, όταν $X \in \mathscr{M}$, έχουμε $X\xi = 0 \Rightarrow X = 0$.
- Το διάνυσμα $\delta_e \in \ell^2 G$ είναι κυκλικό και διαχωρίζον για την $\mathscr{L}(G)$.

Tracial von Neumann algebras

Ορίζουμε μια πιστή κατάσταση στην $\mathscr{L}(G)$ θέτοντας

$$\tau(x) = \langle x\delta_e, \delta_e \rangle$$

(Το δ_e διαχωρίζει την $\mathscr{L}(G)$).
Παρατηρούμε ότι η τ είναι normal state (μάλιστα wot-συνεχής).

Έχουμε $\tau(\lambda_s\lambda_t) = 1$ όταν $st = e$ και $\tau(\lambda_s\lambda_t) = 0$ αλλιώς, άρα πάντα ισχύει ότι $\tau(\lambda_s\lambda_t) = \tau(\lambda_t\lambda_s)$. Επομένως η τ είναι ίχνος.

Ορισμός

Άλγεβρα von Neumann με ίχνος (tracial von Neumann algebra) είναι ένα ζεύγος $(\mathscr{M}, \tau)$ όπου $\mathscr{M}$ άλγεβρα von Neumann και τ πιστή και normal κατάσταση ίχνους στην $\mathscr{M}$.

Παραδείγματα (ι) $(\mathscr{L}(G), \tau)$.
(ιι) $(L^\infty(\mu), \mathbb{E})$ όπου μ μέτρο πιθανότητας και $\mathbb{E}(f) = \int f d\mu$.

Αναπαράσταση Fourier

Υπενθυμίζουμε ότι κάθε $X \in \mathscr{L}(G)$ είναι συνέλιξη με αριστερά φραγμένο στοιχείο: $\exists! x = X\delta_e \in \ell^2(G)$ ώστε $X = L_x$. Έχουμε $x = \sum_{s\in G} x(s)\delta_s$ (ℓ^2 σύγκλιση!) όπου $x(s) = \langle x, \delta_s\rangle = \langle X\delta_e, \delta_s\rangle$.
Ταυτίζουμε τον τελεστή X με το διάνυσμα x και γράφουμε

$$X = \sum_{s\in G} x(s)\lambda_s \qquad (*)$$

(ταυτίζοντας τον unitary τελεστή $\lambda_s \in \mathscr{B}(\ell^2(G))$ με το διάνυσμα $\delta_s \in \ell^2(G)$). Η σειρά (*) συγκλίνει στη νόρμα του ℓ^2, αλλά εν γένει όχι ως σειρά τελεστών (ούτε στην wot).
Παρατηρούμε ότι αν $X \in \mathscr{L}(G)$, έχουμε

$$\tau(X^*X) = \sum_{s\in G} |x(s)|^2$$

$$\text{και } \; x(s) = \tau(X\lambda_s^*), \quad s \in G\,.$$

Το $x(s)$ ονομάζεται ο s-οστός συντελεστής Fourier του X.
Αποδ: $\tau(X^*X) = \langle X^*X\delta_e, \delta_e\rangle = \|X\delta_e\|_2^2 = \sum_{s\in G}|x(s)|^2$. Επίσης $x(s) = \langle X\delta_e, \delta_s\rangle = \langle X\delta_e, \lambda_s\delta_e\rangle = \langle \lambda_s^* X\delta_e, \delta_e\rangle = \tau(\lambda_s^* X) = \tau(X\lambda_s^*)$.

Αναπαράσταση Fourier

Η απεικόνιση

$$(\mathscr{L}(G), \|\cdot\|_\tau) \to (\ell^2 G, \|\cdot\|_2) : X \mapsto x = X\delta_e = (x(s))$$

είναι ισομετρία. Άρα επεκτείνεται σε unitary $\mathscr{H}_\tau \to \ell^2(G)$ όπου $\mathscr{H}_\tau$ η πλήρωση του γραμμικού χώρου $\mathscr{L}(G)$ ως προς τη νόρμα $\|X\|_\tau := \sqrt{\tau(X^*X)}$ (είναι χώρος Hilbert).

Παράβαλε: Αν ορίσουμε $\|T\|_{tr} = \mathrm{tr}(T^*T)^{1/2}$ στον $\mathscr{F} := \mathscr{F}\mathscr{B}(H)$, η πλήρωση είναι ο χώρος $\{T \in \mathscr{B}(H) : \mathrm{tr}(T^*T) < \infty\}$ των τελεστών Hilbert-Schmidt. Η tr δεν ορίζει γραμμ. μορφή στον $\mathscr{B}(H)$ όταν $\dim H + \infty$ (έχουμε $\mathrm{tr}(I) = +\infty$).
Π.χ. Για $H = \ell^2 G$ έχουμε $\mathrm{tr}(T^*T) = \sum_s \|T\delta_s\|_2^2$ ενώ $\tau(X^*X) = \sum_s |\langle X\delta_e, \delta_s\rangle|^2 = \|X\delta_e\|_2^2$.

Παραδείγματα αλγεβρών $\mathscr{L}(G)$

Παράδειγμα: Αν $G = \mathbb{Z}$: $\mathscr{L}(G) \simeq L^\infty(\mathbb{T})$ αβελιανή.

Έστω $F : L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ ο μετασχηματισμός Fourier. Τότε $\mathscr{L}(\mathbb{Z}) = F\mathscr{M}_m F^{-1}$, όπου $\mathscr{M}_m \subseteq \mathscr{B}(L^2(\mathbb{T})$ είναι η πολλαπλασιαστική άλγεβρα του $L^\infty(\mathbb{T})$. Έχουμε $\tau(FM_\phi F^{-1}) = \int_{\mathbb{T}} \phi\, dm$ για κάθε $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$.

Πράγματι, αν $e_k(e^{it}) = e^{ikt}$, η $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $L^2(\mathbb{T})$ και $Fe_k = \delta_k$. Έπεται ότι $F^{-1}\lambda_n F = M_{e_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Άρα αν $X = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)\lambda_n \in \mathscr{L}(\mathbb{Z})$ τότε $F^{-1}XF = M_\phi$ όπου $\phi = \sum_n x(n)e_n$ δηλ. το $x \in \ell^2\mathbb{Z}$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της ϕ: $\widehat{\phi} = x$.

Συμπέρασμα: Ένα $x \in \ell^2\mathbb{Z}$ είναι αριστερά φραγμένο στοιχείο αν-ν υπάρχει $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ ώστε $\widehat{\phi} = x$.

Παραδείγματα αλγεβρών $\mathscr{L}(G)$

Παρατήρηση: Η $\mathscr{L}(G)$ είναι μεταθετική αν-ν η G είναι αβελιανή.
Στο άλλο άκρο:

Ορισμός

Μία άλγεβρα von Neumann $\mathscr{M}$ λέγεται factor αν έχει τετριμμένο κέντρο: $\mathscr{M} \cap \mathscr{M}' = \mathbb{C}I$.

Π.χ. $\mathscr{M} = \mathscr{B}(H)$. Υπάρχουν άλλες;

Πρόταση

Η $\mathscr{L}(G)$ έχει τετριμμένο κέντρο $\mathscr{L}(G) \cap \mathscr{R}(G) = \mathbb{C}I$ (είναι factor) αν και μόνον αν η όλες οι κλάσεις συζυγίας $C_s := \{tst^{-1} : t \in G\}$ όταν $s \neq e$ G είναι άπειρες (είναι ICC group).

Αποδ. $(\Rightarrow)$ Αν $X \in \mathscr{L}(G) \cap \mathscr{R}(G)$, τότε $\lambda_t \rho_t X \delta_e = X \delta_e$ για κάθε $t \in G$. Οπότε $x(tst^{-1}) = x(s)$. Αλλά $x \in \ell^2(G)$ και η $C_s := \{tst^{-1} : t \in G\}$ είναι άπειρη όταν $s \neq e$, άρα $x(s) = 0$, οπότε $X = x(e)\delta_e = x(e)I$.

Παραδείγματα αλγεβρών $\mathscr{L}(G)$

Παράδειγμα: Αν $G = \mathbb{F}_2$: η $\mathscr{L}(G)$ έχει τετριμμένο κέντρο.

($\mathbb{F}_n$: η ελεύθερη ομάδα με n γεννήτορες)
Είναι άγνωστο αν $\mathscr{L}(\mathbb{F}_n) \simeq \mathscr{L}(\mathbb{F}_m)$ για $n > m \geq 2$.

Παράδειγμα: Αν $G = S_\infty := \bigcup_n S_n$: η $\mathscr{L}(G)$ είναι (διαφορετικός!) factor.

Εδώ S_n είναι η ομάδα των μεταθέσεων του $\mathbb{N}$ που σταθεροποιούν κάθε $k > n$.

Και οι δύο είναι παραδείγματα αλγεβρών που λέγονται II_1 factors: tracial von Neumann algebras με τετριμμένο κέντρο. Δεν είναι ισόμορφες. Η $\mathscr{L}(S_\infty)$ είναι η sot-κλειστή θήκη της ένωσης αλγεβρών πεπερασμένης διάστασης. Είναι ο μοναδικός II_1 factor με την ιδιότητα αυτή (the hyperfinite II_1 factor).

Δείτε τις εξαιρετικές σημειώσεις του V.F.R. Jones στο `Von Neumann Algebras`, ιδιαίτερα την παράγραφο 3.3 (όλη).