Τανυστικά γινόμενα γραμμικών χώρων
και χώρων Hilbert

1 Τανυστικά γινόμενα γραμμικών χώρων

Αν E_1, E_2 [1] είναι $\mathbb{K}$-γραμμικοί χώροι, υπάρχουν σύνολα X_1, X_2 ώστε $E_i \hookrightarrow \mathbb{K}^{X_i}$ [2]. Ορίζω

$$\xi \otimes \eta : X_1 \times X_2 \to \mathbb{K} : (s,t) \to \xi(s)\eta(t).$$

Ορισμός 1. *Προσωρινός Ορισμός (Αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο)*

$$E_1 \odot E_2 := \text{span}\{\xi \otimes \eta : \xi \in E_1, \eta \in E_2\} \subseteq \mathbb{K}^{X_1 \times X_2}.$$

Παρατήρηση $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$, $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$, $(\lambda x) \otimes y = \lambda(x \otimes y) = x \otimes (\lambda y)$.

Πρόταση 1. *Αν $\{x_i : i \in I\} \subseteq E_1$ γραμμικά ανεξάρτητο και $\{y_j : j \in J\} \subseteq E_2$ γραμμικά ανεξάρτητο, τότε το $\{x_i \otimes y_j : (i,j) \in I \times J\} \subseteq E_1 \otimes E_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Απόδειξη. Αν $\sum_{(i,j)\in F} \lambda_{i,j} x_i \otimes y_j = 0$ (όπου F πεπερασμένο υποσύνολο του $I \times J$), τότε για κάθε $s \in X_1$ έχουμε $\sum_{i,j} \lambda_{i,j} x_i(s) y_j = 0$ στον E_2. Συνεπώς $\sum_j \left(\sum_i \lambda_{i,j} x_i(s)\right) y_j = 0$ στον E_2. Από τη γραμμική ανεξαρτησία του $\{y_j\}$, για κάθε j ο συντελεστής $\sum_i \lambda_{i,j} x_i(s)$ θα μηδενίζεται. Επομένως, για κάθε j έχουμε $\sum_i \lambda_{i,j} x_i(s) = 0$ για κάθε s, δηλαδή $\sum_i \lambda_{i,j} x_i = 0$ στον E_1. Από τη γραμμική ανεξαρτησία του $\{x_i\}$ έπεται τώρα ότι $\lambda_{i,j} = 0$ για κάθε (i,j). $\square$

Πρόταση 2. *Αν $u = \sum_i x_i \otimes y_i \in E_1 \odot E_2$. ΤΕΕΙ*
(a) $u = 0$.
(b) $\sum_i \phi(x_i)\psi(y_i) = 0$ στο $\mathbb{K}$ για κάθε $\phi \in E_1^d, \psi \in E_2^d$.
(c) $\sum_i \phi(x_i) y_i = 0$ στον E_2 για κάθε $\phi \in E_1^d$.
(d) $\sum_i \psi(y_i) x_i = 0$ στον E_1 για κάθε $\psi \in E_2^d$.

(Με E^d συμβολίζουμε τον χώρο όλων των γραμμικών απεικονίσεων $E \to \mathbb{K}$.)

[1] June 24, 2018, file: tensors, compiled w. corrections 28 Δεκεμβρίου 2019

[2] για παράδειγμα, μπορεί το X_1 να είναι αλγεβρική βάση του E_1 ή ορθοκανονική βάση (αν το E_1 είναι χώρος Hilbert)

Απόδειξη. $(a) \Rightarrow (d)$ Αν $\sum_i x_i \otimes y_i = 0$ στον $E_1 \otimes E_2$, δηλαδή $\sum_i x_i(s)y_i(t) = 0$ για κάθε s και t τότε για κάθε $s \in X_1$ η συνάρτηση $u_s : X_2 \to \mathbb{K}$ (όπου $u_s(t) = u(s,t)$) μηδενίζεται σε κάθε $t \in X_2$, οπότε $u_s = \sum_i x_i(s)y_i = 0$ στον E_2 και άρα, για κάθε ψ, $\sum_i \psi(y_i)x_i(s) = \psi\left(\sum x_i(s)y_i\right) = 0$, δηλαδή η συνάρτηση $\sum_i \psi(y_i)x_i \in E_1$ μηδενίζεται.

$(d) \Rightarrow (a)$ Για κάθε $s \in X_1$ έχουμε $\psi\left(\sum x_i(s)y_i\right) = \sum_i \psi(y_i)x_i(s) = \left(\sum_i \psi(y_i)x_i\right)(s) = 0$ απ' την υπόθεση, και άρα $\sum x_i(s)y_i = 0$ στον E_2 αφού ο E_2^d χωρίζει τα σημεία του E_2. Επομένως $\sum x_i(s)y_i(t) = 0$ για κάθε $(s,t) \in X_1 \times X_2$, δηλαδή $u = 0$.

$(d) \Leftrightarrow (b)$: Για κάθε $\phi \in E_1^d$ και $\psi \in E_2^d$ έχουμε

$$\phi\left(\sum_i \psi(y_i)x_i\right) = \sum_i \phi(x_i)\psi(y_i)\,. \qquad (*)$$

Συνεπώς αν $\sum_i \psi(y_i)x_i = 0$ στον E_1 τότε $\sum_i \phi(x_i)\psi(y_i) = 0 \in \mathbb{K}$.

Κι αν αντίστροφα $\sum_i \phi(x_i)\psi(y_i) = 0 \in \mathbb{K}$ για κάθε $\phi \in E_1^d$, τότε, αφού ο E_1^d χωρίζει τα σημεία του E_1, έπεται από την (*) ότι $\sum_i \psi(y_i)x_i = 0$ για κάθε $\psi \in E_2^d$.

$(b) \Leftrightarrow (c)$ Ομοίως. □

Παρατήρηση 3. *Στην Πρόταση αυτή, αρκεί τα ϕ, ψ να ανήκουν σε υπόχωρους των αλγεβρικών δυικών που χωρίζουν τα σημεία, όπως πχ οι τοπολογικοί δυικοί, όταν οι E_1 και E_2 είναι τοπικά κυρτοί χώροι.*

Παρατήρηση 4. *Από την Πρόταση έπεται ότι για κάθε $\phi \in E_1^d$ και $\psi \in E_2^d$ ορίζεται μια γραμμική απεικόνιση $\phi \odot \psi : E_1 \odot E_2 \to \mathbb{C}$ από τη σχέση*

$$(\phi \odot \psi)(u) = \sum_i \phi(x_i)\psi(y_i), \quad u = \sum_i x_i \otimes y_i$$

(διότι το $\sum_i \phi(x_i)\psi(y_i)$ δεν εξαρτάται από την αναπαράσταση $u = \sum_i x_i \otimes y_i$ του u.)

Πόρισμα 5. *Κάθε $u = \sum_i x_i \otimes y_i \in E_1 \odot E_2$ ορίζει μια γραμμική απεικόνιση:*

$$\hat{u} : E_1^d \to E_2 : \phi \to \sum_i \phi(x_i)y_i$$

πεπερασμένης τάξης.

Απόδειξη. Αν $\sum_i x_i \otimes y_i = \sum_k e_k \otimes f_k$ τότε από την Πρόταση έχουμε $\sum_i \phi(x_i)y_i = \sum_k \phi(e_k)f_k$ για κάθε $\phi \in E_1^d$. Δηλαδή ο ορισμός του $\hat{u}$ δεν εξαρτάται απ' την αναπαράσταση του u.

Προφανώς η $\hat{u}$ είναι γραμμική. Εφόσον το σύνολο τιμών του $\hat{u}$ περιέχεται στο $\mathrm{span}\{y_i\}$, η τάξη του $\hat{u}$ είναι πεπερασμένη. $\square$

Πρόταση 6. *Κάθε $u \in E_1 \odot E_2$ μπορεί να γραφεί ως (πεπερασμένο) άθροισμα $u = \sum_k e_k \otimes f_k$ όπου τα $\{f_k\} \subseteq E_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Τότε, τα e_k καθορίζονται μοναδικά από τα f_k.*

Απόδειξη. Έστω $u = \sum_j x_j \otimes y_j$ μια αναπαράσταση του u. Θεωρούμε μια βάση $\{f_k\} \subseteq E_2$ του υπόχωρου (πεπερασμένης διάστασης) $\mathrm{span}\{y_j\} \subseteq E_2$. Γράφουμε κάθε $y_j = \sum_k f_k^*(y_j) f_k$, όπου το $f_j^* \in E_2^d$ ικανοποιεί $f_j^*(f_i) = \delta_{ij}$. [3] Τότε

$$
\begin{aligned}
u = \sum_j x_j \otimes y_j = \sum_j x_j \otimes \left(\sum_k f_k^*(y_j) f_k \right) = \sum_{j,k} f_k^*(y_j)(x_j \otimes f_k) \\
= \sum_k \left(\sum_j f_k^*(y_j) x_j \right) \otimes f_k = \sum_k e_k \otimes f_k
\end{aligned}
$$

όπου $e_k := \sum_j f_k^*(y_j) x_j$.

Μοναδικότητα: Αν $u = \sum_k e'_k \otimes f_k$ τότε για κάθε $s \in X_1$ έχουμε $\sum_k e'_k(s) f_k = \sum_k e_k(s) f_k$ από το οποίο έπεται ότι $e'_k(s) = e_k(s)$ για κάθε k από τη γραμμική ανεξαρτησία της $\{f_k\}$. Δηλαδή $e'_k = e_k$ για κάθε k. $\square$

Αν F είναι γραμμικός χώρος, κάθε γραμμική απεικόνιση $B : E_1 \odot E_2 \to F$ ορίζει μια διγραμμική απεικόνιση $b : E_1 \times E_2 \to F$ από τη σχέση $b(x, y) = B(x \otimes y)$ για κάθε $x \in E_1, y \in E_2$. Η επόμενη βασική Πρόταση δείχνει ότι όλες οι γραμμικές απεικονίσεις $E_1 \odot E_2 \to F$ προκύπτουν κατ' αυτόν τον τρόπο.

Πρόταση 7 (Καθολική ιδιότητα του $(E_1 \odot E_2, \otimes)$)**.** *Για κάθε $\mathbb{K}$-γραμμικό χώρο F και κάθε διγραμμική απεικόνιση $b : E_1 \times E_2 \to F$ υπάρχει* μοναδική *γραμμική απεικόνιση $B : E_1 \odot E_2 \to F$ ώστε $B(x \otimes y) = b(x, y)$ για κάθε $x \in E_1, y \in E_2$:*

Δηλαδή αν $\pi : E_1 \times E_2 \to E_1 \odot E_2 : (x, y) \to x \otimes y$, το διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
E_1 \times E_2 \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "b"'] & E_1 \odot E_2 \arrow[dl, "B"] \\
F &
\end{tikzcd}
$$

[3] Τα f_j^* είναι οι λεγόμενες "διορθογώνιες" μορφές. Δεν είναι αναγκαίες για τα παρακάτω, αρκεί να γράψει κανείς $y_j = \sum_k \lambda_{k,j} f_k$ όπου $\lambda_{k,j} \in \mathbb{K}$.

είναι μεταθετικό. Δηλαδή ο χώρος των διγραμμικών απεικονίσεων $E_1 \times E_2 \to F$ είναι ισόμορφος με τον χώρο των γραμμικών απεικονίσεων$E_1 \odot E_2 \to F$:

$$\mathrm{bil}(E_1 \times E_2, F) \simeq \mathcal{L}(E_1 \odot E_2, F)\,.$$

Απόδειξη. Είναι άμεσο ότι αν υπάρχει η B, είναι μοναδική: γιατί αν δυο γραμμικές απεικονίσεις $B_i : E_1 \odot E_2 \to F$ ικανοποιούν $B_1(x \otimes y) = b(x, y) = B_2(x \otimes y)$ για κάθε $(x, y) \in E_1 \times E_2$, τότε $B_1 = B_2$ εφόσον $E_1 \odot E_2 := \mathrm{span}\{x \otimes y : (x, y) \in E_1 \times E_2\}$.

Έστω $u = \sum_j x_j \otimes y_j \in E_1 \odot E_2$. Ορίζουμε

$$B(u) := \sum_j b(x_j, y_j)\,.$$

Για να δείξουμε ότι η B είναι καλά ορισμένη, πρέπει να δείξουμε ότι το άθροισμα $\sum_j b(x_j, y_j)$ είναι ανεξάρτητο από την αναπαράσταση του u, δηλαδή ότι αν το u γράφεται επίσης $u = \sum_i x'_i \otimes y'_i$, τότε

$$\sum_j b(x_j, y_j) = \sum_i b(x'_j, y'_j)\,.$$

Ισοδύναμα, αν $\sum_j x_j \otimes y_j = 0$ στον $E_1 \odot E_2$ πρέπει να δείξουμε ότι $\sum_j b(x_j, y_j) = 0$ στον F.

Σταθεροποιούμε μια αλγεβρική βάση $\{f_k\}$ του χώρου E_2. Γράφουμε κάθε y_j ως προς τη βάση: $y_j = \sum_k f_k^*(y_j) f_k$. Τότε

$$\begin{aligned} 0 = \sum_j x_j \otimes y_j &= \sum_j x_j \otimes \left(\sum_k f_k^*(y_j) f_k \right) = \sum_j \sum_k f_k^*(y_j)(x_j \otimes f_k) \\ &= \sum_k \left(\sum_j f_k^*(y_j) x_j \right) \otimes f_k \end{aligned}$$

Αφού τα $\{f_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έχουμε $\sum_j f_k^*(y_j) x_j = 0$ για κάθε k από τη μοναδικότητα (Πρόταση 6). Τότε όμως,

$$\begin{aligned} \sum_j b(x_j, y_j) &= \sum_j b(x_j, \sum_k f_k^*(y_j) f_k) = \sum_j \sum_k f_k^*(y_j) b(x_j, f_k) \\ &= \sum_k b(\sum_j f_k^*(y_j) x_j, f_k) = \sum_k b(0, f_k) = 0 \end{aligned}$$

όπως θέλαμε.

Αυτό δείχνει ότι η B είναι καλά ορισμένη.

Η γραμμικότητα έπεται απ' το καλά ορισμένο: αν $u = \sum_i x_i \otimes y_i$ και $v = \sum_j z_j \otimes w_j$, τότε η $\sum_i x_i \otimes y_i + \sum_j z_j \otimes w_j$ είναι *μία* γραφή του $u + v$ οπότε $B(u + v) = \sum_i b(x_i, y_i) + \sum_j b(z_j, w_j) = B(u) + B(v)$. Επίσης $B(\lambda u) = \sum_i b(\lambda x_i, y_i) = \lambda \sum_i b(x_i, y_i) = \lambda B(u)$ αφού η b είναι διγραμμική. $\square$

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι η καθολική ιδιότητα *χαρακτηρίζει* το αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο.

Πρόταση 8 (Μοναδικότητα)**.** *Έστω G_1, G_2 δυο $\mathbb{K}$-γραμμικοί χώροι και $\pi_i : E_1 \times E_2 \to G_i$ $(i = 1, 2)$ διγραμμικές απεικονίσεις. Υποθέτουμε ότι για κάθε γραμμικό χώρο F και κάθε διγραμμική απεικόνιση $b : E_1 \times E_2 \to F$, υπάρχουν* μοναδικές *γραμμικές απεικονίσεις $B_i : G_i \to F$ $(i = 1, 2)$ ώστε $B_i \circ \pi_i = b$ $(i = 1, 2)$. Έχουμε δηλαδή μεταθετικά διαγράμματα:*

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[dr, "\exists!\, B_1"'] & E_1 \times E_2 \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "b"'] & G_2 \arrow[dl, "\exists!\, B_2"] \\
& F &
\end{tikzcd}$$

Τότε υπάρχει γραμμικός ισομορφισμός $\phi : G_1 \to G_2$ ώστε $\phi \circ \pi_1 = \pi_2$:

$$\begin{tikzcd}
& E_1 \times E_2 \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
G_1 \arrow[rr, "\phi"'] & & G_2
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την υπόθεση για $(F, b) = (G_2, \pi_2)$: έπεται ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $\phi : G_1 \to G_2$ ώστε $\phi \circ \pi_1 = \pi_2$.

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[dr, "\exists!\, \phi"'] & E_1 \times E_2 \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[d, "\pi_2"'] \\
& G_2
\end{tikzcd}$$

Δείχνουμε ότι η ϕ είναι 1-1 και επί:

Εφαρμόζοντας την υπόθεση για $(F, b) = (G_1, \pi_1)$, έπεται ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $\psi : G_2 \to G_1$ ώστε $\psi \circ \pi_2 = \pi_1$.

$$\begin{tikzcd} E_1 \times E_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & G_2 \arrow[dl, "\exists!\, \psi"] \\ G_1 & \end{tikzcd}$$

Από τις σχέσεις $\psi \circ \pi_2 = \pi_1$ και $\phi \circ \pi_1 = \pi_2$ έχουμε

$$\pi_1 = \psi \circ \pi_2 = \psi \circ \phi \circ \pi_1 \,.$$

Αυτό σημαίνει ότι η γραμμική απεικόνιση $\psi \circ \phi : G_1 \to G_1$ ικανοποιεί $\pi_1 = (\psi \circ \phi) \circ \pi_1$. Επίσης όμως ισχύει ότι $\pi_1 = \mathrm{id}_{\mathrm{G}_1} \circ \pi_1$. Από την μοναδικότητα στην υπόθεση πρέπει οι απεικονίσεις $\psi \circ \phi$ και $\mathrm{id}_{\mathrm{G}_1}$ να είναι ίσες.

Επαναλαμβάνοντας το συλλογισμό αυτό με τους ρόλους των G_1 και G_2 αντεστραμμένους, συμπεραίνουμε ότι ισχύει επίσης η ισότητα $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathrm{G}_2}$. Αυτό σημαίνει ότι η ϕ είναι 1-1 και επί (με αντίστροφο την ψ). $\square$

Έπεται ότι ο προσωρινός ορισμός δεν εξαρτάται από την αναπαράσταση $E_i \hookrightarrow \mathbb{K}^{X_i}$: Αν G είναι γραμμικός χώρος και $\otimes' : E_1 \times E_2 \to G$ διγραμμική απεικόνιση ώστε το ζεύγος $(G, \otimes')$ να έχει την καθολική ιδιότητα, τότε (αφού και το ζεύγος $(E_1 \times E_2, \otimes)$ έχει την καθολική ιδιότητα) υπάρχει γραμμικός ισομορφισμός $T : E_1 \odot E_2 \to G$ ώστε $T(x \otimes y) = x \otimes' y$ για κάθε $x \in E_1, y \in E_2$.

Μπορούμε τώρα να δώσουμε τον οριστικό ορισμό του αλγεβρικού τανυστικού γινομένου.

Ορισμός 2. *Το **αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο** δύο $\mathbb{K}$-γραμμικών χώρων E_1 και E_2 είναι ο μοναδικός (ως προς γραμμικούς ισομορφισμούς) γραμμικός χώρος $E_1 \odot E_2$ που εφοδιάζεται με μια διγραμμική απεικόνιση $\otimes : E_1 \times E_2 \to E_1 \odot E_2$ με την καθολική ιδιότητα:*

Για κάθε $\mathbb{K}$-γραμμικό χώρο F και κάθε διγραμμική απεικόνιση $b : E_1 \times E_2 \to F$ υπάρχει μοναδική *γραμμική απεικόνιση $B : E_1 \odot E_2 \to F$ ώστε $B(x \otimes y) = b(x, y)$ για κάθε $x \in E_1, y \in E_2$*

Άσκηση 1. *Δείξτε ότι $E \odot \mathbb{K} \simeq E$ μέσω της απεικόνισης $x \otimes \lambda \mapsto \lambda x$ και ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $E \odot \mathbb{K}^n \simeq E^n$ μέσω της απεικόνισης $x \otimes e_i \mapsto (0 \ldots, 0, x, 0 \ldots, 0)$ (i θέση) για $i = 1, \ldots, n$.*

2 Αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο και τελεστές χώρων Hilbert

Αν H, K είναι χώροι Hilbert, θέτουμε $E_2 = K$ και $E_1 = H^*$, τον χώρο των *συνεχών* γραμμικών μορφών $x^* : H \to \mathbb{K} : z \to \langle z, x \rangle$ όπου $x \in H$ (Θεώρημα Riesz). Κάθε $z \in H$ ορίζει μια γραμμική μορφή $\phi_z(x^*) = \langle z, x \rangle$ στον H^*, [4] άρα ο H ταυτίζεται γραμμικά με τον υπόχωρο $\{\phi_z : E_1 \to \mathbb{K} : z \in H\}$ του αλγεβρικού δυικού E_1^d του H^*.

Επομένως για κάθε $\in H^* \odot K$ η απεικόνιση $\hat{u} : E_1^d \to K$ (δες Πόρισμα 5) ορίζει μέσω περιορισμού μια απεικόνιση $\tilde{u} := \hat{u}|_H : H \to K$. Συγκεκριμένα, αν $u = \sum_i x_i^* \otimes y_i \in H^* \odot K$ έχουμε

$$\tilde{u} : H \to K : z \mapsto \sum_i \langle z, x_i \rangle y_i := \sum_i y_i x_i^*(z).$$

Παρατηρούμε ότι ο $\tilde{u}$ είναι *φραγμένος* τελεστής πεπερασμένης τάξης.
Αντίστροφα,

Πρόταση 9. *Κάθε* φραγμένος *τελεστής πεπερασμένης τάξης $T : H \to K$ είναι της μορφής $T = \hat{u}|_H$ όπου $u \in H^* \odot K$. Η απεικόνιση*

$$u \to \tilde{u} : H^* \odot K \to \mathcal{FB}(H, K)$$

είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων (όπου $\mathcal{FB}(H, K)$ ο χώρος των φραγμένων *τελεστών πεπερασμένης τάξης).*

Απόδειξη. Εύκολα ελέγχεται ότι η απεικόνιση $u \to \tilde{u}$ είναι γραμμική. Αν $\tilde{u} = 0$ τότε $\sum\limits_i y_i \phi_z(x_i^*) = 0 \in K$ για κάθε $z \in H$, άρα $u = 0$ από την κατεύθυνση $(c) \Rightarrow (a)$ της Πρότασης 2 (αφού οι $\{\phi_z, z \in H\}$ χωρίζουν τα σημεία του H^*). Συνεπώς η $u \to \tilde{u}$ είναι 1-1.

Δείχνουμε ότι είναι επί: Έστω $T : H \to K$ ένας *φραγμένος* τελεστής πεπερασμένης τάξης και $\{y_1, \dots y_n\} \subseteq K$ μια *ορθοκανονική* βάση του συνόλου τιμών του (που είναι πεπερασμένης διάστασης). Αφού κάθε $T(x)$ ανήκει στον span$\{y_i\}$, υπάρχουν αριθμοί $\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)$ στο $\mathbb{K}$ ώστε $T(x) = \sum_i \lambda_i(x) y_i$. Για κάθε j έχουμε

$$\langle T(x), y_j \rangle = \sum_i \lambda_i(x) \langle y_i, y_j \rangle = \lambda_j(x)$$

άρα (αφού T συνεχής) η απεικόνιση $x \to \lambda_j(x)$ είναι *συνεχής* γραμμική μορφή στο χώρο Hilbert H, επομένως υπάρχει διάνυσμα $x_j \in H$ ώστε $\lambda_j(x) = \langle x, x_j \rangle$. Δείξαμε ότι $T(x) = \sum_i \langle x, x_i \rangle y_i = \tilde{u}(x)$ για κάθε $x \in H$, όπου $u = \sum_i x_i^* \otimes y_i$. □

[4] Η απεικόνιση $H^* \to K : x^* \to \langle z, x \rangle$ είναι γραμμική, ως σύνθεση των αντιγραμμικών απεικονίσεων $x^* \to x \to \langle z, x \rangle$.

Άσκηση 2. *Δείξτε ότι* $H^* \odot H \simeq \mathcal{B}_\sim(H)$ *μέσω της απεικόνισης* $\sum_i x_i^* \otimes y_i \mapsto \sum_i \omega_{y_i,x_i}$.

3 Νόρμες στο τανυστικό γινόμενο χώρων Hilbert

Ορισμός 3. *Έστω* H_1, H_2 *χώροι Hilbert. Στον* $H_1 \odot H_2$ *θέτω*

$$\langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \rangle_{hs} = \langle x_1, x_2 \rangle_{H_1} \cdot \langle y_1, y_2 \rangle_{H_2} .$$

Δηλαδή αν $u = \sum_i x_i \otimes y_i$ *και* $v = \sum_i x_i' \otimes y_i'$ *τότε*

$$\langle u, v \rangle_{hs} = \sum_{i,j} \left\langle x_i, x_j' \right\rangle_{H_1} \cdot \left\langle y_i, y_j' \right\rangle_{H_2} .$$

Το $\langle \cdot, \cdot \rangle_{hs}$ *είναι καλά ορισμένο εσωτερικό γινόμενο στον* $H_1 \odot H_2$.

Ονομάζουμε $H_1 \otimes H_2$ *την πλήρωση του χώρου* $(H_1 \odot H_2, \|\cdot\|_{hs})$ *όπου* $\|u\|_{hs} := \sqrt{\langle u, u \rangle_{hs}}$.

Άσκηση 3. *Δείξτε ότι το* $\langle \cdot, \cdot \rangle_{hs}$ *είναι καλά ορισμένο εσωτερικό γινόμενο στον* $H_1 \odot H_2$.

Άσκηση 4. *Αν* $\{e_i\}_I$ *είναι ορθοκανονική βάση του* H_1 *και* $\{f_j\}_J$ *είναι ορθοκανονική βάση του* H_2*, δείξτε ότι ο* $H_1 \otimes H_2$ *έχει ορθοκανονική βάση* $\{e_i \otimes f_j\}_{I \times J}$.

Παρατήρηση Όταν $\dim H_1 < \infty$ και $\dim H_2 < \infty$, τότε $H_1 \odot H_2 = H_1 \otimes H_2$. Ειδικότερα, $\mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^k \odot \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{nk}$.

Παράδειγμα $L^2(\mu) \otimes L^2(\nu) = L^2(\pi)$ όπου π το μέτρο γινόμενο.

Έχουμε δει ότι ορίζονται γραμμικοί ισομορφισμοί

$$\Phi : H_1^* \odot H_2 \to \mathcal{FB}(H_1, H_2) : u = \sum_i x_i^* \otimes y_i \to \tilde{u} = \sum_i y_i x_i^*$$

$$\text{και} \quad \Psi : H_1^* \odot H_2 \to \mathcal{B}_\sim(H_2, H_1) : u = \sum_i x_i^* \otimes y_i \to \sum_i \omega_{y_i,x_i} .$$

(εδώ $\mathcal{B}_\sim(H_2, H_1)$ ο χώρος των wot-συνεχών γραμμικών μορφών στον $\mathcal{B}(H_2, H_1)$ και $\omega_{y,x}(A) = \langle Ay, x \rangle_{H_1}$, $A \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$.)

Μπορούμε λοιπόν να "μεταφέρουμε" τη νόρμα τελεστή από τον $\mathcal{FB}(H_1, H_2) \subseteq \mathcal{B}(H_1, H_2)$ και να ορίσουμε μια νόρμα στον $H_1^* \odot H_2$ ως εξής:

$$\|u\|_\lambda := \|\tilde{u}\|_{\mathcal{B}(H_1,H_2)} .$$

Η νόρμα $\|\cdot\|_\lambda$ ονομάζεται *injective norm*.[5]

[5] Ορίζεται γενικότερα στο αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο χώρων Banach.

Με τον ίδιο τρόπο, "μεταφέροντας" τη νόρμα από τον χώρο των γραμμικών μορφών $\mathcal{B}_{\sim}(H_2, H_1)$ (δηλ. τη νόρμα του τοπολογικού δυικού του $\mathcal{B}(H_2, H_1)$) μπορούμε να ορίσουμε μια νόρμα στον $H_1^* \odot H_2$ ως εξής:

$$\|u\|_\gamma := \|\Psi(u)\|_{\mathcal{B}_{\sim}(H_2,H_1)}\,.$$

Η νόρμα $\|\cdot\|_\gamma$ ονομάζεται *projective norm*.[6] Όπως έχουμε δείξει (για την νόρμα του $\mathcal{B}_{\sim}(H_2, H_1)$), ισχύει η ισότητα

$$\|u\|_\gamma = \inf\left\{\sum \|x_i\|\,\|y_i\| : u = \sum_i x_i^* \otimes y_i\right\}\,.$$

Ας θυμηθούμε[7] ότι σε κάθε $\omega = \sum_i \omega_{y_i,x_i} \in \mathcal{B}_{\sim}(H_2, H_1)$ αντιστοιχεί ένας τελεστής $T_\omega = \sum_i y_i x_i^* \in \mathcal{FB}(H_1, H_2)$. Δηλαδή, αν $u \in H_1^* \odot H_2$ και $\omega = \Psi(u)$, τότε $T_\omega = \Phi(u) = \tilde{u}$. Είχαμε δείξει επίσης ότι ο τελεστής αυτός μπορεί να γραφεί $T_\omega = \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k e_k^*$, όπου και οι δυο οικογένειες $\{f_k\}$ και $\{e_k\}$ είναι ορθοκανονικές και οι λ_k είναι θετικοί αριθμοί, είναι οι ιδιοτιμές του τελεστή $|T_\omega| = (T_\omega^* T_\omega)^{1/2}$.

Έστω $u \in H_1^* \odot H_2$. Θέτουμε $\omega = \Psi(u)$, οπότε $T_\omega = \tilde{u} = \Phi(u)$. Έπεται ότι το u μπορεί να γραφεί $u = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \otimes f_k$, και

$$\begin{aligned}\|u\|_\lambda &= \|\tilde{u}\| = \||T_\omega|\| = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \lambda_k \\ \|u\|_\gamma &= \|\Psi(u)\| = \|\omega\| = \sum_{k=1}^n \lambda_k = \mathrm{tr}(|T_\omega|)\,.\end{aligned}$$

Επίσης, επειδή και οι δυο οικογένειες $\{f_k\}$ και $\{e_k\}$ είναι ορθοκανονικές, μπορεί κανείς να δείξει (*Άσκηση!*) ότι $\langle u, u\rangle_{hs} = \sum_k \lambda_k^2$ και άρα

$$\|u\|_{hs} = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^2\right)^{1/2} = (\mathrm{tr}(T_\omega^* T_\omega))^{1/2}\,.$$

Κατά συνέπεια,

$$\|u\|_\lambda \leqslant \|u\|_{hs} \leqslant \|u\|_\gamma \quad \forall u \in H_1^* \odot H_2\,.$$

[6] Και αυτή ορίζεται στο αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο χώρων Banach.
[7] Δείτε το `ask1920dlys.pdf`

Η απεικόνιση

$$\Phi : (H_1^* \odot H_2, \|\cdot\|_\lambda) \to (\mathcal{FB}(H_1, H_2), \|\cdot\|_{\mathcal{B}(H_1,H_2)})$$

είναι ισομετρία. Συνεπώς η πλήρωση $H_1^* \otimes_\lambda H_2$ του $(H_1^* \odot H_2, \|\cdot\|_\lambda)$ είναι ισομετρικά ισόμορφη με την κλειστή θήκη του χώρου $\mathcal{FB}(H_1, H_2)$ στον $\mathcal{B}(H_1, H_2)$. Αυτή η κλειστή θήκη είναι ο χώρος $\mathcal{K}(H_1, H_2)$ των συμπαγών τελεστών $H_1 \to H_2$.

Από την άλλη μεριά, ο χώρος $\mathcal{FB}(H_1, H_2)$ μπορεί να εφοδιασθεί και με την trace norm, $\|T\|_t := \mathrm{tr}(|T|)$. Όπως είδαμε προηγουμένως, αν $u \in H_1^* \odot H_2$, τότε $\|u\|_\gamma = \sum_{k=1}^n \lambda_k = \mathrm{tr}(|\tilde{u}|)$. Δηλαδή η απεικόνιση

$$(H_1^* \odot H_2, \|\cdot\|_\gamma) \to (\mathcal{FB}(H_1, H_2), \|\cdot\|_t)$$

είναι ισομετρία. Αυτό σημαίνει ότι η πλήρωση $H_1^* \otimes_\gamma H_2$ ως προς την $\|\cdot\|_\gamma$ είναι ισομετρικά ισόμορφη με την κλειστή θήκη $\mathcal{T}(H_1, H_2)$ του χώρου των πεπερασμένης τάξης φραγμένων τελεστών, ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_t$. Ο $\mathcal{T}(H_1, H_2)$ είναι ο χώρος των τελεστών trace class. Αφού $\|\cdot\|_t \geqslant \|\cdot\|_{\mathcal{B}(H_1,H_2)}$, έπεται ότι $\mathcal{T}(H_1, H_2) \subseteq \mathcal{K}(H_1, H_2)$. [8] [9]

Από την άλλη μεριά, η απεικόνιση

$$\Psi : (H_1^* \odot H_2, \|\cdot\|_\gamma) \to (\mathcal{B}_\sim(H_2, H_1), \|\cdot\|_{\mathcal{B}_\sim(H_2,H_1)})$$

είναι επίσης ισομετρία. Συνεπώς η πλήρωση $H_1^* \otimes_\gamma H_2$ είναι επίσης ισομετρικά ισόμορφη με την κλειστή θήκη του χώρου $\mathcal{B}_\sim(H_2, H_1)$ στον τοπολογικό δυικό του $\mathcal{B}(H_2, H_1)$. Αυτή η κλειστή θήκη συμβολίζεται $\mathcal{B}_*(H_2, H_1)$ και αποτελείται από τις ασθενώς* συνεχείς γραμμικές μορφές στον $\mathcal{B}(H_2, H_1)$.

Έχουμε δείξει ότι ο δυικός του $\mathcal{B}_\sim(H)$, άρα και της πλήρωσής του $\mathcal{B}_*(H)$, είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\mathcal{B}(H)$. Συμπέρασμα: ο δυικός του $H^* \otimes_\gamma H$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\mathcal{B}(H)$.

Συνοψίζοντας, ο χώρος $(H_1^* \odot H_2, \|\cdot\|_\gamma)$ είναι ισομετρικός με τον χώρο $(\mathcal{T}(H_1, H_2), \|\cdot\|_t)$ των τελεστών trace class, και είναι επίσης ισομετρικός με τον χώρο $(\mathcal{B}_*(H_2, H_1), \|\cdot\|_{\mathcal{B}(H_2,H_1)^*})$ των ασθενώς* συνεχών γραμμικών μορφών στον $\mathcal{B}(H_2, H_1)$.

Ο δυικός αυτού του χώρου Banach είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\mathcal{B}(H_2, H_1)$.

[8] Αν μια ακολουθία από τον $\mathcal{FB}(H_1, H_2)$ είναι βασική ως προς την $\|\cdot\|_t$, τότε είναι βασική και ως προς την $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(H_1,H_2)}$, επομένως το όριό της είναι συμπαγής τελεστής.

[9] *Πληροφορίες:* Ο χώρος των τελεστών *Hilbert-Schmidt* $\mathcal{C}_2(H_1, H_2)$ είναι η κλειστή θήκη του χώρου των πεπερασμένης τάξης φραγμένων τελεστών, ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_{HS}$ που ορίζεται από $\|T\|_{HS} = \sqrt{\mathrm{tr}(T^*T)}$. Ο χώρος αυτός είναι χώρος Hilbert, ισομετρικά ισόμορφος με τον $(H_1^* \otimes H_,, \|\cdot\|_{hs})$. Ισχύει ότι $\mathcal{T}(H_1, H_2) \subseteq \mathcal{C}_2(H_1, H_2) \subseteq \mathcal{K}(H_1, H_2)$ (πρβλ. $\ell^1 \subseteq \ell^2 \subseteq \ell^\infty$).