Για τη μοναδοποίηση μιας C* άλγεβρας

Πρόταση 1. *Αν $\mathcal{A}$ είναι μια C* άλγεβρα χωρίς μονάδα, υπάρχει μια C* άλγεβρα $\mathcal{A}_1$ στην οποία η $\mathcal{A}$ εμφυτεύεται ως μεγιστικό ιδεώδες (με συνδιάσταση 1).*

Ως γραμμικός χώρος, η $\mathcal{A}_1$ είναι (ισομορφική με) το ευθύ άθροισμα $\mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$. Τα στοιχεία της $\mathcal{A}_1$ γράφονται $a + \lambda\mathbf{1}$ αντί για (a, λ) (όπου $a \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$). Ο πολλαπλασιασμός και η ενέλιξη ορίζονται ως εξής

$$(a + \lambda\mathbf{1}) \cdot (b + \mu\mathbf{1}) := ab + \lambda b + \mu a + \lambda\mu\mathbf{1}$$
$$(a + \lambda\mathbf{1})^* := a^* + \bar{\lambda}\mathbf{1}\,.$$

Ο ευκολότερος τρόπος να ορίσει κανείς νόρμα στην $\mathcal{A}_1$ ως προς την οποία θα είναι C* άλγεβρα είναι να χρησιμοποιήσει το Θεώρημα Gelfand - Naimark:

Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, υπάρχει ένας χώρος Hilbert H και ένας *ισομετρικός* *-μορφισμός $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$. "Μεταφέροντας" λοιπόν τη νόρμα του $\mathcal{B}(H)$ στην $\mathcal{A}_1$ μπορούμε να ορίσουμε

$$\|a + \lambda 1\| := \|\pi(a) + \lambda I\|_{\mathcal{B}(H)}\,.$$

Δηλαδή έχουμε "ταυτίσει" την $\mathcal{A}_1$ με το ευθύ [1] άθροισμα $\pi(\mathcal{A}) + \mathbb{C}I \subseteq \mathcal{B}(H)$ που είναι *-υπάλγεβρα της $\mathcal{B}(H)$. Ελέγχεται άμεσα ότι η $\|\cdot\|$ είναι πράγματι νόρμα στην $\mathcal{A}_1$ και ότι ικανοποιεί την ιδιότητα C* (γιατί η $\mathcal{B}(H)$ την ικανοποιεί).

Μένει να δειχθεί ότι η $\|\cdot\|$ είναι πλήρης νόρμα στην $\mathcal{A}_1$, ή ισοδύναμα ότι ο γραμμικός χώρος $\pi(\mathcal{A}) + \mathbb{C}I$ είναι πλήρης ως προς τη νόρμα του $\mathcal{B}(H)$.

Αρκεί γι αυτό (αφού ο $\mathcal{B}(H)$ είναι πλήρης) να δείξουμε ότι ο $\pi(\mathcal{A}) + \mathbb{C}I$ είναι κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{B}(H)$. Όμως, ο $\pi(\mathcal{A})$ είναι πλήρης (αφού η π είναι ισομετρία) άρα κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{B}(H)$, και $I \notin \pi(\mathcal{A})$. Συνεπώς υπάρχει μια συνεχής γραμμική μορφή $\phi : \mathcal{B}(H) \to \mathbb{C}$ που μηδενίζει τον $\pi(\mathcal{A})$ αλλά όχι τον I (Hahn-Banach!). Επομένως αν μια ακολουθία $(\pi(a_n) + \lambda_n I)_n$ συγκλίνει στον $\mathcal{B}(H)$, τότε και η εικόνα της $(\phi(\pi(a_n) + \lambda_n I))_n$ θα συγκλίνει στον $\mathbb{C}$, οπότε η $(\lambda_n \phi(I))_n$ θα συγκλίνει, άρα θα υπάρχει το $\lambda := \lim_n \lambda_n$. Τότε όμως θα συγκλίνει και η $(\pi(a)n))_n = (\pi(a_n) + \lambda_n I)_n - (\lambda_n I)_n$. Αφού η π είναι ισομετρία, η $(a_n)_n$ θα είναι βασική ακολουθία στην $\mathcal{A}$, οπότε θα υπάρχει και το $a := \lim_n a_n \in \mathcal{A}$. Έτσι τελικά έχουμε $\lim_n(\pi(a_n) + \lambda_n I) = \pi(a) + \lambda I \in \pi(\mathcal{A}) + \mathbb{C}I$, άρα ο $\pi(\mathcal{A}) + \mathbb{C}I$ είναι κλειστός.

Ορισμός 1. *Για κάθε $a \in \mathcal{A}$ ορίζουμε*

$$\sigma(a) := \sigma_{\mathcal{A}_1}(a)\,.$$

Αλλά ένα στοιχείο $a = b + \lambda 1$ της $\mathcal{A}_1$ είναι αντιστρέψιμο στην $\mathcal{A}_1$ αν και μόνον αν η εικόνα του $\pi(b) + \lambda I$ είναι αντιστρέψιμο στοιχείο της C* άλγεβρας $\pi(\mathcal{A}) + \mathbb{C}I$, ή ισοδύναμα, αντιστρέψιμο στοιχείο του $\mathcal{B}(H)$.

Επομένως το φάσμα του a είναι το φάσμα του τελεστή $\pi(a)$ στον $\mathcal{B}(H)$.

Παρατηρούμε ότι, εφόσον τα στοιχεία της $\mathcal{A}$ δεν είναι αντιστρέψιμα (αλλιώς η $\mathcal{A}$ θα είχε μονάδα) ισχύει ότι $0 \in \sigma(a)$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$.

Πρόταση 2. *Έστω $a \in \mathcal{A}$ αυτοσυζυγές και $f : \sigma(a) \to \mathbb{C}$ συνεχής. Το στοιχείο $f(a)$ της $\mathcal{A}_1$ (που ορίζεται μέσω του συναρτησιακού λογισμού) ανήκει στην $\mathcal{A}$ αν και μόνον αν $f(0) = 0$.*

[1] πράγματι, αν $\pi(\mathcal{A}) \cap \mathbb{C}I \neq \{0\}$, η $\pi(\mathcal{A})$ θα περιείχε τον I, οπότε η $\mathcal{A}$ θα είχε μονάδα

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\chi : \mathcal{A}_1 \to \mathbb{C} : b + \lambda \mathbf{1} \to b\,.$$

Είναι γραμμική και συνεχής και $\ker \chi = \mathcal{A}$. Επομένως $f(a) \in \mathcal{A} \iff \chi(f(a)) = 0$. Επίσης, για κάθε πολυώνυμο $p(t) = c_0 + c_1 t + \ldots, + c_k t^k$, παρατηρούμε ότι $\chi(p(a)) = c_0 = p(0)$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής συνάρτηση στο συμπαγές $\sigma(a)$, συνεπώς προσεγγίζεται ομοιόμορφα στο $\sigma(a)$ από πολυώνυμα (p_n). Έχουμε λοιπόν $\lim_n \|f(a) - p_n(a)\| = 0$ και συνεπώς $\chi(f(a)) = \lim_n \chi(p_n(a)) = \lim_n p_n(0) = f(0)$. Τελικώς λοιπόν

$$f(a) \in \mathcal{A} \iff \chi(f(a)) = 0 \iff f(0)\,.$$

□

Πρόταση 3. *Κάθε αυτοσυζυγές στοιχείο $a \in \mathcal{A}$ γράφεται $a = a_+ - a_-$ όπου τα a_+, a_- είναι θετικά στοιχεία με $a_+ a_- = 0$ και ανήκουν στην $\mathcal{A}$.*

Απόδειξη. Ας θυμηθούμε ότι $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(t) = |t|, t \in \mathbb{R}$. Είναι συνεχής συνάρτηση στο συμπαγές $\sigma(a)$ και ικανοποιεί $f(0) = 0$. Έπεται ότι το όριο $f(a)$ θα ανήκει στην $\mathcal{A}$.

Θέτοντας τώρα

$$a_+ := \frac{1}{2}(f(a) + a), \quad a_- := \frac{1}{2}(f(a) - a)$$

έχουμε τα στοιχεία του $\mathcal{A}$ που θέλαμε.

Πράγματι, είναι και τα δύο αυτοσυζυγή, γιατί η f παίρνει πραγματικές τιμές.
Επίσης, $\sigma(a_-) = \{\frac{1}{2}(|t| - t) : t \in \sigma(a)\} \subseteq \mathbb{R}_+$ άρα $a_- \in \mathcal{A}_+$ και ομοίως $a_+ \in \mathcal{A}_+$. Και τέλος $a_+ a_- = 0$ γιατί $(|t| - t)(|t| + t) = 0$ για κάθε $t \in \sigma(a)$. □