15 Φεβ 18

C*-άλγεβρες και αναπαραστάσεις:

$\mathcal{A}$: C*-άλγεβρα
- άλγεβρα (μιγαδική)
- χώρος Banach
- $\|ab\| \leq \|a\|\,\|b\|$

(άλγ Banach)

- έχει ενέλιξη $a \longmapsto a^*$ (αντιγραμμική, $a^{**} = a$, $(ab)^* = b^* a^*$)
- $\|a^* a\| = \|a\|^2$!

πχ $C(K)$ K: συμπαγής T_2

πχ $\mathcal{B}(H)$ H: Hilbert

$$\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(H) \quad *\text{-μορφισμός}$$

$$\Downarrow$$

$$\|\pi(a)\| \leq \|a\| \quad \forall a \in \mathcal{A}$$

και μάλιστα, αν η π είναι 1-1 τότε $\|\pi(a)\| = \|a\|$ $\forall a \in \mathcal{A}$

π μη εκφυλισμένη:

$\{\pi(a)\xi : \xi \in H, a \in \mathcal{A}\}$ πυκνό στον H

$\Updownarrow$

δηλ $\forall \eta \in H$ $\forall \epsilon > 0$ $\exists \xi \in H, a \in \mathcal{A}$: $\|\pi(a)\xi - \eta\| < \epsilon$

μάλιστα $\pi(\mathcal{A})H = H$ πολλές φορές

$\forall \eta \in H$ $\exists a \in \mathcal{A}, \xi \in H$: $\eta = \pi(a)\xi$

Κατηγορίες τελεστών:

$S \in \mathcal{B}(\ell^2)$: $Se_n = e_{n+1} \quad \forall n$

$$S^* e_n = \begin{cases} e_{n-1}, & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$$

όπως:

$$S^* S e_n = S^*(e_{n+1}) = e_n : \quad \forall n$$

$$\Downarrow$$

$$S^* S x = x \quad \forall x \in \ell^2$$

$$\Downarrow$$

$$S^* S = I$$

Ενώ αν το κάνω ανάποδα

$$S S^*(e_0) = S(0) = 0$$

$$S S^* \neq I$$

<u>Παρ/δ</u>:

$f \in L^\infty([0,1], m)$: $M_f \curvearrowright L^2([0,1])$

$$M_f(g) = fg$$

τους (δεν) δείξαμε

$(M_f)^* = M_{\bar{f}}$ άρα μετατίθεται με τον M_f

$\{M_f : f \in L^\infty\}$ αποτελείται από φυσιολ. τελ.

Φάσμα

X: (μιγ.) γραμμικός χώρος άπειρης διάστασης $T: X \to X$ γραμμ.

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ όχι } 1\text{-}1\}$$

$$= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ όχι αντιστρέψιμος}\} =: \sigma(T)$$

Σε απειροδιάστατους χώρους

$$\sigma_p(T) \subseteq \sigma(T)$$

$=$ όχι πάντα

Κλασικό παράδ. (Άσκηση):

$$X = L^2([0,1])$$

$$(Tf)(t) = t f(t)$$

$$\sigma_p(T) = \emptyset \quad \text{όμως} \quad \sigma(T) = [0,1]$$

(X,μ) χώρος μέτρου, θα δούμε με ποιούς περιορισμούς.
$f\in L^\infty(X,\mu)$, ορίζουμε

$$M_f\in\mathcal{B}(L^2(\mu)) \qquad M_f g = fg \quad \text{σ.π.}$$

$$\sigma(M_f) = \{\lambda\in\mathbb{C} : \underbrace{\lambda I - M_f}_{\substack{\parallel \\ M_{(\lambda - f)}}} \notin Inv(\mathcal{B}(L^2(\mu)))\}$$

αντικαθιστώντας τη f με τη $f-\lambda$

εξετάζω πότε ο τελεστής M_f είναι αντιστρέψιμος

$$L^\infty(\mu) \longrightarrow \mathcal{B}(L^2(\mu))$$
$$f \longmapsto M_f \qquad (\text{: αναπαράσταση πιστή})$$

$$M_f\in Inv(\mathcal{B}(L^2(\mu)))$$
$$\Updownarrow$$
$$f\in Inv(L^\infty(\mu))$$

<u>Απόδ.</u> Η εύκολη κατεύθυνση: αν $f\in Inv(L^\infty(\mu))$
<u>δηλ.</u> αν $\exists\, g\in L^\infty(\mu) : fg = gf = \mathbb{1}$
τότε προφανώς

$$\Downarrow$$

$$M_f M_g = M_g M_f = M_{\mathbb{1}} = I$$

οπότε ο $M_f\in Inv(\mathcal{B}(L^2(\mu)))$

Αντίστροφα: Υποθέτω ότι ο $M_f\in Inv(\mathcal{B}(L^2(\mu)))$
<u>δηλαδή</u> $\exists\, T\in\mathcal{B}(L^2(\mu))$:
$$M_f T = T M_f = I$$
Ψάχνω να βρω $g\in L^\infty(\mu)$ ώστε $T = M_g$
Ξέρω βέβαια ότι $f\neq 0$ διότι $\|M_f\|\neq 0$

<u>Ισχ.</u> $f(t)\neq 0$ σχεδόν $\forall t$

<u>Απόδ.</u> Αν $\exists\, E\subseteq X$ μετρήσιμο
$\mu(E)>0$ ώστε $f|_E = 0$

τότε παίρνω $h = \chi_E\in L^2(\mu)$ (??)
και τότε ~~$M_f(h) = f\chi_E$~~ $= 0$?

Χρειαζόμαστε περιορισμούς στο (X,μ) πχ αρκεί το μέτρο να είναι σ-πεπερασμένο

ένα $F\subseteq E$ μετρήσιμο με
$0<\mu(F)<+\infty$
και $h=\chi_F$ οπότε θα έχουμε $M_f(h) = 0$
άτοπο διότι ο M_f είναι 1-1

Οπως η $g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$ ορίζεται σ.π. και ενα μετρησιμη

και $fg = gf = \mathbb{1}$ σχ. π.

Δεν φτάνει αυτό!

$\underline{I\sigma x}$ g είναι ουσιωδώς φραγμ.

$\underline{\text{Αποδ}}$ $\forall h \in L^2(\mu)$ επειδη $M_f T = I$

εχουμε

$$M_f T(h) = h \qquad Th \in L^2(\mu)$$

δηλ

$$f(Th) = h \quad \sigma.\pi.$$

$$\Downarrow$$

$$f(t)\,(Th)(t) = h(t) \quad \sigma\chi. \text{ όλα } \forall t$$

$$\Downarrow$$

$$(Th)(t) = \frac{1}{f(t)}\,h(t) \qquad ''$$

$$\Downarrow$$

$$(Th)(t) = g(t)\,h(t) \qquad ''$$

$$\Downarrow$$

$$Th = gh$$

οπότε $\underline{\|gh\|_2} = \|Th\|_2 \leq \underline{\|T\|\,\|h\|_2} \quad \forall h \in L^2$

$$\Downarrow \text{ (ασκ)}$$

$$|g(t)| \leq \|T\| \quad \sigma\chi. \text{ όλα } \forall t$$

οπότε $g \in L^\infty(\mu)$ και μάλιστα $\|g\|_\infty \leq \|T\|$

Συμπέρασμα: $\exists g \in L^\infty(\mu)$ ωστε $fg = gf = \mathbb{1}$

δηλ $f \in \mathrm{Inv}(L^\infty(\mu))$ ▨

Δείξαμε ότι:

Αν ο M_f έχει αντίστροφο στο $\mathcal{B}(L^2(\mu))$ τότε έχει αντίστροφο στην $\{M_g : g \in L^\infty(\mu)\}$

$\sigma(M_f) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - M_f$ δεν έχει αντιστρ$\}$

Ξέρω $\lambda I - M_f$ δεν έχει αντιστρ.

$$\Updownarrow$$

$\lambda - f$ δεν έχει αντιστρ στο $L^\infty(\mu)$

$$\Updownarrow$$

$\frac{1}{\lambda - f}$ δεν ορίζεται ή δεν είναι ουσ φραγμ

$$\Updownarrow$$

$\nexists\, M < +\infty$ ώστε $\frac{1}{|\lambda - f(t)|} \le M$ σχεδόν $\forall t$

$$\Updownarrow$$

$\forall \delta = \frac{1}{M}$: σχεδόν $\forall t$ $|\lambda - f(t)| \geq \frac{1}{M}$

το σύν. $\underbrace{\{t : |\lambda - f(t)| < \delta\}}$ έχει θετικό μέτρο

Έστω $\mathcal{A}$ άλγ. Banach με $\mathbb{1}\in\mathcal{A}$, $x\in\mathcal{A}$

ν.δ.ο. $\sigma(x)\neq\emptyset$ συμπαγές

- Έστω $\lambda\in\mathbb{C} : |\lambda|>\|x\|$: $\left\|\frac{x}{\lambda}\right\|<1$

τότε $\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n\right\| \le \sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{x}{\lambda}\right\|^n < +\infty$

γεωμ. σειρά με $w<1$

και η $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n$ συγκλίνει απόλυτα, άρα συγκλίνει (πληρότητα)

τότε συγκλίνει και η $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\lambda^{n+1}}$

στο ίσο $=(\lambda\mathbb{1}-x)^{-1}$ διότι

$$(\lambda\mathbb{1}-x)\sum_{n=0}^{N}\frac{x^n}{\lambda^{n+1}} = \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{x^n}{\lambda^n}-\frac{x^{n+1}}{\lambda^{n+1}}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{x^n}{\lambda^{n+1}}(\lambda\mathbb{1}-x) = \mathbb{1}-\frac{x^{N+1}}{\lambda^{N+1}} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

$\left\|\frac{x}{\lambda}\right\|<1$

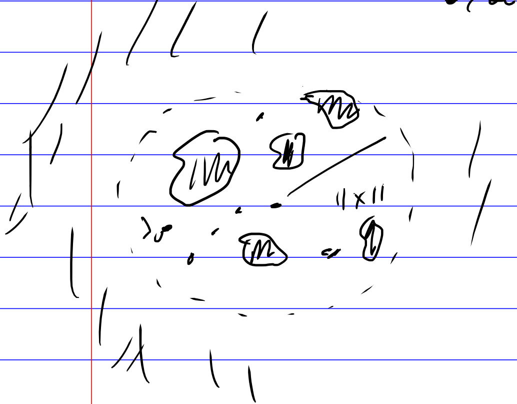
οπότε: $(\lambda\mathbb{1}-x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\lambda^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\lambda^{n+1}}(\lambda\mathbb{1}-x)=\mathbb{1}$

δηλαδή $(\lambda\mathbb{1}-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\lambda^{n+1}}$, $|\lambda|>\|x\|$

γράφω $r_\lambda(x) :=$ ↑

άρα $\sigma(x)\subseteq\{\lambda\in\mathbb{C} \;\; |\lambda|\le\|x\|\}$

⇒ φραγμ.



Παίρνω $\varphi : \mathcal{A}\to\mathbb{C}$ γραμμ. + συνεχή

όταν $|\lambda|>\|x\|$:

$$\varphi(r_\lambda(x)) = \sum_{n=0}^{\infty}\overbrace{\varphi(x^n)}^{\in\mathbb{C}}\frac{1}{\lambda^{n+1}}$$

σειρά Laurent στο $|\lambda|>\|x\|$

$f(\lambda)=\varphi(r_\lambda(x))$ έχει σειρά Laurent στο $|\lambda|>\|x\|$

- Παρατηρώ:

$$|f(\lambda)| \le \sum_{n=0}^{\infty}|\varphi(x^n)|\frac{1}{|\lambda|^{n+1}}$$

(αφού $|\varphi(x^n)|\le\|\varphi\|\|x^n\|\le\|\varphi\|\|x\|^n$):

$$\le \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{\infty}\|\varphi\|\frac{\|x\|^n}{|\lambda|^n}$$

$$= \frac{\|\varphi\|}{|\lambda|}\left(1-\frac{\|x\|}{|\lambda|}\right)^{-1}$$

$\forall\ |\lambda|>\|x\|$

$\to 0$ όταν $|\lambda|\to\infty$

Ισχ. Το $\sigma(x)$ είναι κλειστό δηλ. το $\mathbb{C}\setminus\sigma(x)$ είναι ανοιχτό

Απόδ. Παίρνω $\lambda_0 \in \mathbb{C}\setminus\sigma(x)$

ισχ. ότι $\exists \rho>0 : B(\lambda_0,\rho) \subseteq \mathbb{C}\setminus\sigma(x)$

και η $\lambda \longmapsto R_\lambda(x)$

ορίζεται και έχει ΔΣ

στη $B(\lambda_0,\rho)$

Απόδ.

Έστω $|\lambda-\lambda_0| < \dfrac{1}{\|R_{\lambda_0}(x)\|}$ $(:=\rho)$

ονομάζω $\mu = \lambda_0 - \lambda \in \mathbb{C}$ και $z = R_{\lambda_0}(x)$

τότε έχω $\|\mu z\| < 1$

τότε συγκλίνει η σειρ. $\sum_{n=0}^{\infty} (\mu z)^n$

άρα και η $\sum_{n=0}^{\infty} \mu^n z^{n+1} = z\left(1\!\!1 - \mu z\right)^{-1}$

$= \left(\left(1\!\!1 - \mu z\right) z^{-1}\right)^{-1}$

$= \left(\left(1\!\!1 - \mu z\right)\left(\lambda_0 1\!\!1 - x\right)\right)^{-1}$

$= \left(\left(\lambda_0 1\!\!1 - x\right) - \underset{\lambda_0-\lambda}{\mu} 1\!\!1\right)^{-1} = \left(\lambda 1\!\!1 - x\right)^{-1}$

έδειξα ότι $\left(\lambda 1\!\!1 - x\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lambda_0-\lambda\right)^n \left(\lambda_0 1\!\!1 - x\right)^{-(n+1)}$

Επομένως: (i) $\lambda \notin \sigma(x)$ άρα $B\left(\lambda_0, \dfrac{1}{\|R_{\lambda_0}(x)\|}\right) \subseteq \mathbb{C}\setminus\sigma(x)$

και (ii) φύσει στην μπάλα η συνάρτηση

$\lambda \mapsto R_\lambda(x)$ έχει ΔΣ

η αλλιώς

η $f(\lambda) = \varphi\left(\left(\lambda 1\!\!1 - x\right)^{-1}\right)$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi\left(\left(\lambda_0 1\!\!1 - x\right)^{-n-1}\right)\left(\lambda_0-\lambda\right)^n$

έχει ΔΣ στη f με κέντρο λ_0

άρα η f είναι ολόμορφη στη μπάλα

αυτή

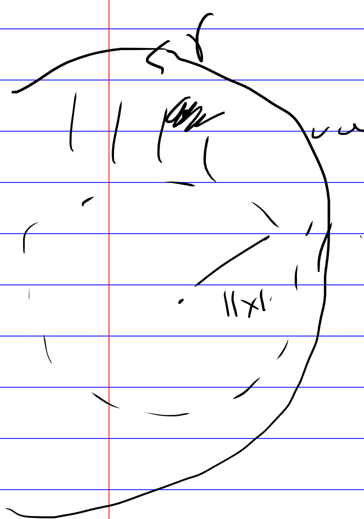
Έδειξα ότι $\left(\forall \varphi : A \to \mathbb{C} \right.$ γραμμ. συνεχή(?) η $f(\lambda) = \varphi\left((\lambda 1 - x)^{-1}\right)$

ορίζεται και είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} - \sigma(x)$

- Έστω τώρα ότι $\sigma(x) = \emptyset$

Τότε $\forall \varphi : A \to \mathbb{C}$ γραμμ. και συνεχή

$\lambda \mapsto f(\lambda)$ είναι ακέραια.



και όπως έδειξα πριν, $\forall |\lambda| > \|x\|$ έχω ανάπτυγμα

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(x^n) \frac{1}{\lambda^{n+1}}$$

η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα. Στα συμπαγή $\subseteq \left(B(0, \|x\|)\right)^c$

Οπότε $\forall\ \gamma(t) = \rho e^{it}$, με $\rho > \|x\|$

μπορώ να $\int$ω:

$$\int_\gamma f(\lambda) d\lambda \overset{\text{ομοιομ. συγκλ.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(x^n) \int_\gamma \frac{1}{\lambda^{n+1}} d\lambda$$

0 εκτός από $n=0$

$$\underbrace{\int_\gamma f(\lambda) d\lambda}_{0} = \varphi(x^0) \underbrace{\int \frac{1}{\lambda} d\lambda}_{2\pi i}$$

0 λόγω Cauchy

$0 = \varphi(1)\, 2\pi i \quad \forall \varphi : A \to \mathbb{C}$ γραμμ. συνεχή

$1 \neq 0$

από H-B $\exists \varphi : A \to \mathbb{C}$ γραμμ. + συνεχής

$\varphi(1) \neq 0$

Άτοπο!