8/2/2018

Μια παρατήρηση: X: χώρος Banach

$E, F \subseteq X$

κλειστοί υπόχωροι, $E \cap F = \{0\}$

$E + F = X$

τότε $\forall x \in X$ γράφεται μοναδικά:

$x = \overset{\in E}{e} + \overset{\in F}{f}$

η απεικόνιση: $P: \begin{array}{l} X \longrightarrow X \\ x \longmapsto e \end{array}$

καλά ορισμένη + γραμμική

Μπορεί να αποδειχθεί με το : Θεώρημα κλ. γραφήματος ότι P συνεχής

Όμως αν έχω μόνο $\overline{E+F} = X$ και $E \cap F = \{0\}$

τότε η P που ορίζεται στο $E+F$

δεν είναι πάντα συνεχής.

$\mathcal{H}$: Hilbert, διαχ., $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ον βάση

$$\mathcal{H} \longrightarrow \ell^2$$

$$U : x \longmapsto (\langle x, x_n \rangle)_{n=1}^{\infty}$$

Ξέρω ήδη ότι U γραμμική ισομετρία

Ισχυρ. Η U είναι επί

Απόδ. $\forall (a_n) \in \ell^2$ να βρώ $x \in \mathcal{H}$:

ώστε $\langle x, x_n \rangle = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

αφού $(a_n) \in \ell^2$, ικανοποιεί $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$

άρα $\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 : \sum_{k > n_0} |a_k|^2 < \epsilon$

οπότε, $\forall n \in \mathbb{N}$ ονομάζω

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \in \mathcal{H}$$

τότε $\forall n > m \geq n_0$:

$$\|y_n - y_m\|^2 = \Big\|\sum_{k=m+1}^{n} a_k x_k\Big\|^2$$

$\overset{\text{Πυθ.}}{=}$

$$\sum_{k=m+1}^{n} |a_k|^2 \underbrace{\|x_k\|^2}_{1} < \epsilon \quad \text{για } m \geq n_0$$

οπότε έδειξα ότι (y_n) είναι βασική στον $\mathcal{H}$

Επειδή έχω πληρότητα (!)

$$\exists x = \lim y_k \in \mathcal{H}$$

τότε $\forall n, \ \langle x, x_n \rangle = \lim_{k \to \infty} \langle y_k, x_n \rangle = a_n$

οπότε $Ux = (\langle x, x_n \rangle) = (a_n)$ ∎

$\mathcal{B}(E,F) := \{ T : E \to F$ γραμμικοί, $\|T\| < +\infty \}$

ορίζω τις πράξεις ως :

$(T+\lambda S) : E \to F$ που :

$$(T+\lambda S)(x) = T(x) + \lambda S(x) \in F$$

ορίζεται $T+\lambda S$ που είναι
και γραμμική
και
$\|T+\lambda S\| < +\infty$

(επίσης : $T \mapsto \|T\|$ είναι νόρμα
στο $\mathcal{B}(E,F)$)

διότι $\|T+S\| \le \|T\| + \|S\|$
$\|\lambda T\| = |\lambda| \, \|T\|$
και
$\|T\| = 0 \Rightarrow \|Tx\|_F = 0 \quad \forall x \in E$
$\Rightarrow T = 0$

Θεώρ. Αν ο $(F, \|\ \|)$ είναι πλήρης
τότε ο $\mathcal{B}(E,F)$ πλήρης.

<u>Θεώρημα</u> $(E, \| \ \|)$ με νόρμα, $(F, \| \ \|)$ Banach

$D \subseteq E$
↑ γραμμικός υπόχ., πυκνός

$T : D \to F$ γραμμική

T συνεχής $\Longrightarrow$ $\exists!\ \tilde{T} : E \to F$ γραμμ. + συν. ώστε $\|\tilde{T}\| = \|T\|$
$(\Longleftarrow)$ (προφανές)

⟹ ΔΕΣ ΚΑΛΥΤΕΡΑ ΤΟ ΑΡΧΕΙΟ extend.pdf

<u>Απόδ.</u> Έστω $x \in E$ να ορίσω $\tilde{T}(x)$

$\overline{D} = E \Longrightarrow \exists (x_\nu) : x_\nu \in D : x_\nu \to x$

Υποψήφιο: $\tilde{T}(x) = \lim T(x_n)$

(1) Υπάρχει το όριο;

(2) μήπως εξαρτάται από την (x_ν)

(1) ΝΑΙ διότι η $(T(x_\nu))$ είναι βασική και ο F πλήρης

πράγματι, $\|T(x_\nu) - T(x_n)\|_F = \|T(x_\nu - x_n)\| \overset{T \text{ φρ}}{\leq} \|T\|\,\|x_\nu - x_n\|_E$

όμως (x_ν) συγκλίνει, άρα βασική
επομένως $(T(x_\nu))$ βασική
άρα το $\lim T(x_\nu)$ υπάρχει στο F

(2) <u>ΟΧΙ</u> διότι αν (x'_ν), $x'_\nu \in D$, $x'_\nu \to x$
τότε $\|x_\nu - x'_n\|_E \to 0$

$\Downarrow$

$\|T(x_\nu) - T(x'_\nu)\|_F \leq \|T\|\,\|x_\nu - x'_\nu\| \to 0$

$\to \lim T(x_\nu) = \lim T(x'_\nu)$

Επομένως $\forall x \in \bar{E}$ έχω ορισμένη καλά

$$\tilde{T}(x) = \lim_n T(x_n) \quad \text{όπου } x_n \in D \text{ και } x_n \to x$$

Πρόταση $\tilde{T}|_D = T$ **Απόδ.** $\forall x \in D$ παίρνω $x_n = x$ $\forall n$

Πρόταση $\tilde{T}$ είναι γραμμική.

Απόδ. Εύκολο! (κ.σ. όριο γραμμικών)

Πρόταση $\forall x, y \in \bar{E}$, $\lambda \in \mathbb{K}$

τότε $\exists (x_n), (y_n)$ στο D

τ.ω. $x_n \to x$, $y_n \to y$

οπότε $T(x_n) \to \tilde{T}(x)$

$T(y_n) \to \tilde{T}(y)$

$\Downarrow$

$$T(x_n) + \lambda T(y_n) \to \tilde{T}(x) + \lambda \tilde{T}(y)$$

$\parallel$ (T γραμμ.)

όμως $T(x_n + \lambda y_n)$

το οποίο

$\tilde{T}(x + \lambda y)$

Πρόταση $\tilde{T}$ είναι φραγμ. και μάλιστα $\|\tilde{T}\| = \|T\|$

Απόδ. $\forall x \in \bar{E}$, $\exists (x_n)$: μάλιστα

$$\tilde{T}x = \lim T x_n$$

$\Downarrow$

$$\|\tilde{T}x\| = \lim_n \|T x_n\|$$

όμως $\forall$ $\|T x_n\| \le \|T\| \, \|x_n\|$

$$\Rightarrow \|\tilde{T}x\| \le \|T\| \lim_n \|x_n\| = \|T\| \, \|x\|$$

$\Downarrow$

άρα $\|\tilde{T}\| = \sup\{\|\tilde{T}x\| : x \in Ball_E\} \le \|T\|$

Όμως προφανώς $\|\tilde{T}\| \ge \|T\|$

διότι $\sup\{\ldots x \in E\} \ge \sup\{\ldots x \in D\}$

Πρόταση $\tilde{T}$ μοναδική, διότι δύο συνεχείς απεικονίσεις που ταυτίζονται σ' ένα πυκνό είναι ίσες (SOS 401)

$$\|T^*T\| \overset{?}{=} \|T\|^2$$

And: $\forall x \in E$: $\|T^*Tx\| = \|T^*(Tx)\|$

$$\leq \|T^*\| \, \|Tx\|$$

$$\leq \|T^*\| \, \|T\| \, \|x\|$$

$$\| \quad$$

$$\|T\|^2 \, \|x\|$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\|T^*T\| \leq \|T\|^2}$$

anapodly:

op T^*. $\langle T^*\xi, \eta \rangle = \langle \xi, T\eta \rangle$

$$\forall x \in E, \quad \|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*(Tx), x \rangle$$

$$\overset{C-S}{\leq} \|T^*(Tx)\| \, \|x\|$$

$$\|$$

$$\|T^*T(x)\| \, \|x\|$$

$$\leq \|T^*T\| \, \|x\| \, \|x\|$$

για $\|x\| \leq 1$:

$$\|Tx\| \leq \sqrt{\|T^*T\|}$$

$$\Rightarrow \underline{\|T\| \leq \sqrt{\|T^*T\|}}$$

αρα =

∎

Παράδ. $C([0,1])$: πράξεις $+, \cdot$: κατά σημείο

νόρμα $\|f\|_\infty = \sup_t |f(t)|$

ενέλιξη : $f^*(t) = \overline{f(t)}$ $\forall t$

μεταθετική C^*-άλγεβρα

Ψάχνω αναπαράσταση σε κάποιο χώρο Hilbert

(i) $H = \ell^2([0,1]) = \left\{ x : [0,1] \to \mathbb{C} \text{ με } \sum_{t\in[0,1]} |x(t)|^2 < +\infty \right\}$

$$\sum_{t\in[0,1]} |x(t)|^2 \overset{\text{ορ}}{=} \sup\left\{ \sum_{t\in\Gamma} |x(t)|^2, \ \Gamma \subseteq [0,1] \text{ πεπερασμένο} \right\}$$

Δηλ. $\exists$ αριθμός $\|x\|_2^2$ τέτοιος ώστε $\forall \Gamma \subseteq [0,1]$ πεπερασμένο έχω $\sum_{t\in\Gamma} |x(t)|^2 \le \|x\|_2^2$. Είναι χώρος Hilbert.

$\forall f \in C[0,1]$ ορίζω $T_f : \ell^2([0,1]) \to \ell^2([0,1])$ (??)

$(T_f(x))(t) = f(t)x(t)$, $t \in [0,1]$

$(x \in \ell^2([0,1]))$

Έχω:

$$\sum_{t\in[0,1]} |(T_f x)(t)|^2 = \sum_{t\in[0,1]} |f(t)|^2 |x(t)|^2$$

$$\le \|f\|_\infty^2 \left(\sum_{t\in[0,1]} |x(t)|^2 \right) = \|f\|_\infty^2 \|x\|_2^2$$

άρα, T_f ορίζεται καλά και

$\|T_f\| \le \|f\|_\infty$

Στοιχειώδεις πράξεις!

$$T_{f+\lambda g} = T_f + \lambda T_g$$

$$T_{fg} = T_f T_g$$

$$(T_f)^* = T_{f^*}$$

Δείξτε! $\|T_f\| = \|f\|_\infty$

(2) Άλλη αναπαράσταση:

Θεωρώ ένα κανονικό μέτρο Borel μ στο $[0,1]$

Ξέρω ότι $C([0,1])$ πυκνός στον $L^2([0,1],\mu)$

$\forall f \in C([0,1])$ ορίζω:

$$\Pi_f : C([0,1]) \longrightarrow C([0,1])$$
$$g \longmapsto fg$$

$$\|\Pi_f(g)\|^2_{L^2(\mu)} = \|fg\|^2_{L^2(\mu)}$$
$$= \int |f(t)g(t)|^2 \, d\mu(t)$$
$$\leq \|f\|_\infty^2 \int |g(t)|^2 \, d\mu(t)$$

όπως πριν: $\|\Pi_f\| \leq \|f\|_\infty$ ισότητα???

επομένως η $\Pi_f : (C([0,1]), \|\cdot\|_{L^2(\mu)}) \longrightarrow (L^2(\mu), \|\cdot\|_2)$
είναι συνεχής (φραγμ)

άρα $\exists$ επέκταση της Π_f σε φραγμ. τελεστή

$$\tilde{\Pi}_f : L^2(\mu) \longrightarrow L^2(\mu)$$

όπως πριν βρήκες αναπαράσταση

Ερώτηση: Είναι 1-1 η $f \longmapsto \tilde{\Pi}_f$??

Παίζει ρόλο ποιο μέτρο μ διάλεξα;;