

Μεταθετικές C^* -άλγεβρες

Ορισμός 1. **Χαρακτήρας** ή *πολλαπλασιαστική γραμμική μορφή* ϕ σε μία άλγεβρα \mathcal{A} λέγεται ένας μη μηδενικός μορφισμός $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$. Το σύνολο των χαρακτήρων της \mathcal{A} συμβολίζουμε $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ή $\sigma(\mathcal{A})$.

Όταν η \mathcal{A} έχει μονάδα $\mathbf{1}$:

$$\phi \in \sigma(\mathcal{A}) \iff \phi \text{ πολλ/στική γραμμ. μορφή και } \phi(\mathbf{1}) = 1.$$

Παρατήρηση 1. Αν $\phi \in \sigma(\mathcal{A})$, τότε $\phi(a) \in \sigma(a)$, άρα $|\phi(a)| \leq \|a\|$.

Πράγματι, ο πυρήνας $\ker \phi$ είναι ιδεώδες της \mathcal{A} , αφού η ϕ είναι πολλαπλασιαστική, και είναι γνήσιο, αφού $\phi \neq 0$. Επομένως ο $\ker \phi$ δεν μπορεί να περιέχει αντιστρέψιμα στοιχεία της \mathcal{A} .

Όμως $a - \phi(a)\mathbf{1} \in \ker \phi$, γιατί

$$\phi(a - \phi(a)\mathbf{1}) = \phi(a) - \phi(a)\phi(\mathbf{1}) = 0,$$

άρα το $a - \phi(a)\mathbf{1}$ δεν είναι αντιστρέψιμο, οπότε $\phi(a) \in \sigma(a)$. □

Έπεται από τη Παρατήρηση αυτή ότι $\|\phi\| \leq 1$, και αφού $\phi(\mathbf{1}) = 1$ ισχύει ισότητα. Έχουμε όμως δείξει ότι μια γραμμική μορφή που ικανοποιεί $\|\phi\| = \phi(\mathbf{1}) = 1$ είναι κατάσταση:

Παρατήρηση 2. Αν η \mathcal{A} είναι C^* -άλγεβρα με μονάδα, κάθε $\phi \in \sigma(\mathcal{A})$ έχει $\|\phi\| = 1$ και άρα $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{A})$.

Ορισμός 2 (Υπενθύμιση). Έστω X χώρος Banach. Η ασθενής- $*$ (w^*) τοπολογία του τοπολογικού δυϊκού X^* είναι η τοπολογία της σύγκλισης στα σημεία του X : Αν (ϕ_i) είναι δίκτυο στον X^* ,

$$\phi_i \xrightarrow{w^*} \phi \iff \phi_i(x) \rightarrow \phi(x) \quad \forall x \in X.$$

Η w^* είναι δηλαδή ο περιορισμός της τοπολογίας γινόμενο του \mathbb{C}^X στον X^* .

Έστω \mathcal{A} μια C^* -άλγεβρα. Κάθε κατάσταση $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι συνεχής γραμμική μορφή, επομένως ο χώρος των καταστάσεων περιέχεται στον τοπολογικό δυϊκό της \mathcal{A} .

Πρόταση 3. Έστω \mathcal{A} μια C^* -άλγεβρα με μονάδα. Με τον περιορισμό της ασθενούς- $*$ τοπολογίας, το σύνολο των καταστάσεων $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ είναι συμπαγής χώρος Hausdorff και το σύνολο των χαρακτήρων $\sigma(\mathcal{A})$ είναι κλειστό, άρα συμπαγές, υποσύνολό του.

Απόδειξη. Για κάθε $a \in \mathcal{A}$ θέτω

$$D_a := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|a\|\} \quad \text{και} \quad D := \prod_{a \in \mathcal{A}} D_a.$$

Δηλαδή το D είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $\theta : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ που ικανοποιούν $|\theta(a)| \leq \|a\|$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$. Κάθε D_a είναι συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{C} επομένως, από το Θεώρημα Tychonoff, το D είναι συμπαγής χώρος ως προς την τοπολογία γινόμενο. Αν $\phi \in \sigma(\mathcal{A})$, τότε $\phi(a) \in D_a$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$ (αφού $\|\phi\| \leq 1$), άρα $\phi \in D$. Δηλαδή το $\sigma(\mathcal{A})$ είναι υποσύνολο του D , και η σχετική τοπολογία είναι, όπως παρατηρήσαμε, η ασθενής- $*$. Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι το $\sigma(\mathcal{A})$ είναι κλειστό υποσύνολο του D .

Έστω $\phi_i \in \sigma(\mathcal{A})$ και $\theta \in D$ ώστε $\phi_i(x) \rightarrow \theta(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$. Θα δείξω ότι $\theta \in \sigma(\mathcal{A})$. Πράγματι, για κάθε $a, b \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$(\alpha) \theta(\mathbf{1}) = \lim \phi_i(\mathbf{1}) = 1, \text{ αφού } \phi_i(\mathbf{1}) = 1 \text{ για κάθε } i.$$

$$(\beta) \theta(ab) = \lim \phi_i(ab) = \lim (\phi_i(a) \cdot \phi_i(b)) = \lim \phi_i(a) \cdot \lim \phi_i(b) = \theta(a) \cdot \theta(b)$$

$$\text{αφού } \phi_i(ab) = \phi_i(a) \cdot \phi_i(b) \text{ για κάθε } i.$$

$$(\gamma) \theta(a+b) = \theta(a) + \theta(b) \text{ αφού } \phi_i(a+b) = \phi_i(a) + \phi_i(b) \text{ για κάθε } i. \quad \square$$

Ορισμός 3. Έστω \mathcal{A} μεταθετική C^* -άλγεβρα με μονάδα και $x \in \mathcal{A}$. Ορίζουμε

$$\hat{x} : \sigma(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C} : \phi \rightarrow \phi(x).$$

Παρατήρηση 4. Από τον ορισμό της ασθενούς-* τοπολογίας, για κάθε $x \in \mathcal{A}$ η συνάρτηση

$$\hat{x} : (\sigma(\mathcal{A}), w^*) \rightarrow (\mathbb{C}, |\cdot|)$$

είναι συνεχής: $\hat{x} \in C(\sigma(\mathcal{A}))$.

Ορισμός 4. Η απεικόνιση

$$\mathcal{G} : \mathcal{A} \rightarrow C(\sigma(\mathcal{A})) : x \rightarrow \hat{x}$$

λέγεται μετασχηματισμός Gelfand.

Πρόταση 5. Έστω \mathcal{A} μεταθετική C^* -άλγεβρα με μονάδα. Η απεικόνιση Gelfand

$$\mathcal{G} : (\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}}) \rightarrow (C(\sigma(\mathcal{A})), \|\cdot\|_{\infty})$$

είναι *-μορφισμός και διατηρεί την μονάδα.

Απόδειξη. Για κάθε $\phi \in \sigma(\mathcal{A})$ έχουμε

$$(\hat{x} + \hat{y})(\phi) = \hat{x}(\phi) + \hat{y}(\phi) = \phi(x) + \phi(y) = \phi(x+y) = \widehat{(x+y)}(\phi)$$

επειδή η ϕ είναι γραμμική, δηλαδή

$$\mathcal{G}(x) + \mathcal{G}(y) = \mathcal{G}(x+y).$$

Επίσης

$$(\hat{x} \cdot \hat{y})(\phi) = \hat{x}(\phi) \cdot \hat{y}(\phi) = \phi(x) \cdot \phi(y) = \phi(xy) = \widehat{xy}(\phi)$$

επειδή η ϕ είναι πολλαπλασιαστική, δηλαδή

$$\mathcal{G}(x) \cdot \mathcal{G}(y) = \mathcal{G}(xy).$$

Τέλος, επειδή κάθε $\phi \in \sigma(\mathcal{A})$ είναι θετική, επομένως ικανοποιεί $\phi(x^*) = \overline{\phi(x)}$, έχουμε

$$\hat{x}^*(\phi) = \phi(x^*) = \overline{\phi(x)} = \overline{\hat{x}(\phi)}$$

δηλαδή

$$\mathcal{G}(x^*) = (\mathcal{G}(x))^*.$$

Άρα η \mathcal{G} είναι μορφισμός *-αλγεβρών, και

$$\mathcal{G}(\mathbf{1})(\phi) = \phi(\mathbf{1}) = 1$$

για κάθε $\phi \in \sigma(\mathcal{A})$, δηλαδή $\mathcal{G}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. □

Πρόταση 6. Έστω \mathcal{A} μεταθετική C^* -άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathcal{A}$. Για κάθε $\lambda \in \sigma(a)$, υπάρχει $\phi \in \sigma(\mathcal{A})$ ώστε $\phi(a) = \lambda$. Δηλαδή

$$\sigma(a) = \{\phi(a) : \phi \in \sigma(\mathcal{A})\}.$$

Απόδειξη. Ονομάζω

$$\mathcal{C} := C^*(\mathbf{1}, a) = \{f(a) : f \in C(\sigma(a))\}$$

και ορίζω

$$\psi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C} : f(a) \rightarrow f(\lambda).$$

Το ψ είναι προφανώς χαρακτήρας της \mathcal{C} .

Θεωρώ το σύνολο Ω όλων των επεκτάσεων Hahn-Banach $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ του ψ . Ξέρουμε ότι κάθε τέτοια επέκταση είναι αυτομάτως κατάσταση, οπότε

$$\Omega = \{\phi \in \mathcal{S}(\mathcal{A}) : \phi|_{\mathcal{C}} = \psi\}.$$

Πρέπει να αποδείξουμε ότι

Υπάρχει μια επέκταση του ψ που είναι χαρακτήρας της \mathcal{A} , δηλαδή $\Omega \cap \mathcal{S}(\mathcal{A}) \neq \emptyset$.

Παρατήρηση 7. Το Ω είναι κυρτό και ασθενώς-* κλειστό, άρα συμπαγές, υποσύνολο του $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ (άμεση συνέπεια του ορισμού). Συνεπώς, από το θεώρημα Krein-Milman¹ έχει ακραία σημεία.

Ισχυρισμός 8. Αν $\phi_0 \in \Omega$ είναι ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου Ω , τότε είναι ακραίο σημείο του $\mathcal{S}(\mathcal{A})$.

Απόδειξη. Αν τα $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ και $\lambda \in (0, 1)$ ικανοποιούν $\phi_0 = \lambda\phi_1 + (1 - \lambda)\phi_2$, πρέπει να δείξουμε ότι $\phi_0 = \phi_1 = \phi_2$. Για κάθε $c \in \mathcal{C}$, έχουμε $\phi_0(c) = \lambda\phi_1(c) + (1 - \lambda)\phi_2(c)$, δηλαδή, αφού $\phi_0|_{\mathcal{C}} = \psi$,

$$\psi(c) = \lambda\psi_1(c) + (1 - \lambda)\psi_2(c) \quad (*)$$

όπου $\psi_i := \phi_i|_{\mathcal{C}}$. Αλλά το ψ είναι ακραίο σημείο του συνόλου $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ των καταστάσεων της \mathcal{C} (αφού είναι χαρακτήρας - δεξ την Πρόταση 9) και επομένως από τη σχέση (*) έχουμε $\psi = \psi_1 = \psi_2$, δηλαδή $\phi_i|_{\mathcal{C}} = \psi$. Επομένως τα ϕ_1, ϕ_2 ανήκουν στο Ω , και αφού το ϕ_0 είναι ακραίο σημείο του Ω , η σχέση $\phi_0 = \lambda\phi_1 + (1 - \lambda)\phi_2$ συνεπάγεται ότι $\phi_0 = \phi_1 = \phi_2$, όπως θέλαμε. \square

Δείξαμε λοιπόν ότι υπάρχουν ακραία σημεία ϕ του $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ που επεκτείνουν την απεικόνιση $\psi : f(a) \rightarrow f(\lambda)$, επομένως ικανοποιούν $\phi(a) = \lambda$.

Κάθε τέτοιο ακραίο σημείο είναι χαρακτήρας της \mathcal{A} :

Πρόταση 9. Κάθε ακραίο σημείο ϕ του κυρτού συνόλου $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ των καταστάσεων μιας μεταθετικής C^* -άλγεβρας \mathcal{A} με μονάδα είναι χαρακτήρας της \mathcal{A} .²

Αντίστροφα, κάθε χαρακτήρας της \mathcal{A} είναι ακραίο σημείο του $\mathcal{S}(\mathcal{A})$.

Για την απόδειξη, θα χρειασθεί ένα Λήμμα:

Λήμμα 10. Αν ϕ είναι ακραίο σημείο του συνόλου των καταστάσεων μιας C^* -άλγεβρας \mathcal{A} με μονάδα και $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι μια θετική γραμμική μορφή με $0 \leq \psi \leq \phi$, τότε υπάρχει $\mu \in \mathbb{R}_+$ ώστε $\psi = \mu\phi$.

¹Δες τις διαφάνειες και το kreinmilman.pdf.

²Το αποτέλεσμα προφανώς δεν ισχύει εν γένει σε μη μεταθετικές άλγεβρες: για παράδειγμα η $M_2(\mathbb{C})$ ασφαλώς έχει μη μηδενικές καταστάσεις, αλλά δεν έχει κανέναν χαρακτήρα.

Απόδειξη. Από την υπόθεση έχουμε $0 \leq \psi(\mathbf{1}) \leq \phi(\mathbf{1}) = 1$. Θέτουμε $\mu = \psi(\mathbf{1}) \in [0, 1]$ και θα δείξουμε ότι $\psi = \mu\phi$.

- Αν $\mu = 0$ τότε για κάθε $a = a^* \in \mathcal{A}$ έχουμε $-\|a\| \mathbf{1} \leq a \leq \|a\| \mathbf{1}$ και συνεπώς $-\|a\| \psi(\mathbf{1}) \leq \psi(a) \leq \|a\| \psi(\mathbf{1})$ αφού η ψ είναι θετική γραμμική μορφή. Επομένως $\psi(a) = 0$ για κάθε αυτοσυζυγές $a \in \mathcal{A}$, άρα και για κάθε $a \in \mathcal{A}$, οπότε $\psi = 0\phi$.

- Αν $\mu = 1$ τότε θεωρώντας τη θετική γραμμική μορφή $\phi - \psi$ που ικανοποιεί $(\phi - \psi)(\mathbf{1}) = 0$, συμπεραίνουμε με το ίδιο επιχείρημα ότι $\phi - \psi = 0$, δηλαδή $\psi = \phi$.

- Αν $\mu \in (0, 1)$ τότε θέτουμε $\phi_1 = \frac{\psi}{\mu}$ και $\phi_2 = \frac{\phi - \psi}{1 - \mu}$ και παρατηρούμε ότι $\phi_i \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ και ότι $\mu\phi_1 + (1 - \mu)\phi_2 = \phi$. Συνεπώς αφού το ϕ είναι ακραίο έχουμε $\phi_1 = \phi_2 = \phi$, άρα $\frac{\psi}{\mu} = \phi$.

Δηλαδή σε κάθε περίπτωση έχουμε $\psi = \mu\phi$, όπως θέλαμε. \square

Παρατήρηση 11. *Ισχύει και το αντίστροφο: αν ένα $\phi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ έχει την ιδιότητα, “για κάθε ψ θετική γραμμική μορφή με $0 \leq \psi \leq \phi$ υπάρχει $\mu \in \mathbb{R}_+$ ώστε $\psi = \mu\phi$ ”, τότε το ϕ είναι ακραίο σημείο του $\mathcal{S}(\mathcal{A})$.*

Πράγματι, αν τα $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ και $\lambda \in (0, 1)$ ικανοποιούν $\phi_0 = \lambda\phi_1 + (1 - \lambda)\phi_2$, θέτοντας $\psi := \lambda\phi_1$ έχουμε μια θετική γραμμική μορφή που ικανοποιεί $\phi_0 = \lambda\phi_1 + (1 - \lambda)\phi_2 \geq \psi$ και συνεπώς από την υπόθεση υπάρχει $\mu \in \mathbb{R}_+$ ώστε $\psi = \mu\phi$, δηλαδή $\lambda\phi_1 = \mu\phi$. Τότε όμως $\lambda\phi_1(\mathbf{1}) = \mu\phi(\mathbf{1})$ άρα $\lambda = \mu$ αφού τα ϕ_1, ϕ είναι καταστάσεις, οπότε $\phi_1 = \phi$ και άρα το ϕ είναι ακραίο.

Απόδειξη της Πρότασης 9.

Έστω $a, c \in \mathcal{A}$. Να δείξουμε ότι $\phi(ac) = \phi(a)\phi(c)$. Αφού το ϕ είναι γραμμικό, και κάθε $a \in \mathcal{A}$ είναι γραμμικός συνδυασμός τεσσάρων θετικών στοιχείων νόρμας το πολύ 1, αρκεί να δείξουμε ότι $\phi(ac) = \phi(a)\phi(c)$ για κάθε $a, c \in \mathcal{A}_+$ με $\|c\| \leq 1$. Επειδή τα a και c μετατίθενται, έχουμε $ac \geq 0$ και $a(\mathbf{1} - c) \geq 0$ δηλαδή $0 \leq ac \leq a$ και συνεπώς $0 \leq \phi(ac) \leq \phi(a)$ αφού το ϕ είναι θετικό. Επομένως, αν ορίσουμε

$$\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C} : \psi(a) = \phi(ac)$$

δείξαμε ότι η γραμμική μορφή ψ είναι θετική και ικανοποιεί $\psi(a) \leq \phi(a)$ για κάθε $a \in \mathcal{A}_+$. Επειδή το ϕ είναι ακραίο σημείο του $\mathcal{S}(\mathcal{A})$, έπεται ότι το ψ είναι πολλαπλάσιο του ϕ (Λήμμα 10), δηλαδή υπάρχει $\mu \in \mathbb{R}_+$ ώστε $\psi = \mu\phi$. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} \phi(ac) &= \psi(a) = \mu\phi(a) = \mu\phi(\mathbf{1})\phi(a) = \psi(\mathbf{1})\phi(a) \quad (\text{διότι } \psi(\mathbf{1}) = \mu\phi(\mathbf{1})) \\ &= \phi(\mathbf{1}c)\phi(a) = \phi(c)\phi(a) \end{aligned}$$

όπως θέλαμε.

Για το αντίστροφο, έστω $\phi \in \sigma(\mathcal{A})$. Γνωρίζουμε ήδη (Παρατήρηση 2) ότι $\phi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$. Υποθέτουμε ότι η ϕ είναι γνήσιος κυρτός συνδυασμός $\phi = \lambda\phi_1 + \mu\phi_2$ όπου $\phi_i \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$, $\lambda, \mu > 0$ και $\lambda + \mu = 1$ και θα δείξουμε ότι $\phi = \phi_1 = \phi_2$.

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, για κάθε $a = a^* \in \mathcal{A}$ και για $i = 1, 2$ έχουμε

$$(\phi_i(a))^2 = |\phi_i(\mathbf{1}a)|^2 \leq \phi_i(\mathbf{1}^2)\phi_i(a^2) = \phi_i(a^2).$$

Αφού ο ϕ είναι χαρακτήρας, ισχύει ότι $\phi(a^2) = \phi(a)^2$, οπότε (γράφοντας $\phi_i(a) = f_i$ για ευκολία)

$$\begin{aligned} 0 &= \phi(a^2) - \phi(a)^2 = \lambda\phi_1(a^2) + \mu\phi_2(a^2) - (\lambda\phi_1(a) + \mu\phi_2(a))^2 \\ &\geq \lambda f_1^2 + \mu f_2^2 - (\lambda f_1 + \mu f_2)^2 \\ &= \lambda(\lambda + \mu)f_1^2 + \mu(\lambda + \mu)f_2^2 - (\lambda^2 f_1^2 + \mu^2 f_2^2 + 2\lambda\mu f_1 f_2) \\ &= \lambda\mu(f_1^2 + f_2^2) - 2\lambda\mu f_1 f_2 \\ &= \lambda\mu(\phi_1(a) - \phi_2(a))^2 \end{aligned}$$

επομένως $\phi_1(a) = \phi_2(a)$ για κάθε $a = a^* \in \mathcal{A}$ άρα και για κάθε $a \in \mathcal{A}$, οπότε $\phi_1 = \phi_2$, όπως θέλαμε. \square

Σχόλιο Αν $\mathcal{A} = C(K)$ όπου K συμπαγής χώρος Hausdorff, κάθε κανονικό μέτρο Borel πιθανότητας μ ορίζει μια κατάσταση της \mathcal{A} από τη σχέση $\phi(f) = \int_K f d\mu$. Το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz λέει ότι ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή το σύνολο των καταστάσεων της $C(K)$ ταυτίζεται με το σύνολο των κανονικών μέτρων Borel πιθανότητας στο K . Έχουμε ήδη δει στις Ασκήσεις ότι τα ακραία σημεία του συνόλου αυτού είναι ακριβώς τα μέτρα Dirac, που αντιστοιχούν στους χαρακτήρες της $C(K)$.

Η Πρόταση 9 είναι η “αφηρημένη” εκδοχή αυτής της παρατήρησης.

Ολοκλήρωση της απόδειξης της Πρότασης 6.

Για κάθε $\lambda \in \sigma(a)$, θεωρήσαμε την κατάσταση $\psi(f(a)) = f(\lambda)$ της C^* -άλγεβρας \mathcal{C} που παράγεται από τα $\mathbf{1}$ και a . Επειδή η ψ είναι ακραία κατάσταση της \mathcal{C} , δείξαμε ότι ανάμεσα σ' όλες τις επεκτάσεις Hahn Banach της ψ στην \mathcal{A} υπάρχουν και ακραίες καταστάσεις. Δείξαμε τέλος ότι μια ακραία κατάσταση σε μια μεταθετική C^* -άλγεβρα με μονάδα είναι αναγκαστικά χαρακτήρας.

Επομένως, έχουμε αποδείξει ότι υπάρχει ένας χαρακτήρας ϕ της \mathcal{A} που επεκτείνει την ψ , οπότε $\phi(a) = \psi(a) = \lambda$. \square

Μπορούμε τώρα να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος:

Θεώρημα 12 (Gelfand-Naimark). *Κάθε μεταθετική C^* -άλγεβρα \mathcal{A} με μονάδα είναι ισομετρικά $*$ -ισόμορφη με την $C(\sigma(\mathcal{A}))$ όπου $\sigma(\mathcal{A})$ είναι το σύνολο των μη μηδενικών μορφισμών $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$: Ο μετασχηματισμός Gelfand:*

$$\mathcal{A} \rightarrow C(\sigma(\mathcal{A})) : a \rightarrow \hat{a}$$

(όπου $\hat{a}(\phi) = \phi(a)$, $\phi \in \sigma(\mathcal{A})$) είναι ισομετρικός $*$ -ισομορφισμός της \mathcal{A} επί της $C(\sigma(\mathcal{A}))$).

Απόδειξη. Από την Πρόταση 5 γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Gelfand είναι $*$ -μορφισμός που διατηρεί την μονάδα.

Επίσης, η εικόνα $\hat{\mathcal{A}} = \{\hat{a} : a \in \mathcal{A}\}$ της \mathcal{A} χωρίζει τα σημεία του χώρου $\sigma(\mathcal{A})$: αν $\phi \neq \psi$ είναι χαρακτήρες, υπάρχει $a \in \mathcal{A}$ ώστε $\hat{a}(\phi) \neq \hat{a}(\psi)$. Κατά συνέπεια, από το Θεώρημα Stone -Weierstrass (δες τη διατύπωση πιο κάτω), η $\hat{\mathcal{A}}$ είναι πυκνή $*$ -υπόάλγεβρα της $(C(\sigma(\mathcal{A})), \|\cdot\|_\infty)$.

Όμως, με την Πρόταση 6 δείξαμε ότι για κάθε $a \in \mathcal{A}$ ισχύει η ισότητα

$$\sigma(a) = \{\phi(a) : \phi \in \sigma(\mathcal{A})\}$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned} \|\hat{a}\|_\infty &= \sup\{|\hat{a}(\phi)| : \phi \in \sigma(\mathcal{A})\} = \sup\{|\phi(a)| : \phi \in \sigma(\mathcal{A})\} \\ &= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} = \|a\| \end{aligned}$$

γιατί η \mathcal{A} είναι μεταθετική, άρα η νόρμα κάθε στοιχείου της ισούται με τη φασματική του ακτίνα.

Συνεπώς ο μετασχηματισμός Gelfand είναι ισομετρία, οπότε η εικόνα του $\hat{\mathcal{A}}$ είναι πλήρης, άρα κλειστή στην $(C(\sigma(\mathcal{A})), \|\cdot\|_\infty)$. Είναι όμως και πυκνή, οπότε τελικά $\hat{\mathcal{A}} = C(\sigma(\mathcal{A}))$. \square

Υπενθύμιση: Θεώρημα Stone – Weierstrass

Έστω K συμπαγής χώρος Hausdorff και έστω $C(K)$ η μιγαδική άλγεβρα όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ (με πράξεις κατά σημείο και τη νόρμα supremum).

Έστω $\mathcal{A} \subseteq C(K)$ με τις εξής ιδιότητες

- (1) είναι υπάλγεβρα (δηλ. περιέχει το άθροισμα και το γινόμενο των στοιχείων της)
- (2) περιέχει τις σταθερές συναρτήσεις (δηλ. $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$)
- (3) χωρίζει τα σημεία του X (δηλ. αν $f(x) = f(y)$ για κάθε $f \in \mathcal{A}$ τότε $x = y$)
- (4) περιέχει το συζυγές κάθε στοιχείου της (δηλ. $f \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{f} \in \mathcal{A}$).

Τότε η \mathcal{A} είναι ομοιόμορφα πυκνή στην $C(K)$.³

³Δες το αρχείο `stoneweixe.pdf` στην <http://eclass.uoa.gr/courses/MATH287/>.