# Θεωρία Τελεστών: Ασκήσεις Ι

**1.** Έστω $H$ χώρος Hilbert, και $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq H$ ορθοκανονική ακολουθία. Αν $a(n) \in \mathbb{C}$, δείξτε ότι

$$\sum_n |a(n)| < \infty \Rightarrow \text{ η } \sum_n a(n)x_n \text{ συγκλίνει στον } H \Rightarrow \sum_n |a(n)|^2 < \infty\,.$$

Εξετάστε αν ισχύουν οι αντίστροφες συνεπαγωγές.

**2.** Αν $f \in C([0,1])$, δείξτε ότι το φάσμα του τελεστή $M_f \in \mathcal{B}(L^2([0,1],m))$ (m=μέτρο Lebesgue) είναι $\sigma(M_f) = \sigma(f) = f([0,1])$.

**3.** Έστω $H = L^2(K,\mu)$ όπου $K$ συμπαγής $T_2$ (ή μετρικός, αν θέλετε) χώρος και $\mu$ κανονικό μέτρο Borel. Δείξτε ότι η απεικόνιση $f \to M_f$ είναι *-αναπαράσταση της C* άλγεβρας $C(K)$ στον $H$, και ότι είναι πιστή (δηλ. 1-1) αν και μόνον αν κάθε μη κενό ανοικτό $V \subseteq K$ έχει $\mu(V) > 0$.

Εξετάστε πότε είναι πιστή η *-αναπαράσταση $f \to M_f$ της C* άλγεβρας $L^\infty(K,\mu)$.

**4.** Δείξτε ότι μια αναπαράσταση $(\pi, H)$ μιάς C* άλγεβρας $\mathcal{A}$ είναι μη-εκφυλισμένη αν και μόνον αν $\bigcap_{a\in\mathcal{A}} \ker \pi(a) = 0$.

**5.** Έστω $(X,\mu)$ χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου και $g : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη. Δείξτε ότι αν υπάρχει σταθερά $C$ ώστε $\|gf\|_2 \le C\,\|f\|_2$ για κάθε $f \in L^2(X,\mu)$, τότε $|g(x)| \le C$ $\mu$-σχεδόν για κάθε $x \in X$ και ότι τότε η απεικόνιση $f \to gf$ είναι φραγμένος τελεστής στον $L^2(X,\mu)$ με νόρμα το πολύ ίση με $C$. Δείξτε μάλιστα ότι η μικρότερη τέτοια σταθερά είναι ίση με τη νόρμα του τελεστή αυτού, και με το ουσιώδες supremum της $g$.

**6.** Γράφουμε $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Ονομάζουμε $H^2(\mathbb{D})$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : \mathbb{D} \to \mathcal{C}$ που έχουν δυναμοσειρά $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ με $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. Δείξτε ότι, με τη νόρμα $\|f\| := (\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2)^{1/2}$, ο $H^2(\mathbb{D})$ είναι χώρος Hilbert.

Θεωρούμε την απεικόνιση $T$ με $(Tf)(z) = zf(z)$, $f \in H^2(\mathbb{D})$. Δείξτε ότι ο $T$ είναι (καλά ορισμένος) φραγμένος τελεστής $H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ και βρείτε τον συζυγή του. Εξετάστε αν ο $T$ είναι 1-1 και αν είναι επί.