Θεωρία Τελεστών: Ασκήσεις ΙΙ

1. Δείξτε ότι ένας $T \in M_n(\mathbb{C})$ είναι θετικό στοιχείο της $M_n(\mathbb{C})$ ανν ο T διαγωνοποιείται και έχει μη αρνητικές ιδιοτιμές, ισοδύναμα ανν είναι θετικά ημιορισμένος, δηλ. $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$ για κάθε $\xi \in \mathbb{C}^n$.

2. Δείξτε ότι κάθε $f \in H^2(\mathbb{D})$ (δείτε την Άσκηση Ι.6) είναι συνάρτηση ορισμένη και ολόμορφη στον ανοικτό δίσκο και ότι

$$\|f\|^2 = \sup\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt : 0 \leq r < 1\right\}.$$

Δείξτε ότι για κάθε $w \in \mathbb{D}$ η απεικόνιση $f \to f(w)$ είναι συνεχής στον $H^2(\mathbb{D})$ και βρείτε την $k_w \in H^2(\mathbb{D})$ που ικανοποιεί

$$\langle f, k_w\rangle = f(w) \quad \text{για κάθε } \ f \in H^2(\mathbb{D}).$$

Δείξτε ότι, με τη νόρμα $\|f\| := (\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|^2)^{1/2}$, ο $H^2(\mathbb{D})$ είναι χώρος Hilbert.

Δείξτε ότι κάθε φραγμένη ολόμορφη συνάρτηση $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ (γράφουμε $\phi \in H^\infty(\mathbb{D})$ επάγει έναν καλά ορισμένο και φραγμένο τελεστή $T_\phi : H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ ώστε $(T_\phi f)(z) = \phi(z)f(z), f \in H^2(\mathbb{D})$. Εξετάστε αν το σύνολο $\{T_\phi : \phi \in H^\infty(\mathbb{D})$ είναι υπάλγεβρα της $\mathcal{B}(H^2(\mathbb{D}))$ και αν είναι αυτοσυζυγής.

3. Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα. Δείξτε ότι η θετική τετραγωνική ρίζα ενός θετικού στοιχείου $a \in \mathcal{A}_+$ είναι μοναδική. Δηλαδή, αν $c \in \mathcal{A}_+$ και $c^2 = a$, τότε $c = f(a)$ όπου $f(t) = \sqrt{t}$ για κάθε $t \in \sigma(a)$.

4. Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα. Δείξτε ότι το σύνολο $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ των καταστάσεων της $\mathcal{A}$ είναι κυρτό υποσύνολο της μοναδιαίας μπάλας του (τοπολογικού) δυικού της $\mathcal{A}$, και ότι είναι ασθενώς-* κλειστό, δηλ. ότι αν ένα δίκτυο (ϕ_i) από καταστάσεις συγκλίνει *κατά σημείο* σε μια απεικόνιση $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, τότε $\phi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$.

5. Αν K είναι συμπαγής T_2 (ή μετρικός, αν θέλετε) χώρος δείξτε ότι κάθε κανονικό μέτρο Borel πιθανότητας στο K ορίζει μια κατάσταση στην C* άλγεβρα $C(K)$. (Το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz λέει ότι ισχύει και το αντίστροφο.) Δείξτε ότι τα μέτρα Dirac είναι ακραία σημεία του κυρτού συνόλου $\mathcal{P}(K)$ των κανονικών μέτρων Borel πιθανότητας στο K, και ότι, αντιστρόφως, κάθε ακραίο σημείο του $\mathcal{P}(K)$ έχει φορέα που είναι μονοσύνολο, και συνεπώς (γιατί;) είναι μέτρο Dirac. (Ο *φορέας* ενός μέτρου είναι το συμπλήρωμα του μεγαλύτερου ανοικτού συνόλου που έχει μέτρο μηδέν.)

6. Έστω H χώρος Hilbert. Δείξτε ότι κάθε γραμμική μορφή $\omega_\xi : \mathcal{B}(H) \to \mathbb{C}$, όπου $\xi \in H$ έχει νόρμα 1 και $\omega_\xi(T) = \langle T\xi, \xi\rangle$, $T \in \mathcal{B}(H)$, είναι ακραίο σημείο του συνόλου των καταστάσεων στην C* άλγεβρα $\mathcal{B}(H)$.

7. Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα και $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ μια αναπαράσταση της $\mathcal{A}$. Αν $M \subseteq H$ είναι υπόχωρος του H που είναι π-αναλλοίωτος, δηλαδή $\pi(a)(M) \subseteq M$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$, δείξτε τότε ότι ο $\overline{M}$ καθώς και ο $M^\perp$ είναι π-αναλλοίωτοι. Δείξτε επίσης ότι ένας κλειστός υπόχωρος $K \subseteq H$ είναι π-αναλλοίωτος αν και μόνον αν η ορθή προβολή $P = P(K)$ στον K μετατίθεται με την $\pi(\mathcal{A})$ (δηλ. $\pi(a)P = P\pi(a)$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$).

Αν η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα $\mathbf{1}$, δείξτε ότι ο υπόχωρος $K := \pi(\mathbf{1})(H)$ είναι π-αναλλοίωτος, ότι ο τελεστής $\pi(\mathbf{1})|_K$ είναι ο ταυτοτικός τελεστής στον χώρο K και ότι για κάθε $a \in \mathcal{A}$ ο τελεστής $\pi(a)$ μηδενίζεται στον χώρο $K^\perp$.

8. Έστω $\mathcal{A} = C(K)$ όπου K είναι συμπαγής T_2 (ή μετρικός, αν θέλετε) χώρος. Δείξτε ότι μια γραμμική μορφή $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ είναι κατάσταση αν και μόνον αν $\phi(\mathbf{1}) = \|\phi\| = 1$.

Δείξτε ότι το ίδιο ισχύει για οποιαδήποτε C* άλγεβρα $\mathcal{A}$ με μονάδα.

9. Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ μια C* υπάλγεβρα με $\mathbf{1} \in \mathcal{B}$. Δείξτε ότι κάθε κατάσταση $\phi : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ επεκτείνεται σε *κατάσταση* $\tilde{\phi} : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$.