Θεωρία Τελεστών: Ασκήσεις ΙΙ - Υποδείξεις

1. *Δείξτε ότι ένας $T \in M_n(\mathbb{C})$ είναι θετικό στοιχείο της $M_n(\mathbb{C})$ ανν ο T διαγωνοποιείται και έχει μη αρνητικές ιδιοτιμές, ισοδύναμα ανν είναι θετικά ημιορισμένος, δηλ. $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$ για κάθε $\xi \in \mathbb{C}^n$.*

Διευκρίνιση: Στην Θεωρία Τελεστών, ο όρος "διαγωνοποιείται" σημαίνει διαγωνοποιείται ως προς μια *ορθοκανονική* βάση του χώρου.

Απόδειξη. Αν $T \geq 0$, τότε $T = T^*$ και συνεπώς από το *Φασματικό Θεώρημα* σε χώρους πεπερασμένης διάταξης υπάρχει μια *ορθοκανονική* βάση $\{x_1, \ldots, x_n\}$ του $\mathbb{C}^n$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του T. Επιπλέον το $\sigma(T)$ αποτελείται ακριβώς από τις ιδιοτιμές του T, οπότε, αφού $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}_+$, οι ιδιοτιμές είναι μη αρνητικές.

Αν ο T διαγωνοποιείται από μια ορθοκανονική βάση $\{x_1, \ldots, x_n\}$ και έχει μη αρνητικές ιδιοτιμές $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, τότε για κάθε $\xi \in \mathbb{C}^n$, γράφοντας $\xi = \sum\langle \xi, x_k\rangle x_k$, έχουμε

$$\langle T\xi, \xi\rangle = \langle T\left(\sum\langle \xi, x_k\rangle x_k\right), \xi\rangle = \sum\langle \xi, x_k\rangle\langle Tx_k, \xi\rangle = \sum\langle \xi, x_k\rangle\langle \lambda_k x_k, \xi\rangle = \sum \lambda_k|\langle \xi, x_k\rangle|^2 \geq 0\,.$$

Αν τέλος ο T είναι θετικά ημιορισμένος, τότε είναι αυτοσυζυγής. [1] Πάλι από το Φασματικό Θεώρημα έπεται ότι ο T διαγωνοποιείται ως προς μια ορθοκανονική βάση $\{x_1, \ldots, x_n\}$ του $\mathbb{C}^n$ και οι ιδιοτιμές του $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ είναι μη αρνητικές αφού $\lambda_k = \langle \lambda_k x_k, x_k\rangle = \langle Tx_k, x_k\rangle \geq 0$. Άρα $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}_+$ και συνεπώς ο T είναι θετικό στοιχείο της $M_n(\mathbb{C})$.

2. *Δείξτε ότι κάθε $f \in H^2(\mathbb{D})$ (δείτε την Άσκηση Ι.6) είναι συνάρτηση ορισμένη και ολόμορφη στον ανοικτό δίσκο και ότι*
$$\|f\|^2 = \sup\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^2 dt : 0 \leq r < 1\right\}.$$
Δείξτε ότι για κάθε $w \in \mathbb{D}$ η απεικόνιση $f \to f(w)$ είναι συνεχής στον $H^2(\mathbb{D})$ και βρείτε την $k_w \in H^2(\mathbb{D})$ που ικανοποιεί
$$\langle f, k_w\rangle = f(w) \quad \text{για κάθε } f \in H^2(\mathbb{D}).$$
Δείξτε ότι, με τη νόρμα $\|f\| := (\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|^2)^{1/2}$, ο $H^2(\mathbb{D})$ είναι χώρος Hilbert.
Δείξτε ότι κάθε φραγμένη ολόμορφη συνάρτηση $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ (γράφουμε $\phi \in H^\infty(\mathbb{D})$ επάγει έναν καλά ορισμένο και φραγμένο τελεστή $T_\phi : H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ ώστε $(T_\phi f)(z) = \phi(z)f(z), f \in H^2(\mathbb{D})$. Εξετάστε αν το σύνολο $\{T_\phi : \phi \in H^\infty(\mathbb{D})$ είναι υπάλγεβρα της $\mathcal{B}(H^2(\mathbb{D}))$ και αν είναι αυτοσυζυγής.

3. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα. Δείξτε ότι η θετική τετραγωνική ρίζα ενός θετικού στοιχείου $a \in \mathcal{A}_+$ είναι μοναδική. Δηλαδή, αν $c \in \mathcal{A}_+$ και $c^2 = a$, τότε $c = f(a)$ όπου $f(t) = \sqrt{t}$ για κάθε $t \in \sigma(a)$.*

Απόδειξη.

Λύση 1. Παρατηρούμε πρώτα ότι $\sigma(a) = \sigma(c) := \Sigma$. Πράγματι, τα $\sigma(a)$ και $\sigma(c)$ περιέχονται στο $\mathbb{R}_+$ και $\sigma(a) = \{t^2 : t \in \sigma(c)\}$, αφού $a = c^2$.

Έστω (p_n) μια ακολουθία πολυωνύμων ώστε $p_n(t) \to f(t) = \sqrt{t}$ ομοιόμορφα στο Σ και έστω $q_n(t) = p_n(t^2)$. Τότε $q_n(t) \to t$ ομοιόμορφα στο Σ.

Εφαρμόζοντας τον συναρτησιακό λογισμό για το c, έχουμε $q_n(c) \to c$. Όμως, $q_n(c) = p_n(c^2) = p_n(a)$ και από τον συναρτησιακό λογισμό για το a, έχουμε $p_n(a) \to f(a)$. Επομένως

$$c = \lim_n q_n(c) = \lim_n p_n(c^2) = \lim_n p_n(a) = f(a)\,.$$

Λύση 2. Έχουμε $ac = ca$ αφού $a = c^2$. Συνεπώς $p(a)c = cp(a)$ για κάθε πολυώνυμο p και επομένως $f(a)c = f(a)c$, από τον συναρτησιακό λογισμό, αφού η f είναι ομοιόμορφο όριο στο $\sigma(a)$ μιας ακολουθίας πολυωνύμων.

Επομένως η C*-υπάλγεβρα $\mathcal{B}$ της $\mathcal{A}$ που παράγεται από τα στοιχεία $c, f(a) := b$ και $\mathbf{1}$ είναι αβελιανή. Επομένως, από το Θεώρημα Gelfand-Naimark υπάρχει συμπαγής χώρος Hausdorff K και ισομετρικός *-ισομορφισμός $\Phi : \mathcal{B} \to C(K)$. Αν $\Phi(f(a)) = u$ και $\Phi(c) = v$, οι u, v είναι δυο μη αρνητικές συνεχείς συναρτήσεις στο K που ικανοποιούν $u^2 = v^2$, αφού $f(a)^2 = c^2$. Επομένως $u = v$ και άρα $f(a) = b$ αφού η Φ είναι 1-1.

---

[1] Πράγματι, η σχέση $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$ για κάθε $\xi \in \mathbb{C}^n$ συνεπάγεται ότι $\langle T^*\xi, \xi\rangle = \langle \xi, T\xi\rangle \in \mathbb{R}$ άρα $\langle T^*\xi, \xi\rangle = \langle \xi, T\xi\rangle = \overline{\langle T\xi, \xi\rangle} = \langle T\xi, \xi\rangle$ για κάθε $\xi \in \mathbb{C}^n$, οπότε αντικαθιστώντας το ξ με $\xi + i\eta$ βρίσκουμε $\mathrm{Re}(\langle T\xi, \eta\rangle - \langle T^*\xi, \eta\rangle) = 0$ για κάθε $\xi, \eta \in \mathbb{C}^n$, και αντικαθιστώντας το ξ με $\xi + \eta$ βρίσκουμε $\mathrm{Im}(\langle T\xi, \eta\rangle - \langle T^*\xi, \eta\rangle) = 0$ για κάθε $\xi, \eta \in \mathbb{C}^n$, οπότε $\langle T^*\xi, \eta\rangle = \langle T\xi, \eta\rangle$ για κάθε $\xi, \eta \in \mathbb{C}^n$.

4. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα. Δείξτε ότι το σύνολο $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ των καταστάσεων της $\mathcal{A}$ είναι κυρτό υποσύνολο της μοναδιαίας μπάλας του (τοπολογικού) δυικού της $\mathcal{A}$, και ότι είναι ασθενώς-* κλειστό, δηλ. ότι αν ένα δίκτυο (ϕ_i) από καταστάσεις συγκλίνει* κατά σημείο *σε μια απεικόνιση $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, τότε $\phi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$.*

Απόδειξη. Ξέρουμε ότι κάθε θετική γραμμική μορφή ϕ ικανοποιεί $\|\phi\| = \phi(\mathbf{1})$, άρα μια θετική γραμμική μορφή ϕ είναι κατάσταση ανν $\|\phi\| = 1$.

Αν $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ και $\lambda \in (0, 1)$ τότε $\lambda\phi(a) + (1 - \lambda)\psi(a) \geq 0$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$ άρα η $\lambda\phi + (1 - \lambda)\psi$ είναι θετική γραμμική μορφή και $\lambda\phi(\mathbf{1}) + (1 - \lambda)\psi(\mathbf{1}) = \lambda + (1 - \lambda) = 1$ άρα $\lambda\phi + (1 - \lambda)\psi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$. Δείξαμε ότι το $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ είναι κυρτό.

Αν $\phi_i \to \phi$ κατά σημείο, τότε για κάθε $a \in \mathcal{A}$ έχουμε $\phi(a) = \lim_i \phi_i(a) \geq 0$ και $\phi(\mathbf{1}) = \lim_i \phi_i(\mathbf{1}) = 1$, άρα $\phi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$.

5. *Αν K είναι συμπαγής T_2 (ή μετρικός, αν θέλετε) χώρος δείξτε ότι κάθε κανονικό μέτρο Borel πιθανότητας στο K ορίζει μια κατάσταση στην C* άλγεβρα $C(K)$. (Το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz λέει ότι ισχύει και το αντίστροφο.) Δείξτε ότι τα μέτρα Dirac είναι ακραία σημεία του κυρτού συνόλου $\mathcal{P}(K)$ των κανονικών μέτρων Borel πιθανότητας στο K, και ότι, αντιστρόφως, κάθε ακραίο σημείο του $\mathcal{P}(K)$ έχει φορέα που είναι μονοσύνολο, και συνεπώς (γιατί;) είναι μέτρο Dirac. (Ο* φορέας *ενός μέτρου είναι το συμπλήρωμα του μεγαλύτερου ανοικτού συνόλου που έχει μέτρο μηδέν.)*

Απόδειξη. Παρατήρηση 1. Ένα $\mu \in \mathcal{P}(K)$ είναι μέτρο Dirac ανν $\text{supp}\mu = \{t\}$.

Αυτό είναι σχεδόν προφανές: Το μέτρο δ_t μηδενίζεται σε κάθε ανοικτό U που δεν περιέχει το t, αλλά όχι στο K. Δηλαδή ο φορέας του δ_t είναι το $\{t\}$.
Αντίστροφα, αν $\text{supp}\mu = \{t\}$ τότε αφού $\mu(\{t\}^c) = 0$ και $\mu(K) = 1$ έχουμε $\mu(\{t\}) = 1$ άρα $\mu = \delta_t$.

Παρατήρηση 2. Ένα $\mu \in \mathcal{P}(K)$ είναι μέτρο Dirac ανν είναι "δίτιμο", δηλ. ανν ικανοποιεί $\mu(E) \in \{0, 1\}$ για κάθε Borel υποσύνολο $E \subseteq K$.

Απόδειξη του 2. Προφανώς κάθε δ_t είναι δίτιμο. Αντίστροφα αν το μ δεν είναι μέτρο Dirac, τότε από την (1) το $\text{supp}\mu$ περιέχει (τουλάχιστον) δύο σημεία $t_1 \neq t_2$. Τότε, επιλέγοντας ανοικτά ξένα V_1, V_2 με $t_i \in V_i$ για $i = 1, 2$ θα είχαμε $\mu(V_1) > 0$ και $\mu(V_2) > 0$ (αφού τέμνουν το $\text{supp}\mu$) οπότε, αφού $0 < \mu(V_1) + \mu(V_2) \leq 1$, το μ δεν είναι δίτιμο μέτρο.

Παρατήρηση 3. Ένα $\mu \in \mathcal{P}(K)$ *δεν* είναι μέτρο Dirac ανν *δεν* είναι ακραίο σημείο του $\mu \in \mathcal{P}(K)$

Απόδειξη του 3. Αν το μ δεν είναι μέτρο Dirac, από την (2) υπάρχει $E \subseteq K$ Borel με $\lambda := \mu(E) \in (0, 1)$.

Ορίζουμε

$$\mu_1(A) = \frac{\mu(A \cap E)}{\mu(E)} \quad \text{και} \quad \mu_2(A) = \frac{\mu(A \cap E^c)}{\mu(E^c)} \qquad (A \subseteq K, \text{Borel}).$$

Τα μ_1, μ_2 είναι μέτρα πιθανότητας, διαφορετικά μεταξύ τους αφού $\mu_1(E) = 1$ ενώ $\mu_2(E) = 0$. Για κάθε $A \subseteq K$ Borel έχουμε

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c) = \mu(E)\mu_1(A) + \mu(E^c)\mu_2(A) = \lambda\mu_1(A) + (1 - \lambda)\mu_2(A)$$

άρα το μ είναι γνήσιος κυρτός συνδυασμός των μ_1 και μ_2, δηλαδή δεν είναι ακραίο σημείο.

Αντίστροφα, έστω ότι υπάρχουν μέτρα πιθανότητας $\mu_1 \neq \mu_2$ και $\lambda \in (0, 1)$ ώστε $\mu = \lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2$. Αφού $\mu_1 \neq \mu_2$, υπάρχει $E \subseteq K$ Borel ώστε $\mu_1(E) \neq \mu_2(E)$, έστω $\mu_1(E) > \mu_2(E)$. Τότε $\mu_1(E^c) < \mu_2(E^c)$ οπότε

$$\mu(E) = \lambda\mu_1(E) + (1 - \lambda)\mu_2(E) > \lambda\mu_2(E) + (1 - \lambda)\mu_2(E) = \mu_2(E) \text{ άρα } \mu(E) > 0.$$
$$\text{Επίσης } \mu(E^c) = \lambda\mu_1(E^c) + (1 - \lambda)\mu_2(E^c) > \lambda\mu_1(E^c) + (1 - \lambda)\mu_2(E^c) = \mu_1(E^c) \text{ άρα } \mu(E^c) > 0\,.$$

Επομένως $\mu(E) \in (0, 1)$ και άρα το μ δεν είναι μέτρο Dirac από την (2).

6. *Έστω H χώρος Hilbert. Δείξτε ότι κάθε γραμμική μορφή $\omega_\xi : \mathcal{B}(H) \to \mathbb{C}$, όπου $\xi \in H$ έχει νόρμα 1 και $\omega_\xi(T) = \langle T\xi, \xi\rangle$, $T \in \mathcal{B}(H)$, είναι ακραίο σημείο του συνόλου των καταστάσεων στην C* άλγεβρα $\mathcal{B}(H)$.*

Απόδειξη. Αν P είναι η ορθή προβολή στον (μονοδιάστατο) υπόχωρο που παράγει το ξ, παρατηρούμε ότι $PTP = \omega_\xi(T)P$, διότι για κάθε $\eta \in H$ έχουμε $P\eta = \lambda\xi$ όπου $\lambda = \langle \eta, \xi\rangle$, οπότε

$$\langle PTP\xi, \eta\rangle = \langle T\xi, P\eta\rangle = \langle T\xi, \lambda\xi\rangle = \omega_\xi(T)\bar{\lambda} = \omega_\xi(T)\langle \xi, \eta\rangle = \omega_\xi(T)\langle P\xi, \eta\rangle\,.$$

Έστω τώρα ότι το ω_ξ είναι κυρτός συνδυασμός δυο καταστάσεων:

$$\omega_\xi = \mu\phi + (1-\mu)\psi, \quad \mu \in (0,1)\,.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\omega_\xi = \phi$.

Παρατηρώ ότι αν γράψω $P^\perp = I - P$, τότε $\phi(P) = 1$ άρα $\phi(P^\perp) = 0$. Πράγματι,

$$1 = \omega_\xi(P) = \mu\phi(P) + (1-\mu)\psi(P) \le \mu\phi(I) + (1-\mu)\psi(I) = 1$$

άρα $\phi(P) = \psi(P) = 1$ αφού $\phi(P), \psi(P) \in [0,1]$.

Εφαρμόζοντας τώρα την ανισότητα Cauchy-Schwarz, έχουμε για κάθε $T \in \mathcal{B}(H)$

$$|\phi(TP^\perp)|^2 \le \phi(P^\perp P^\perp)\phi(T^*T) = 0$$

αφού $\phi(P^\perp P^\perp) = \phi(P^\perp) = 0$. Επομένως $\phi(TP^\perp) = 0$ δηλαδή

$$\phi(T) = \phi(TP)\,. \tag{1}$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση αυτή για τον T^* έχουμε

$$\overline{\phi(T)} = \phi(T^*) = \phi(T^*P) = \overline{\phi(PT)}$$

άρα $\phi(T) = \phi(PT)$. Όμως από την (1) για τον PT έχουμε $\phi(PT) = \phi(PTP)$, άρα τελικώς

$$\phi(T) = \phi(PTP)$$

Όμως δείξαμε ότι $PTP = \omega_\xi(T)P$, οπότε

$$\phi(T) = \phi(PTP) = \phi(\omega_\xi(T)P) = \omega_\xi(T)\phi(P) = \omega_\xi(T)$$

αφού $\phi(P) = 1$. □

7. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα και $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ μια αναπαράσταση της $\mathcal{A}$. Αν $M \subseteq H$ είναι υπόχωρος του H που είναι π-αναλλοίωτος, δηλαδή $\pi(a)(M) \subseteq M$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$, δείξτε τότε ότι ο $\overline{M}$ καθώς και ο $M^\perp$ είναι π-αναλλοίωτοι. Δείξτε επίσης ότι ένας κλειστός υπόχωρος $K \subseteq H$ είναι π-αναλλοίωτος αν και μόνον αν η ορθή προβολή $P = P(K)$ στον K μετατίθεται με την $\pi(\mathcal{A})$ (δηλ. $\pi(a)P = P\pi(a)$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$).*

   Αν η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα $\mathbf{1}$, δείξτε ότι ο υπόχωρος $K := \pi(\mathbf{1})(H)$ είναι π-αναλλοίωτος, ότι ο τελεστής $\pi(\mathbf{1})|_K$ είναι ο ταυτοτικός τελεστής στον χώρο K και ότι για κάθε $a \in \mathcal{A}$ ο τελεστής $\pi(a)$ μηδενίζεται στον χώρο $K^\perp$.

8. *Έστω $\mathcal{A} = C(K)$ όπου K είναι συμπαγής T_2 (ή μετρικός, αν θέλετε) χώρος. Δείξτε ότι μια γραμμική μορφή $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ είναι κατάσταση αν και μόνον αν $\phi(\mathbf{1}) = \|\phi\| = 1$.*

   Δείξτε ότι το ίδιο ισχύει για οποιαδήποτε C άλγεβρα $\mathcal{A}$ με μονάδα.*

Απόδειξη Γνωρίζουμε ότι κάθε κατάσταση σε μια C* άλγεβρα με μονάδα ικανοποιεί $\phi(\mathbf{1}) = \|\phi\| = 1$. Θα δείξουμε ότι ισχύει το αντίστροφο.

Έστω $x \in \mathcal{A}_+$, να δείξουμε ότι ο μιγαδικός αριθμός $\phi(x)$ ανήκει στο $\mathbb{R}_+$ και μάλιστα $\phi(x) \in [0, \|x\|]$. Αν αυτό δεν ισχύει, τότε θα υπάρχει μια κλειστή μπάλα $\bar{B}(z,r) \subseteq \mathbb{C}$ που περιέχει το $[0,\|x\|]$ αλλά δεν περιέχει το $\phi(x)$ (αρκεί να πάρουμε κατάλληλο κέντρο z με $\mathrm{Re}z = \frac{\|x\|}{2}$ με ακτίνα $r = |z - \|x\|\,|$ αρκετά μεγάλη). Δηλαδή $\lambda \in \bar{B}(z,r)$ για κάθε $\lambda \in \sigma(x)$ αλλά $\phi(x) \notin \bar{B}(z,r)$. Θα έχουμε λοιπόν $|\phi(x) - z| > r$ και $|\lambda - z| \le r$ για κάθε $\lambda \in \sigma(x)$, άρα (αφού το $x - z\mathbf{1}$ είναι φυσιολογικό στοιχείο) $\|x - z\mathbf{1}\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x - z\mathbf{1})\} \le r$ διότι $\sigma(x - z\mathbf{1}) = \{\lambda - z : \lambda \in \sigma(x)\}$. Από την άλλη όμως $\phi(\mathbf{1}) = 1$ οπότε

$$r < |\phi(x) - z| = |\phi(x - z\mathbf{1})| \le \|\phi\|\,\|x - z\mathbf{1}\| \le r$$

(αφού $\|\phi\| = 1$), άτοπο.

9. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ μια C* υπάλγεβρα με $\mathbf{1} \in \mathcal{B}$. Δείξτε ότι κάθε κατάσταση $\phi : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ επεκτείνεται σε* κατάσταση $\tilde{\phi} : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$.

Απόδειξη Αφού η ϕ είναι κατάσταση, ικανοποιεί $\phi(\mathbf{1}) = \|\phi\| = 1$. Κάθε επέκταση Hahn-Banach $\tilde{\phi} : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση που ικανοποιεί $\tilde{\phi}(b) = \phi(b)$ όταν $b \in \mathcal{B}$ άρα ειδικότερα $\tilde{\phi}(\mathbf{1}) = \phi(\mathbf{1}) = 1$, και επίσης $\|\tilde{\phi}\| = \|\phi\| = 1$. Συνεπώς, από την προηγούμενη άσκηση, η $\tilde{\phi}$ είναι κατάσταση της $\mathcal{A}$.