Θεωρία Τελεστών: Ασκήσεις ΙΙΙ

1. Αν η $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ είναι διαχωρίσιμη C* άλγεβρα, δείξτε ότι για κάθε $\phi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ ο χώρος Hilbert $(H_\phi, \|\cdot\|_\phi)$ είναι διαχωρίσιμος.

2. Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό στοιχείο. Αν $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ είναι η (μεταθετική) C* άλγεβρα που παράγεται από το a και την μονάδα, δείξτε ότι η $\mathcal{C}$ είναι ισομετρικά *-ισόμορφη με την άλγεβρα $C(\sigma(a))$ των συνεχών συναρτήσεων στον συμπαγή χώρο $\sigma(a) \subseteq \mathbb{C}$.
Συγκεκριμένα δείξτε ότι αν $f_1(\lambda) = \lambda$, $\lambda \in \sigma(a)$, η απεικόνιση $f_1 \to a$ επεκτείνεται σε ισομετρικό *-ισομορφισμό της άλγεβρας $C(\sigma(a))$ επί της $\mathcal{C}$ (που συμβολίζουμε $f \to f(a)$).

[Υπόδειξη προαιρετική: Αν $x \to \hat{x} : \mathcal{C} \to C(\sigma(\mathcal{C}))$ είναι ο μετασχηματισμός Gelfand, δείξτε ότι η απεικόνιση $\hat{a}$ απεικονίζει τον χώρο των χαρακτήρων $\sigma(\mathcal{C})$ της $\mathcal{C}$ ομοιομορφικά επί του φάσματος $\sigma(a)$ του a.]

3. Έστω H χώρος Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H)$ φυσιολογικός τελεστής. Αν $f \in C(\sigma(A))$, ορίζουμε τον $f(A) \in \mathcal{B}(H)$ όπως στην προηγούμενη άσκηση.

Δείξτε ότι για κάθε μη μηδενικό $x \in H$ υπάρχει θετικό κανονικό πεπερασμένο μέτρο Borel μ_x στο $\sigma(A)$ και ισομετρία $U_x : L^2(\sigma(A), \mu_x) \to H$ ώστε $U_x M_f = f(A) U_x$ για κάθε $f \in C(\sigma(A))$ (και ειδικότερα $AU_x = U_x M_{f_1}$ όπου $f_1(\lambda) = \lambda$).

4. (Συνέχεια της προηγούμενης) Δείξτε ότι το σύνολο τιμών της U_x είναι ο *κυκλικός υπόχωρος*

$$H_x := \overline{\text{span}\{A^n A^{*m} x : n, m \in \mathbb{Z}_+\}} = \overline{\{f(A)x : f \in C(\sigma(A))\}}$$

του x για τον A.

5. (Συνέχεια της προηγούμενης) Δείξτε ότι υπάρχει μια οικογένεια $\{H_i : i \in I\}$ από κάθετους ανά δύο υποχώρους του H, ώστε

(i) κάθε H_i να είναι A-αναλλοίωτος, δηλ. $A(H_i) \subseteq H_i$

(ii) κάθε H_i να είναι A-κυκλικός, δηλ. να περιέχει ένα διάνυσμα x ώστε $H_i = H_x$.

(iii) το ευθύ άθροισμα $\oplus_i H_i$ (δηλαδή ο μικρότερος *κλειστός* υπόχωρος του H που περιέχει κάθε H_i) να είναι όλος ο H.