Ευθέα αθροίσματα

1 Ευθύ άθροισμα χώρων Hilbert

1.1 Δύο χώροι

Αν H_1, H_2 είναι χώροι Hilbert ορίζουμε

$$H_1 \oplus H_2 := H = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_i \in H_i \right\}$$

Με γραμμικές πράξεις κατά συντεταγμένη και το εσωτερικό γινόμενο

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle := \langle x_1, y_1 \rangle_{H_1} + \langle x_2, y_2 \rangle_{H_2} .$$

(δηλαδή με τη νόρμα $\left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\|x_1\|_{H_1}^2 + \|x_2\|_{H_2}^2}$), ο $H_1 \oplus H_2$ είναι χώρος Hilbert.

Αν $T_i \in \mathcal{B}(H_i)$, $i = 1, 2$, ορίζουμε $T = T_1 \oplus T_2$ από τη σχέση

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_(x_1) \\ T_2(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η απεικόνιση $T_1 \oplus T_2$ είναι καλά ορισμένη και γραμμική.

Χρήσιμη Άσκηση:

$$\|T_1 \oplus T_2\| = \max\{\|T_1\|, \|T_2\|\} .$$

1.2 Πολλοί χώροι

Αν δοθεί ένα σύνολο $\{H_i : i \in I\}$ χώρων Hilbert, σχηματίζουμε πρώτα *το αλγεβρικό ευθύ άθροισμα*

$$H_0 := \{(x_i)_i \in I : x_i \in H_i \text{ και } x_i = 0 \text{ πλην πεπερασμένου πλήθους } i \in I\}$$

με γραμμικές πράξεις κατά συντεταγμένη. Ορίζουμε εσωτερικό γινόμενο

$$\langle (x_i), (y_i) \rangle_0 := \sum_{i \in I} \langle x_i, y_i \rangle_{H_i}$$

(Παρατηρείστε ότι στο άθροισμα αυτό υπάρχουν μόνον πεπερασμένο πλήθος μη μηδενικών όρων.) Εύκολα ελέγχονται οι ιδιότητες του εσωτερικού γινόμενου. Η νόρμα που επάγεται είναι η

$$\|(x_i)\|_0 := \left(\sum_{i \in I} \|x_i\|_{H_i}^2 \right)^{1/2} .$$

Συμβολισμός Αν $a_i \in \mathbb{R}_+$ γράφουμε

$$\sum_{i\in I} a_i := \sup\left\{\sum_{i\in J} a_i : J \subseteq I \text{ finite }\right\} \in [0,+\infty]\,.$$

Ορισμός 1. *Το* **ευθύ άθροισμα χώρων Hilbert** $H := \bigoplus_{i\in I} H_i$ *είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων* $\xi = (\xi_i)$ *με* $\xi_i \in H_i$ *για κάθε* $i \in I$ *και* $\sum_{i\in I} \|\xi_i\|_{H_i}^2 < \infty$.

Άσκηση 1. *Το ευθύ άθροισμα* $H := \bigoplus H_i$ *είναι πλήρης χώρος ως προς τη νόρμα* $\|\xi\|_H := \left(\sum_{i\in I} \|\xi_i\|_{H_i}^2\right)^{1/2}$.

Κάθε $\xi \in H$ *έχει αριθμήσιμο φορέα* $J_\xi := \{j \in I : \xi_j \neq 0\}$. *Επομένως για κάθε* $\xi, \eta \in H$ *η απεικόνιση* $I \to \mathbb{C} : i \to \langle \xi_i, \eta_i \rangle_{H_i}$ *μηδενίζεται έξω απ' το αριθμήσιμο σύνολο* J_ξ. *Ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο*

$$\langle \xi, \eta \rangle_H = \sum_{i\in J_\xi} \langle \xi_i, \eta_i \rangle_{H_i}$$

που επάγει τη νόρμα $\|\cdot\|_H$.

Κάθε H_j *εμφυτεύεται ισομετρικά στον* H *μέσω της απεικόνισης* $H_j \to H : x \to (x_i)$ *όπου* $x_i = x\delta_{ij}$. *Το αλγεβρικό ευθύ άθροισμα* $(H_0, \|\cdot\|_0)$ *είναι ισομετρικό με έναν πυκνό υπόχωρο του* H.

Απόδειξη της πληρότητας. Έστω (ξ_n) βασική ακολουθία στον H και $\epsilon > 0$.
Υπάρχει n_0 ώστε $\|\xi_n - \xi_m\|_H < \epsilon$ για κάθε $m, n \geqslant n_0$.
Αν $\xi_n = (\xi_n(i))_{i\in I}$, τότε $\|\xi_n(i) - \xi_m(i)\|_{H_i} \leqslant \|\xi_n - \xi_m\|_H < \epsilon$ για κάθε $i \in I$.
Από την πληρότητα του H_i, υπάρχει $\xi(i) \in H_i$ ώστε $\lim_m \|\xi(i) - \xi_m(i)\|_{H_i} = 0$ για κάθε $i \in I$.
Για κάθε *πεπερασμένο* $J \subseteq I$ έχουμε $\sum_{i\in J} \|\xi_n(i) - \xi_m(i)\|_{H_i}^2 \leqslant \|\xi_n - \xi_m\|_H^2 < \epsilon^2$ για κάθε $m, n \geqslant n_0$, οπότε $\sum_{i\in J} \|\xi_n(i) - \xi(i)\|_{H_i}^2 = \lim_m (\sum_{i\in J} \|\xi_n(i) - \xi_m(i)\|_{H_i}^2) \leqslant \epsilon^2$ όταν $n \geqslant n_0$.
Συνεπώς $\|\xi - \xi_n\|_H^2 = \sup_J \{\sum_{i\in J} \|\xi(i) - \xi_n(i)\|_{H_i}^2 : J \subseteq I \text{ πεπερ.}\} \leqslant \epsilon^2$ όταν $n \geqslant n_0$.
Αυτό δείχνει ότι $\xi - \xi_n \in H$ άρα $\xi \in H$ και ότι $\lim_n \|\xi - \xi_n\|_H = 0$.

2 Ευθύ άθροισμα τελεστών

Αν δοθεί $T_i \in \mathcal{B}(H_i)$ για κάθε $i \in I$, να ορίσουμε τελεστή $\bigoplus_i T_i \in \mathcal{B}(\bigoplus H_i)$.

Ορίζουμε πρώτα

$$T_0 : H_0 \to H_0 : (x_i) \to (T_i x_i)\,.$$

Είναι καλά ορισμένη απεικόνιση (γιατί $\text{supp}(T_i x_i) \subseteq \text{supp}(x_i)$) και γραμμική, αλλά δεν επεκτείνεται πάντα στον H:

Παρατήρησε ότι αν $j \in I$ και $x \in H_j$ θέτοντας $\xi = (x\delta_{ij})_i \in H_0$ έχουμε $T_0\xi = (T_j x \delta_{ij})_i$, άρα $\|T_0\xi\|_H = \|T_j x\|_{H_j}$ οπότε $\|T_0\| \geqslant \|T_j\|$. Επομένως αναγκαία συνθήκη για να είναι ο T_0 συνεχής είναι η

$$\sup\{\|T_j\|_{\mathcal{B}(H_j)} : j \in I\} < \infty\,.$$

Πρόταση 2. *Μια οικογένεια (T_i) με $T_i \in \mathcal{B}(H_i)$ ορίζει φραγμένο τελεστή $\bigoplus_i T_i \in \mathcal{B}(\bigoplus H_i)$ που επεκτείνει τον T_0 αν και μόνον αν $\sup\{\|T_j\|_{\mathcal{B}(H_j)} : j \in I\} < \infty$. Μάλιστα*

$$\left\| \bigoplus_i T_i \right\|_{\mathcal{B}(H)} = \sup\{\|T_j\|_{\mathcal{B}(H_j)} : j \in I\}\,.$$

Απόδειξη. Έστω $M = \sup\{\|T_j\|_{\mathcal{B}(H_j)} : j \in I\}$. Αν $M = +\infty$, ο T_0 δεν είναι συνεχής στον H_0, άρα δεν έχει συνεχή επέκταση στον $\bigoplus H_i$. Αν $M < +\infty$, τότε για κάθε $x = (x_i) \in H_0$,

$$\|T_0 x\|_0^2 = \sum_{i \in I} \|T_i x_i\|_{H_i}^2 \leqslant \sum_{i \in I} M^2 \|x_i\|_{H_i}^2 = M^2 \|x\|_0^2$$

άρα ο T_0 είναι φραγμένος στην $\|\cdot\|_0$ από το M. Άρα επεκτείνετι σε φραγμένο τελεστή T στον $\bigoplus H_i$ με $\|T\| = \|T_0\| \leqslant M$. Δείξαμε όμως προηγουμένως ότι $\|T_0\| \geqslant M$. □

3 Ευθύ άθροισμα αναπαραστάσεων

Έστω $\mathcal{A}$ μια C*-άλγεβρα. Έστω ότι για κάθε $i \in I$ δίδεται μια αναπαράσταση (π_i, H_i). Τότε για κάθε $a \in \mathcal{A}$ έχουμε μια οικογένεια $(\pi_i(a))$ φραγμένων τελεστών $\pi_i(a) \in \mathcal{B}(H_i)$ και ξέρουμε ότι $\|\pi_i(a)\|_{\mathcal{B}(H_i)} \leqslant \|a\|_{\mathcal{A}}$ για κάθε i. Επομένως $\sup_i \|\pi_i(a)\|_{\mathcal{B}(H_i)} \leqslant \|a\|_{\mathcal{A}}$ οπότε μπορούμε να ορίσουμε:

$$\pi(a) := \oplus_{i \in I} \pi_i(a) : \oplus H_i \to \oplus H_i : (x_i) \to (\pi_i(a) x_i)\,.$$

Επομένως ορίζεται μια απεικόνιση

$$\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\oplus H_i) : a \to \pi(a)$$

και $\|\pi(a)\| = \sup_i \|\pi_i(a)\| \leqslant \|a\|$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$.

Ισχυρισμός: Η π είναι μια *-αναπαράσταση της $\mathcal{A}$, δηλαδή για κάθε $a, b \in \mathcal{A}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \pi(a + \lambda b) &= \pi(a) + \lambda \pi(b) \\ \pi(ab) &= \pi(a)\pi(b) \\ \pi(a^*) &= (\pi(a))^*\,. \end{aligned}$$

Οι σχέσεις αυτές ελέγχονται πολύ εύκολα κατά σημείο. Μάλιστα, αφού αφορούν ισότητες *φραγμένων* τελεστών, αρκεί να τις ελέγξουμε στα σημεία του πυκνού υποχώρου H_0. Για παράδειγμα

$$\begin{aligned} \langle \pi(a^*)(x_i), (y_i) \rangle_H &= \langle (\pi_i(a^*) x_i), (y_i) \rangle_H = \sum_i \langle \pi_i(a^*) x_i, y_i \rangle_{H_i} \\ &= \sum_i \langle \pi_i(a)^* x_i, y_i \rangle_{H_i} = \sum_i \langle x_i, \pi_i(a) y_i \rangle_{H_i} \\ &= \langle (x_i), (\pi_i(a) y_i) \rangle_H = \langle (x_i), \pi(a)(y_i) \rangle_H \\ &= \langle \pi(a)^*(x_i), (y_i) \rangle_H \quad \text{για κάθε } (x_i), (y_i) \in H_0 \end{aligned}$$

και συνεπώς $\pi(a^*) = (\pi(a))^*$.

4 Η καθολική αναπαράσταση

Έστω $\mathcal{A}$ μια C*-άλγεβρα. Θεωρώ το σύνολο $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{A})$ όλων των καταστάσεων (states) της $\mathcal{A}$. Για κάθε $\phi \in \mathcal{S}$ θεωρούμε την τριάδα GNS $(\pi_\phi, H_\phi, \xi_\phi)$.

Ορισμός 2. *Η* **καθολική αναπαράσταση** *της $\mathcal{A}$ είναι η (π, H) όπου*

$$H := \bigoplus_{\phi \in \mathcal{S}} H_\phi \quad \textit{και} \quad \pi(a) := \bigoplus_{\phi \in \mathcal{S}} \pi_\phi(a), \quad a \in \mathcal{A}\,.$$

Στόχος: να αποδείξουμε το

Θεώρημα 3 (Gelfand-Naimark). *Η καθολική αναπαράσταση είναι πιστή, δηλ. 1-1.*

Επομένως κάθε C-άλγεβρα αναπαρίσταται ισομετρικά και *-ισομορφικά ως πιστή C* υπάλγεβρα της άλγεβρας $\mathcal{B}(H)$ των τελεστών σε έναν κατάλληλο χώρο Hilbert.*

Σχόλια Πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $a \in \mathcal{A}\backslash\{0\}$ ισχύει ότι $\pi(a) \neq 0$, δηλαδή $\oplus_{\phi \in \mathcal{S}} \pi_\phi(a) \neq 0$. Ισοδύναμα, πρέπει να δείξουμε ότι κάποιος προσθετέος $\pi_\phi(a)$ δεν είναι ο μηδενικός τελεστής. Αρκεί λοιπόν να βρούμε κάποια $\phi = \phi_a \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ ώστε $\pi_\phi(a)\xi_\phi \neq 0$. Όμως,

$$\|\pi_\phi(a)\xi_\phi\|^2_{H_\phi} = \langle \pi_\phi(a)\xi_\phi, \pi_\phi(a)\xi_\phi \rangle_{H_\phi} = \langle \pi_\phi(a^*a)\xi_\phi, \xi_\phi \rangle_{H_\phi} = \phi(a^*a)\,.$$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι

Πρόταση 4. *Για κάθε $a \in \mathcal{A}\backslash\{0\}$ υπάρχει $\phi = \phi_a \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ ώστε $\phi(a^*a) \neq 0$.*

Απόδειξη. Προσεχώς...