Ο συναρτησιακός λογισμός και ο θετικός κώνος

Σταθεροποιούμε έναν $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Αν p είναι ένα πολυώνυμο, $p(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k$ ($c_k \in \mathbb{C}$), θέτουμε $p(A) = \sum_{k=0}^{n} c_k A^k$ (όπου $A^0 = I$).

Στόχος: να ορίσουμε τελεστές της μορφής $f(A)$ για άλλες κλάσεις συναρτήσεων f.

Γενικότερα, έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathcal{A}$. Ορίζουμε πάλι $p(a) = \sum_{k=0}^{n} c_k a^k$,

Παρατήρηση. Η απεικόνιση $\Phi_\pi : p \to p(a)$ διατηρεί το άθροισμα $+$ και το γινόμενο $\cdot$.

Λήμμα 1 (φασματικής απεικόνισης)**.** *Έστω $\mathcal{A}$ μιγαδική άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathcal{A}$. Αν p είναι πολυώνυμο,*

$$\sigma(p(a)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\} .$$

Απόδειξη Αν το p είναι σταθερό, το συμπέρασμα είναι άμεσο. Υποθέτουμε τώρα ότι το p δεν είναι σταθερό. Αν $\mu \in \mathbb{C}$ θέτω $q(\lambda) = p(\lambda) - \mu \quad (\lambda \in \mathbb{C})$. Από το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας, το πολυώνυμο q παραγοντοποιείται

$$q(\lambda) = c(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_n)$$

όπου $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ οι ρίζες του q και $c \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$. Επομένως

$$q(a) = c(a - \lambda_1 \mathbf{1})(a - \lambda_2 \mathbf{1}) \ldots (a - \lambda_n \mathbf{1}) \in \mathcal{A} .$$

Παρατήρησε ότι, επειδή οι παράγοντες $a - \lambda_i \mathbf{1}$ μετατίθενται μεταξύ τους, το γινόμενό τους έχει αντίστροφο αν και μόνον αν καθένας έχει αντίστροφο. [1] Άρα η σχέση $\mu \notin \sigma(p(a))$, δηλαδή $q(a) = p(a) - \mu \mathbf{1} \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$, ισοδυναμεί με την $a - \lambda_i \mathbf{1} \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$, δηλαδή $\lambda_i \notin \sigma(a)$, για κάθε $i = 1, \ldots n$. Επομένως $\mu \notin \sigma(p(a))$ αν και μόνον αν $\lambda \neq \lambda_i$ για κάθε $\lambda \in \sigma(a)$, δηλαδή $q(\lambda) \neq 0$, ισοδύναμα $p(\lambda) \neq \mu$ για κάθε $\lambda \in \sigma(a)$. $\square$

Πρόταση 2. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathcal{A}$.*

$$a = a^* \implies \sigma(a) \subseteq \mathbb{R} .$$

Απόδειξη Έστω $\lambda + i\mu \in \sigma(a)$ όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Δείχνουμε ότι $\mu = 0$. Αν $\mu \neq 0$, το στοιχείο $a - (\lambda + i\mu)\mathbf{1} = \mu(\frac{a - \lambda \mathbf{1}}{\mu} - i\mathbf{1})$ της $\mathcal{A}$ δεν είναι αντιστρέψιμο. Έπεται ότι, αν γράψουμε $b := \frac{a - \lambda \mathbf{1}}{\mu} \in \mathcal{A}$ θα έχουμε $b = b^*$ και $i \in \sigma(b)$. Αυτό δεν μπορεί να συμβεί, για τον εξής λόγο:

Αν $i \in \sigma(b)$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το $(n\mathbf{1} - ib) - (n+1)\mathbf{1} = -i(b - i\mathbf{1})$ δεν είναι αντιστρέψιμο και συνεπώς $n + 1 \in \sigma(n\mathbf{1} - ib)$. Έπεται ότι $|n+1| \leqslant \|n\mathbf{1} - ib\|$ και άρα

$$(n+1)^2 \leqslant \|n\mathbf{1} - ib\|^2 \overset{(C^*)}{=} \|(n\mathbf{1} - ib)^*(n\mathbf{1} - ib)\| \overset{(b=b^*)}{=} \|(n\mathbf{1} + ib)(n\mathbf{1} - ib)\| = \left\|n^2\mathbf{1} + b^2\right\| \leqslant n^2 + \left\|b^2\right\| .$$

Επομένως έχουμε $2n + 1 \leqslant \left\|b^2\right\|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άτοπο. $\square$

Θεώρημα 3. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα. Αν $a \in \mathcal{A}$ και $a = a^*$ τότε τότε, για κάθε πολυώνυμο p, η νόρμα του $p(a) \in \mathcal{A}$ είναι*

$$\|p(a)\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(a)\} := \|p\|_{\sigma(a)} .$$

[1] Το $q(a)$ μπορεί να γραφεί $q(a) = (a - \lambda_k \mathbf{1})b_k = b_k(a - \lambda_k \mathbf{1})$ για κάποιο $b_k \in \mathcal{A}$. Πολλαπλασιάζοντας δεξιά και αριστερά με $(q(a))^{-1}$, συμπεραίνουμε ότι το $a - \lambda_k \mathbf{1}$ έχει αριστερό και δεξί αντίστροφο, άρα είναι αντιστρέψιμο.

Απόδειξη Παρατηρούμε ότι το $p(a)$ είναι φυσιολογικό: πράγματι, αφού $a = a^*$ έχουμε ότι και το $p(a)^* = \sum_{k=0}^n \bar{c}_k a^k$ είναι πολυώνυμο του a, άρα προφανώς μετατίθεται με το $p(a)$. Έχουμε όμως δείξει ότι, για φυσιολογικά στοιχεία, η νόρμα και η φασματική ακτίνα είναι ίσες, οπότε

$$\|p(a)\| = \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(p(a))\}.$$

Αλλά από το Λήμμα Φασματικής Απεικόνισης ξέρουμε ότι $\mu \in \sigma(p(a))$ αν και μόνον αν $\mu = p(\lambda)$ για κάποιο $\lambda \in \sigma(a)$. Συνεπώς η προηγούμενη ισότητα γίνεται

$$\|p(a)\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(a)\}. \qquad \square$$

Θα επεκτείνουμε την απεικόνιση $p \to p(a)$ από τα πολυώνυμα στις συνεχείς συναρτήσεις. Ας θυμηθούμε ότι η υπάλγεβρα $\mathcal{P}(\sigma(a)) \subseteq C(\sigma(a))$ των *πολυωνυμικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το* $\sigma(a)$ είναι πυκνή στην άλγεβρα $C(\sigma(a))$ των συνεχών συναρτήσεων $f : \sigma(a) \to \mathbb{C}$ ως προς την νόρμα supremum. Αυτό έπεται είτε απευθείας από το Θεώρημα Stone-Weierstrass, είτε απ' το βασικό Θεώρημα Weierstrass, αν παρατηρήσει κανείς ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : \sigma(a) \to \mathbb{C}$, επεκτείνεται με την ίδια νόρμα σε μια συνεχή συνάρτηση ορισμένη στο $[-\|a\|, \|a\|]$, η οποία προσεγγίζεται από πολυώνυμα, ομοιόμορφα στο $[-\|a\|, \|a\|]$, άρα και στο $\sigma(a)$.

Θεώρημα 4 (Συναρτησιακός λογισμός (functional calculus))**.**
*Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathcal{A}$ με $a = a^*$. Υπάρχει μοναδικός ισομετρικός αλγεβρικός *-μορφισμός*

$$\Phi_c : (C(\sigma(a)), \|\cdot\|_{\sigma(a)}) \to (\mathcal{A}, \|\cdot\|) : f \to f(a)$$

που απεικονίζει το σταθερό πολυώνυμο $p_0(t) = 1$ στη μονάδα της $\mathcal{A}$ και το ταυτοτικό πολυώνυμο $p_1(t) = t$ στο $a \in \mathcal{A}$.

Επίσης, ισχύει η ισότητα $\Phi_c(p) = p(a)$ για κάθε πολυώνυμο p.

Απόδειξη. Ύπαρξη: Από το προηγούμενο Θεώρημα έπεται ότι αν δύο πολυώνυμα p, q ταυτίζονται στο $\sigma(a)$, τότε $p(a) = q(a)$ (πράγματι, $\|p(a) - q(a)\| = \sup\{|p(\lambda) - q(\lambda)| : \lambda \in \sigma(a)\} = 0$). Επομένως το $p(a)$ εξαρτάται μόνον από τις τιμές του p στο $\sigma(a)$. Δηλαδή η απεικόνιση

$$\Phi_o : \ (\mathcal{P}(\sigma(a)), \|\cdot\|_{\sigma(a)}) \to (\mathcal{A}, \|\cdot\|) : \quad p \to p(a)$$

είναι καλά ορισμένη. Είναι φανερό ότι είναι μορφισμός αλγεβρών:

$$(p+q)(a) = p(a) + q(a) \quad \text{και} \quad (pq)(a) = p(a)q(a)$$

όταν τα p και q είναι πολυώνυμα, και ότι διατηρεί την ενέλιξη:
Αν $p(t) = \sum_{k=0}^n c_k t^k$, τότε

$$(p(a))^* = \left(\sum_{k=0}^n c_k a^k \right)^* = \sum_{k=0}^n \bar{c}_k a^k = \bar{p}(a)$$

(αφού $a = a^*$). Αλλά από το προηγούμενο Θεώρημα έχουμε $\|\Phi_o(p)\| = \|p(a)\| = \|p\|_{\sigma(a)}$ για κάθε πολυώνυμο p, δηλαδή η Φ_o είναι γραμμική ισομετρία χώρων με νόρμα. Εφόσον η $\mathcal{P}(\sigma(a))$ είναι πυκνή στην $C(\sigma(a))$, έπεται ότι η Φ_o έχει μοναδική συνεχή επέκταση (η οποία θα είναι ισομετρική) $\Phi_c : C(\sigma(a)) \to \mathcal{A}$.

Από τη συνέχεια της ενέλιξης και του γινομένου έπεται ότι η Φ_c είναι *-μορφισμός: αν $f, g \in C(\sigma(a))$ και (p_n), (q_n) είναι ακολουθίες πολυωνύμων με $\|f-p_n\|_{\sigma(a)} \to 0$ και $\|g-q_n\|_{\sigma(a)} \to 0$, τότε $\|fg-p_nq_n\|_{\sigma(a)} \to 0$, άρα, εφόσον $(p_nq_n)(a) = p_n(a)q_n(a)$,

$$\begin{aligned} (fg)(a) &= \lim_n (p_nq_n)(a) = \lim_n p_n(a) \lim_n q_n(a) = f(a)g(a) \\ \text{και} \quad (f(a))^* &= \lim_n (p_n(a))^* = \lim_n \bar{p}_n(a) = \bar{f}(a)\,. \end{aligned}$$

Μοναδικότητα: Αν Ψ είναι ένας συνεχής μορφισμός $C(\sigma(a)) \to \mathcal{A}$ που ταυτίζεται με την Φ_c στα p_0 και p_1 τότε, αφού και οι δύο είναι μορφισμοί, θα ταυτίζονται σε δυνάμεις και γραμμικούς συνδυασμούς, δηλαδή σε κάθε πολυώνυμο. Εφόσον οι Φ_c και Ψ είναι (ομοιόμορφα) συνεχείς, θα ταυτίζονται και στα (ομοιόμορφα) όρια πολυωνύμων, δηλαδή σε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις. □

Πόρισμα 5. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα και $a = a^* \in \mathcal{A}$. Το σύνολο*

$$C^*(\mathbf{1}, a) := \{f(a) : f \in C(\sigma(a))\}$$

είναι μεταθετική C άλγεβρα με μονάδα. Είναι η μικρότερη κλειστή υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$ που περιέχει την μονάδα και το a. Κάθε στοιχείο της είναι όριο πολυωνύμων του a.*

Ανεξαρτησία του φάσματος σε C* άλγεβρες Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ κλειστή υπάλγεβρα με $\mathbf{1} \in \mathcal{B}$. Έστω $b \in \mathcal{B}$. Αν $b \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$, τότε βέβαια $b \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$. Συνεπώς $\sigma_{\mathcal{A}}(b) \subseteq \sigma_{\mathcal{B}}(b)$. Ισότητα όμως δεν ισχύει πάντα.

Παράδειγμα 6. *$\mathcal{A} = C(\mathbb{T})$ (όπου $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$) και $\mathcal{B}$ η άλγεβρα του δίσκου, δηλ. το σύνολο των $f \in \mathcal{A}$ για τις οποίες υπάρχει συνεχής επέκταση $\tilde{f} : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$, που είναι ολόμορφη στον ανοικτό δίσκο $\mathbb{D}$. Η $f(z) = z$ ανήκει στην $\mathcal{B}$, αλλά η $\frac{1}{f} \in \mathcal{A}$ δεν ανήκει στην $\mathcal{B}$.*

Πρόταση 7. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ μια C* υπάλγεβρα με $\mathbf{1} \in \mathcal{B}$. Τότε για κάθε $b \in \mathcal{B}$ ισχύει*

$$\sigma_{\mathcal{A}}(b) = \sigma_{\mathcal{B}}(b).$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξω ότι αν $b \in \mathcal{B}$ και $b \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$, τότε $b \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$.

Υποθέτω πρώτα ότι $b = b^*$. Εφόσον $\sigma_{\mathcal{A}}(b) \subseteq \mathbb{R}$ και $0 \notin \sigma_{\mathcal{A}}(b)$, η συνάρτηση $f(t) = \frac{1}{t}$ ορίζεται και είναι συνεχής στο $\sigma_{\mathcal{A}}(b)$. Συνεπώς υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) που συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $\sigma_{\mathcal{A}}(b)$. Τότε όμως $p_n(b) \to f(b)$. Επειδή η $\mathcal{B}$ είναι άλγεβρα, κάθε $p_n(b)$ ανήκει στην $\mathcal{B}$, κι επειδή είναι κλειστή, το $f(b) = \lim_n p_n(b)$ ανήκει στην $\mathcal{B}$. Όμως $tf(t) = 1$ για κάθε $t \in \sigma_{\mathcal{A}}(b)$, άρα $bf(b) = f(b)b = \mathbf{1}$ (ο συναρτησιακός λογισμός διατηρεί γινόμενα). Δείξαμε λοιπόν ότι $b \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$.

Γενική περίπτωση. Έστω $c \in \mathcal{A}$ ο αντίστροφος του b. Να δείξουμε ότι $c \in \mathcal{B}$. Θεωρώ το b^*b και παρατηρώ ότι είναι αυτοσυζυγές, ότι ανήκει στην $\mathcal{B}$ (διότι η $\mathcal{B}$ είναι *-υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$, άρα περιέχει και το b^*), και ότι είναι αντιστρέψιμο στην $\mathcal{A}$ και ο αντίστροφός του είναι cc^*.

Συνεπώς από την προηγούμενη περίπτωση έχουμε $b^*b \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$, δηλαδή $cc^* \in \mathcal{B}$. Τότε όμως, αφού $c^*b^* = \mathbf{1}$, έχουμε $c = (cc^*)b^*$, άρα $c \in \mathcal{B}$. □

Πρόταση 8 (Θεώρημα Φασματικής Απεικόνισης)**.** *Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα και $a = a^* \in \mathcal{A}$. Για κάθε $f \in C(\sigma(a))$ ισχύει*

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Απόδειξη. Ονομάζουμε $\mathcal{B}$ την C* άλγεβρα $C^*(\mathbf{1}, a)$ που παράγεται από το a και την μονάδα. Έχουμε δείξει ότι το φάσμα δεν εξαρτάται από την άλγεβρα, άρα για κάθε $f \in C(\sigma(a))$ έχουμε $\sigma(f(a)) = \sigma_{\mathcal{B}}(f(a))$. Όπως η $\mathcal{B}$ είναι ισομορφική με την άλγεβρα $C(\sigma(a))$ μέσω του συναρτησιακού λογισμού $\Phi_c : f \to f(a)$ που διατηρεί και την μονάδα. Συνεπώς ένα στοιχείο $\mu\mathbf{1} - f(a) \in \mathcal{B}$ είναι αντιστρέψιμο στην $\mathcal{B}$ αν και μόνον αν η συνάρτηση $g := \mu - f$ είναι αντιστρέψιμη στην $C(\sigma(a))$. Αυτό όμως συμβαίνει αν και μόνον αν η $\mu - f$ δεν μηδενίζεται πουθενά στο πεδίο ορισμού της $\sigma(a)$, δηλ. αν και μόνον αν $\mu \notin f(\sigma(a))$.
Δείξαμε λοιπόν ότι

$$\mu \in \sigma(f(a)) = \sigma_{\mathcal{B}}(f(a)) \iff \mu \in f(\sigma(a)) . \qquad \square$$

Ο θετικός κώνος μιας C* άλγεβρας

Ορισμός 1. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα. Ένα $a \in \mathcal{A}$ λέγεται* **θετικό** *(γράφουμε $a \geqslant 0$) αν $a = a^*$ και $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$.*
Θέτουμε $\mathcal{A}_+ = \{a \in \mathcal{A} : a \geqslant 0\}$.
Αν a, b είναι αυτοσυζυγή, λέμε ότι $a \leqslant b$ όταν $b - a \in \mathcal{A}_+$.

Παραδείγματα 9. • *Στον $C(K)$: $f \geqslant 0$ ανν $f(t) \in \mathbb{R}_+$ για κάθε $t \in K$ (γιατί $\sigma(f) = f(K)$).*

• *Στην $M_n(\mathbb{C})$: $T \geqslant 0$ ανν ο T διαγωνοποιείται και έχει μη αρνητικές ιδιοτιμές, ισοδύναμα ανν είναι θετικά ημιορισμένος, δηλ. $\langle T\xi, \xi\rangle \geqslant 0$ για κάθε $\xi \in \mathbb{C}^n$.*

• *Στην $\mathcal{B}(H)$: $T \geqslant 0$ ανν $\langle T\xi, \xi\rangle \geqslant 0$ για κάθε $\xi \in H$.*

Πρόταση 10. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα και $a = a^* \in \mathcal{A}$. Αν $f \in C(\sigma(a))$, έχουμε $f(a) \geqslant 0$ αν και μόνον αν $f \geqslant 0$, δηλαδή $f(\lambda) \geqslant 0$ για κάθε $\lambda \in \sigma(a)$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Φασματικής απεικόνισης έχουμε $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)) = \{f(t) : t \in \sigma(a)\}$. Επομένως το $f(a) \in \mathcal{A}$ είναι αυτοσυζυγές αν και μόνον αν $f(\sigma(a)) \subseteq \mathbb{R}$, δηλ. ανν η f παίρνει πραγματικές τιμές στο $\sigma(a)$, και είναι θετικό αν και μόνον αν είναι αυτοσυζυγές και $f(\sigma(a)) \subseteq \mathbb{R}_+$, δηλ. ανν η f παίρνει πραγματικές και μη αρνητικές τιμές στο $\sigma(a)$. $\square$

Πρόταση 11. *Σε κάθε C* άλγεβρα $\mathcal{A}$ το σύνολο $\mathcal{A}_+$ είναι κώνος, δηλαδή:*

$$a, b \in \mathcal{A}_+,\ \lambda \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda a \in \mathcal{A}_+, a + b \in \mathcal{A}_+.$$

Ο πρώτος ισχυρισμός είναι προφανής. Για τον δεύτερο, θα χρειασθεί ένα λήμμα:

Λήμμα 12. *Σε μια C* άλγεβρα $\mathcal{A}$ με μονάδα, αν $x = x^*$ και $\|x\| \leqslant \mu$, τότε*

$$\begin{aligned} & -\mu\mathbf{1} \leqslant x \leqslant \mu\mathbf{1} \\ \textit{και} \quad & x \geqslant 0 \iff \|x - \mu\mathbf{1}\| \leqslant \mu . \end{aligned}$$

Απόδειξη. Αφού $x = x^*$, έχουμε $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}$. Επίσης αν $\lambda \in \sigma(a)$ έχουμε $|\lambda| \leqslant \|x\| \leqslant \mu$. Συνεπώς $\sigma(x) \subseteq [-\|x\|, \|x\|] \subseteq [-\mu, \mu]$. Επομένως, $\sigma(x + \mu\mathbf{1}) \subseteq [0, 2\mu]$, άρα $x + \mu\mathbf{1} \geqslant 0$ και ομοίως $\mu\mathbf{1} - x \geqslant 0$. Άρα $-\mu\mathbf{1} \leqslant x$ και $x \leqslant \mu\mathbf{1}$.

Επίσης, επειδή η φασματική ακτίνα ενός φυσιολογικού στοιχείου είναι ίση με τη νόρμα του, έχουμε

$$\|x - \mu\mathbf{1}\| = \rho(x - \mu\mathbf{1}) = \sup\{|\mu - \lambda| : \lambda \in \sigma(x)\} = \sup\{(\mu - \lambda) : \lambda \in \sigma(x)\}$$

το οποίο είναι μικρότερο ή ίσο από μ αν και μόνον αν $\sigma(x) \subseteq \mathbb{R}_+$. $\square$

Απόδειξη της Πρότασης 11 Είναι φανερό ότι αν $a \geqslant 0$ και $\lambda \geqslant 0$ τότε $\lambda a \geqslant 0$.

Τώρα, για να δείξουμε ότι το άθροισμα δυο θετικών στοιχείων είναι θετικό αρκεί, αν a and b είναι θετικά στοιχεία νόρμας το πολύ 1, να δείξουμε ότι το $\frac{a+b}{2}$ είναι θετικό. Από το Λήμμα έχουμε ότι $\|a - \mathbf{1}\| \leqslant 1$ και $\|b - \mathbf{1}\| \leqslant 1$, οπότε

$$\left\| \mathbf{1} - \frac{a+b}{2} \right\| = \frac{1}{2} \|(\mathbf{1} - a) + (\mathbf{1} - b)\| \leqslant \frac{1}{2}(\|\mathbf{1} - a\| + \|\mathbf{1} - b\|) \leqslant 1 \,,$$

συνεπώς, αφού το $\frac{a+b}{2}$ είναι αυτοσυζυγές, πάλι από το Λήμμα προκύπτει ότι $\frac{a+b}{2} \geqslant 0$. $\square$

Πρόταση 13. *Ο κώνος $\mathcal{A}_+$ είναι $\|\cdot\|$-κλειστός και γνήσιος, δηλαδή $\mathcal{A}_+ \cap (-\mathcal{A}_+) = \{0\}$.*

Απόδειξη. (α) Από το Λήμμα έχουμε ότι

$$\mathcal{A}_+ = \{a \in \mathcal{A} : a = a^* \text{ και } \|a - \|a\| \mathbf{1}\| \leqslant \|a\|\}.$$

Το σύνολο αυτό είναι κλειστό, από τη συνέχεια της ενέλιξης και της νόρμας.

(β) Αν $a \in \mathcal{A}_+$ και $-a \in \mathcal{A}_+$, τότε $a = a^*$ και $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$ και $\sigma(-a) \subseteq \mathbb{R}_+$, δηλαδή $\sigma(a) \subseteq \{0\}$. Τότε όμως, αφού $a = a^*$, έχουμε $\|a\| = \rho(a) = 0$, άρα $a = 0$. $\square$

Ο επόμενος στόχος είναι να δείξουμε ότι ένα στοιχείο μιας C* άλγεβρας είναι θετικό αν και μόνον αν έχει τετραγωνική ρίζα. Η μια κατεύθυνση προκύπτει από το συναρτησιακό λογισμό:

Πρόταση 14. *Κάθε θετικό στοιχείο μιάς C* άλγεβρας $\mathcal{A}$ έχει θετική τετραγωνική ρίζα. Μάλιστα*

$$a \in \mathcal{A}_+ \quad \textit{αν και μόνον αν υπάρχει } \; b \in \mathcal{A}_+ \; \textit{ώστε } \; a = b^2.$$

Απόδειξη. Αν $a = b^2$ όπου $b \in \mathcal{A}_+$, τότε $a = a^*$ και $\sigma(a) = \{\lambda^2 : \lambda \in \sigma(b)\}$ από το Λήμμα φασματικής απεικόνισης. Επομένως, αφού $\sigma(b) \subseteq \mathbb{R}_+$ έχουμε $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$ και συνεπώς $a \geqslant 0$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $a \geqslant 0$. Τότε $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$ οπότε η συνάρτηση $f(t) = \sqrt{t}$ ορίζεται και είναι συνεχής στο $\sigma(a)$. Εφαρμόζοντας τον συναρτησιακό λογισμό (αφού $a = a^*$) έχουμε ένα στοιχείο $b := f(a) = \Phi_c(f)$ της $\mathcal{A}$ το οποίο είναι θετικό αφού η $f(t) \geqslant 0$ γι κάθε $t \in \sigma(a)$ (Πρόταση 10). Πάλι απ' τον συναρτησιακό λογισμό έχουμε $b^2 = (\Phi_c(f))^2 = \Phi_c(f^2) = a$. $\square$

Παρατήρηση 15. *Η θετική τετραγωνική ρίζα ενός θετικού στοιχείου $a \in \mathcal{A}_+$ ανήκει στην C* άλγεβρα $C^*(\mathbf{1}, a)$.*

Απόδειξη. $\sqrt{a} = f(a) \in C^*(\mathbf{1}, a)$ όπου $f(t) = \sqrt{t}$. $\square$

Παρατήρηση 16. *Η θετική τετραγωνική ρίζα ενός θετικού στοιχείου $a \in \mathcal{A}_+$ είναι μοναδική. Δηλαδή, αν $c \in \mathcal{A}_+$ και $c^2 = a$, τότε $c = f(a)$ όπου $f(t) = \sqrt{t}$ για κάθε $t \in \sigma(a)$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι το c μετατίθεται με το a (αφού $a = c^2$). Συνεπώς μετατίθεται και με κάθε πολυώνυμο του a, άρα και με το $b := f(a)$, που είναι όριο πολυωνύμων του a.

Έπεται ότι η C* άλγεβρα $C^*(\mathbf{1}, b, c)$ που παράγεται από τα θετικά στοιχεία $\mathbf{1}, b, c$ είναι μεταθετική. Κατά συνέπεια είναι ισομετρικά *-ισομορφική με μια C* άλγεβρα της μορφής $C(K)$. Τα b και c αντιστοιχούν σε μη αρνητικές συναρτήσεις f και g στο K, οι οποίες αναγκαστικά θα είναι ίσες, αφού $f^2 = g^2$ (γιατί $b^2 = a = c^2$). Άρα $b = c$. □

Πρόταση 17. *Κάθε αυτοσυζυγές στοιχείο a μιάς C^* άλγεβρας $\mathcal{A}$ (με μονάδα) γράφεται ως διαφορά $a = a_+ - a_-$ δυο θετικών στοιχείων $a_+, a_- \in \mathcal{A}$ (μάλιστα, $a_+, a_- \in C^*(\mathbf{1}, a)$) ώστε $a_+a_- = a_-a_+ = 0$.*

Επομένως, κάθε στοιχείο $x \in \mathcal{A}$ είναι γραμμικός συνδυασμός τεσσάρων θετικών στοιχείων: $x = a + ib$ όπου $a = a^*, b = b^*$, άρα $x = (a_+ - a_-) + i(b_+ - b_-)$.

Απόδειξη. Η συνάρτηση $f_+(t) = \begin{cases} t & t \geqslant 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ ορίζεται και είναι συνεχής στο $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.
Θέτουμε $a_+ = f_+(a)$ και $a_- = a_+ - a = f_-(a)$ όπου $f_-(t) = f_+(t) - t$. Επειδή $f_\pm \geqslant 0$, τα a_+, a_- είναι θετικά στοιχεία, και επειδή $f_+f_- = 0$ έχουμε $a_+a_- = a_-a_+ = 0$. □

Θεώρημα 18. *Σε μια C^* άλγεβρα $\mathcal{A}$, κάθε στοιχείο της μορφής a^*a είναι θετικό.*

Απόδειξη. Βεβαίως το a^*a είναι αυτοσυζυγές. Επομένως μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$a^*a = b - c \quad \text{όπου } b, c \geqslant 0,\ bc = 0\,.$$

Πρέπει να δείξουμε ότι $c = 0$.

Έστω $x = ca^*$. Παρατηρούμε ότι

$$xx^* = ca^*ac = c(b-c)c = -c^3.$$

Επομένως, αφού $\sigma(c) \subseteq \mathbb{R}_+$, έχουμε $\sigma(-x^*x) = \sigma(c^3) \subseteq \mathbb{R}_+$, δηλαδή

$$-xx^* \in \mathcal{A}_+.$$

Όμως, αν γράψουμε $x = u + iv$ όπου τα $u, v \in \mathcal{A}$ είναι αυτοσυζυγή, βρίσκουμε

$$xx^* + x^*x = 2u^2 + 2v^2$$

το οποίο ανήκει στον $\mathcal{A}_+$ (αφού είναι κώνος). Πάλι χρησιμοποιώντας ότι ο $\mathcal{A}_+$ είναι κώνος, συμπεραίνουμε ότι

$$x^*x = -xx^* + (xx^* + x^*x) \in \mathcal{A}_+.$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\sigma(x^*x) \subseteq \mathbb{R}_+ \quad \text{και} \quad \sigma(xx^*) \subseteq \mathbb{R}_-.$$

Όμως, σε κάθε άλγεβρα με μονάδα έχουμε $\sigma(kh) \subseteq \sigma(hk) \cup \{0\}$. [2]

Έπεται λοιπόν ότι $\sigma(xx^*) \subseteq \{0\}$. Κατά συνέπεια $\|xx^*\| = 0$ (αφού το xx^* είναι αυτοσυζυγές) οπότε $-c^3 = xx^* = 0$, άρα ($\rho(c) = 0$ και άρα) $c = 0$ αφού το c είναι αυτοσυζυγές. □

[2] Πράγματι, αν $\lambda \notin \sigma(hk)$ και $\lambda \neq 0$, το στοιχείο $y = \lambda^{-1}\mathbf{1} + \lambda^{-1}k(\lambda\mathbf{1} - hk)^{-1}h$ ικανοποιεί $y(\lambda\mathbf{1} - kh) = (\lambda\mathbf{1} - kh)y = \mathbf{1}$, άρα $\lambda \notin \sigma(kh)$.