Η Αναπαράσταση GNS

Θεώρημα 1 (Gelfand, Naimark, Segal)**.** *Για κάθε κατάσταση ϕ σε μια C^* άλγεβρα $\mathcal{A}$ υπάρχει μια τριάδα $(\pi_\phi, H_\phi, \xi_\phi)$ όπου π_ϕ είναι αναπαράσταση της $\mathcal{A}$ στον χώρο Hilbert H_ϕ και $\xi_\phi \in H_\phi$ ένα κυκλικό [1] μοναδιαίο διάνυσμα ώστε*

$$\phi(a) = \langle \pi_\phi(a)\xi_\phi, \xi_\phi \rangle \quad \text{για κάθε } \ a \in \mathcal{A}.$$

Όπως θα δούμε, η τριάδα GNS $(\pi_\phi, \mathcal{H}_\phi, \xi_\phi)$ καθορίζεται μοναδικά, modulo unitary ισοδυναμία, από την ισότητα αυτή.

Θα χρειασθεί ένα Λήμμα:

Λήμμα 2. *Αν ϕ είναι θετική γραμμική μορφή στην $\mathcal{A}$,*

$$\phi(b^*a^*ab) \leqslant \|a\|^2 \, \phi(b^*b), \quad \text{για κάθε } \ a, b \in \mathcal{A}\,.$$

Απόδειξη. Αρκεί να υποθέσουμε ότι $\|a\| \leqslant 1$ και να δείξουμε ότι $\phi(b^*a^*ab) \leqslant \phi(b^*b)$ (διαιρώντας εν ανάγκη με $\|a\|^2$).

Αφού $\|a^*a\| \leqslant 1$, έχουμε $\mathbf{1} - a^*a \geqslant 0$. Πράγματι, το $\mathbf{1} - a^*a$ είναι αυτοσυζυγές και $\sigma(a^*a) \subseteq [0,1]$ άρα $\sigma(\mathbf{1} - a^*a) = \{1 - \lambda : \lambda \in \sigma(a^*a)\} \subseteq [0,1]$. Έπεται ότι για κάθε $b \in \mathcal{A}$ ισχύει ότι $b^*b - b^*a^*ab \geqslant 0$. Πράγματι, αν $x = (\mathbf{1} - a^*a)^{1/2}$ τότε

$$b^*b - b^*a^*ab = b^*(\mathbf{1} - a^*a)b = b^*x^*xb = (xb)^*(xb) \geqslant 0.$$

Συνεπώς αφού η ϕ είναι θετική έπεται ότι $\phi(b^*b - b^*a^*ab) \geqslant 0$ δηλαδή $\phi(b^*a^*ab) \leqslant \phi(b^*b)$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος

1. Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο $\mathcal{A}$.

2. Ορίζουμε $\quad \langle a, b \rangle_0 := \phi(b^*a), a, b \in \mathcal{A}$.
   Το $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ είναι προφανώς sesquilinear μορφή, και αφού η ϕ είναι θετική, ικανοποιεί
   $\langle b, a \rangle_0 = \phi(a^*b) = \overline{\phi(b^*a)} = \overline{\langle a, b \rangle_0}$ και $\langle a, a \rangle_0 := \phi(a^*a) \geqslant 0$ για κάθε $a, b \in \mathcal{A}$.
   Είναι λοιπόν ημι-εσωτερικό γινόμενο στον γραμμικό χώρο $\mathcal{A}$.

Όταν $\mathcal{A} = C(X)$ όπου X συμπαγής χώρος Hausdorff και $\phi(a) = \int_X a(t)d\mu(t)$ όπου μ κανονικό μέτρο Borel, έχουμε $\langle a, b \rangle_0 = \int_X a(t)\overline{b(t)}d\mu(t)$.

Παρατηρούμε ότι η ανισότητα Cauchy-Schwarz για την ϕ γράφεται $|\langle a, b \rangle_0|^2 \leqslant |\langle a, a \rangle_0 \langle b, b \rangle_0|\,$.

3. Θέτουμε
   $$\mathcal{N}_\phi = \mathcal{N} := \{u \in \mathcal{A} \ : \langle u, u \rangle_0 = 0\}\,.$$
   Ισχύει η ισότητα
   $$\mathcal{N} = \{u \in \mathcal{A} \ : \langle u, a \rangle_0 = 0 \text{ για κάθε } a \in \mathcal{A}\} \qquad (*)$$
   και συνεπώς το $\mathcal{N}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{A}$

[1] δηλ. τέτοιο ώστε το $\pi_\phi(\mathcal{A})\xi_\phi$ να είναι πυκνό στον H_ϕ.

Πράγματι, αν $\langle u, a \rangle_0 = 0$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$, τότε βέβαια $\langle u, u \rangle_0 = 0$. Αντίστροφα, αν $\langle u, u \rangle_0 = 0$, τότε λόγω της ανισότητας Cauchy-Schwarz για κάθε $a \in \mathcal{A}$ έχουμε $|\langle u, a \rangle_0|^2 \leqslant |\langle u, u \rangle_0 \langle a, a \rangle_0| = 0$ άρα $\langle u, a \rangle_0 = 0$.

4. Θέτουμε $H_{0\phi} := \mathcal{A}/\mathcal{N}$. Παρατηρούμε ότι το ημι-εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ επάγει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $H_{0\phi}$:

$$\langle [a], [b] \rangle_\phi := \langle a, b \rangle_0, \quad \text{για κάθε} \quad [a] = a + \mathcal{N}, [b] = b + \mathcal{N} \text{ στον } \mathcal{A}/\mathcal{N} .$$

   Ονομάζουμε λοιπόν H_ϕ *την πλήρωση του* $H_{0\phi}$ *ως προς την* $\|[u]\|_\phi := \sqrt{\langle [u], [u] \rangle_\phi}$. Καταχρηστικά χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο για το εσωτερικό γινόμενο στον H_ϕ.

Όταν $\mathcal{A} = C(X)$ *όπως πριν, τότε ο* H_ϕ *δεν είναι άλλος από τον* $= L^2(\mu)$.

Πράγματι, η απεικόνιση αυτή είναι καλά ορισμένη: αν $[a] = [a_1]$ και $[b] = [b_1]$, δηλαδή $a_1 - a = u \in \mathcal{N}$ και $b_1 - b = v \in \mathcal{N}$ τότε

$$\langle [a_1], [b_1] \rangle_\phi = \langle a + u, b + v \rangle_0 = \langle a, b \rangle_0 + \langle u, b \rangle_0 + \langle a + u, v \rangle_0 = \langle a, b \rangle_0$$

από το βήμα (3), εφόσον $u, v \in \mathcal{N}$. Το $\langle \cdot, \cdot \rangle_\phi$ είναι προφανώς ημι-εσωτερικό γινόμενο στον $\mathcal{A}/\mathcal{N}$. Επιπλέον, αν $\langle [a], [a] \rangle_\phi = 0$ τότε $\langle a, a \rangle_0 = 0$, δηλαδή $a \in \mathcal{N}$ άρα $[a] = [0]$. Συνεπώς το $\langle \cdot, \cdot \rangle_\phi$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ και άρα η επαγόμενη $\|[u]\|_\phi := \sqrt{\langle [u], [u] \rangle_\phi}$ είναι νόρμα στον $\mathcal{A}/\mathcal{N}$.

Θα ορίσουμε τώρα δράση της $\mathcal{A}$ στον H_ϕ.

5. Η $\mathcal{A}$ δρα στον γραμμικό χώρο $\mathcal{A}$ με την λεγόμενη κανονική αριστερή αναπαράσταση π_0 που ορίζεται ως εξής: για κάθε $a \in \mathcal{A}$, η απεικόνιση $\pi_0(a) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ είναι η $\pi_0(a)(b) = ab, b \in \mathcal{A}$.

6. Αν $a \in \mathcal{A}$, η απεικόνιση
$$\pi_1(a) : H_{0\phi} \to H_{0\phi} : [b] \to [ab]$$
   είναι καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση $H_{0\phi} = \mathcal{A}/\mathcal{N}$, διότι $\pi_0(a)(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$ (δηλαδή το $\mathcal{N}$ είναι αριστερό ιδεώδες της $\mathcal{A}$).

Πράγματι, για κάθε $u \in \mathcal{N}$, έχουμε $\pi_0(a)(u) = au \in \mathcal{N}$ διότι για κάθε $b \in \mathcal{A}$ έχουμε $\langle au, b \rangle_0 = \phi(b^* au) = \phi((a^* b)^* u) = \langle u, a^* b \rangle_0$ οπότε $au \in \mathcal{N}$ από τη σχέση $(*)$ στο βήμα (3).

Επομένως αν $[b] = [b_1]$, δηλαδή $b_1 - b = u \in \mathcal{N}$, έχουμε $ab_1 - ab = au \in \mathcal{N}$, άρα $[ab] = [ab_1]$.

7. Για κάθε $a \in \mathcal{A}$ και κάθε $[b] \in H_{0\phi}$ έχουμε
$$\|\pi_1(a)([b])\|_\phi \leqslant \|a\| \, \|[b]\|_\phi \ .$$
   από το Λήμμα 2 (διότι $\|\pi_1(a)([b])\|_\phi^2 = \|[ab]\|_\phi^2 = \phi(b^* a^* ab)$).

(Η ανισότητα αυτή γίνεται $\|ab\|_2 \leqslant \|a\|_\infty \|b\|_2$ *όταν* $a, b \in C(X)$.*)*

   Έπεται ότι ο $\pi_1(a)$ επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $\pi_\phi(a)$ στον H_ϕ.

   Είναι τώρα εύκολο να δείξει κανείς ότι η απεικόνιση
$$\pi_\phi : a \to \pi_\phi(a) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H_\phi)$$
   είναι *-αναπαράσταση.

[Όταν $\mathcal{A} = C(X)$, τότε $\pi_\phi(a) = M_a$, δηλαδή $(\pi_\phi(a)b)(t) = b(t)u(t)$ μ-σχεδόν για κάθε $t \in X$.]

Απόδειξη Αν $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, για να δείξουμε ότι $\pi_\phi(a_1 + \lambda a_2) = \pi_\phi(a_1) + \lambda\pi_\phi(a_2)$ και ότι $\pi_\phi(a_1a_2) = \pi_\phi(a_1)\pi_\phi(a_2)$, επειδή είναι ισότητες *φραγμένων* τελεστών, αρκεί να τις ελέγξουμε σε κάθε σημείο $[b]$ του πυκνού υποχώρου $H_{0\phi}$. Από τον ορισμό των πράξεων στον χώρο πηλίκο $H_{0\phi} = \mathcal{A}/\mathcal{N}$, έχουμε $[a_1b + \lambda a_2b] = [a_1b] + \lambda[a_2b]$ και συνεπώς

$$\begin{aligned}\pi_\phi(a_1 + \lambda a_2)[b] &= \pi_1(a_1 + \lambda a_2)[b] = [(a_1 + \lambda a_2)b] = [a_1b] + \lambda[a_2b] \\ &= \pi_\phi(a_1)[b] + \lambda\pi_\phi(a_2)[b] = (\pi_\phi(a_1) + \lambda\pi_\phi(a_2))[b]\,.\end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}\pi_\phi(a_1a_2)[b] &= \pi_1(a_1a_2)[b] = [(a_1a_2)b] = [a_1(a_2b)] \\ &= \pi_\phi(a_1)[a_2b] = \pi_\phi(a_1)(\pi_\phi(a_2)[b]) = (\pi_\phi(a_1)\pi_\phi(a_2))[b]\,.\end{aligned}$$

Τέλος, αν $a \in \mathcal{A}$ και $[b], [c] \in H_{0\phi}$,

$$\begin{aligned}\langle\pi_\phi(a)^*[b], [c]\rangle_\phi &= \langle[b], \pi_\phi(a)[c]\rangle_\phi = \langle[b], [ac]\rangle_\phi \\ &= \phi((ac)^*b) = \phi(c^*a^*b) = \langle[a^*b], [c]\rangle_\phi = \langle\pi_\phi(a^*)[b], [c]\rangle_\phi\end{aligned}$$

και συνεπώς $\pi_\phi(a)^* = \pi_\phi(a^*)$.

8. Θέτουμε $\xi_\phi = [\mathbf{1}_\mathcal{A}]$. Το ξ_ϕ είναι κυκλικό διάνυσμα για την π_ϕ γιατί

$$\pi_\phi(\mathcal{A})\xi_\phi = \{\pi_\phi(a)[\mathbf{1}] : a \in \mathcal{A}\} = \{[a] : a \in \mathcal{A}\} = H_{0\phi}$$

που είναι πυκνός υπόχωρος του H_ϕ. Τέλος, για κάθε $a \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}\langle\pi_\phi(a)\xi_\phi, \xi_\phi\rangle_\phi &= \langle\pi_\phi(a)[\mathbf{1}], [\mathbf{1}]\rangle_\phi \\ &= \langle a, \mathbf{1}\rangle_\phi = \phi(\mathbf{1}^*a) = \phi(a)\,. \qquad \square\end{aligned}$$

Πρόταση 3 (“Μοναδικότητα”)**.** *Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα και ϕ κατάσταση στην $\mathcal{A}$. Αν (π, H, ξ) είναι αναπαράσταση με κυκλικό μοναδιαίο διάνυσμα ξ ώστε*

$$\langle\pi(a)\xi, \xi\rangle = \phi(a) \quad \text{για κάθε } \ a \in \mathcal{A},$$

τότε η (π, H, ξ) είναι unitarily ισοδύναμη με την $(\pi_\phi, \mathcal{H}_\phi, \xi_\phi)$ μέσω μιας επί ισομετρίας $U : H_\phi \to H$ ώστε

$$\pi(a) = U\pi_\phi(a)U^* \quad \text{για κάθε } \ a \in \mathcal{A}.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$U_0 : \mathcal{A}\xi_\phi \to \mathcal{A}\xi : \pi_\phi(a)\xi_\phi \to \pi(a)\xi,\ a \in \mathcal{A}\,.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\|\pi(a)\xi\|_H^2 &= \langle\pi(a)\xi, \pi(a)\xi\rangle = \langle\pi(a^*a)\xi, \xi\rangle = \phi(a^*a) = \langle\pi_\phi(a^*a)\xi_\phi, \xi_\phi\rangle = \\ &= \langle\pi_\phi(a)\xi, \pi_\phi(a)\xi\rangle = \|\pi_\phi(a)\xi_\phi\|_{H_\phi}^2\ .\end{aligned}$$

Επομένως η U_0 είναι καλά ορισμένη απεικόνιση (αν $\pi(a)\xi = \pi(b)\xi$ τότε $\pi(a-b)\xi = 0$ άρα $\pi_\phi(a-b)\xi_\phi = 0$ άρα $\pi_\phi(a)\xi_\phi = \pi_\phi(b)\xi_\phi$) (προφανώς γραμμική) και ισομετρική. Επεκτείνεται λοιπόν σε μια γραμμική ισομετρία U από την κλειστή θήκη H_ϕ του $(\mathcal{A}\xi_\phi, \|\cdot\|_{H_\phi})$ στην κλειστή θήκη H του $(\mathcal{A}\xi, \|\cdot\|_H)$. Το σύνολο τιμών της περιέχει τον πυκνό υπόχωρο $\mathcal{A}\xi$ του H και επομένως η U είναι επί του H. Επομένως ο U είναι αντιστρέψιμος και $U^{-1} = U^*$.

Τέλος, για να δείξουμε ότι $\pi(a) = U\pi_\phi(a)U^*$, ισοδύναμα $\pi(a)U = U\pi_\phi(a)$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$, αρκεί να ελέγξουμε την ισότητα στον πυκνό υπόχωρο $\mathcal{A}\xi_\phi$. Έστω λοιπόν $x = \pi_\phi(b)\xi_\phi \in \mathcal{A}\xi_\phi$. Τότε

$$\begin{aligned} \pi(a)U(\pi_\phi(b)\xi_\phi) &= \pi(a)(\pi(b)\xi) = \pi(ab)\xi = U(\pi_\phi(ab)\xi_\phi) = U\pi_\phi(a)(\pi_\phi(b)\xi_\phi) \\ \text{δηλαδή} \quad \pi(a)U(x) &= U\pi(a)(x)\,. \end{aligned}$$

Αφού οι *φραγμένοι τελεστές* $\pi(a)U$ και $U\pi_\phi(a)$ ταυτίζονται στο πυκνό υποσύνολο $\mathcal{A}\xi_\phi$, είναι ίσοι:

$$\begin{tikzcd} H_\phi \arrow[r, tail, two heads, "U"] \arrow[d, "\pi_\phi(a)"'] & H \arrow[d, "\pi(a)"] \\ H_\phi \arrow[r, tail, two heads, "U"'] & H \end{tikzcd}$$

Πόρισμα 4. *Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ μια C* υπάλγεβρα με $I \in \mathcal{A}$ και $\xi \in H$ μοναδιαίο διάνυσμα. Θεωρούμε την κατάσταση $\phi(A) := \langle A\xi, \xi\rangle$, $A \in \mathcal{A}$. Τότε η αναπαράσταση GNS $(\pi_\phi, H_\phi, \xi_\phi)$ είναι unitarily ισοδύναμη με την $A \to A|_K$, $A \in \mathcal{A}$ όπου $K := \overline{\text{span}\{A\xi : A \in \mathcal{A}\}}$.*

(... και μπορώ να επιλέξω τον τελεστή U που υλοποιεί την ισοδυναμία ώστε $U\xi_\phi = \xi$.)

Απόδειξη. Ο $K_0 := \text{span}\{A\xi : A \in \mathcal{A}\}$ είναι προφανώς γραμμικός υπόχωρος του H και είναι $\mathcal{A}$-αναλλοίωτος, αφου $B(A\xi) = (BA)\xi \in K_0$ για κάθε $B, A \in \mathcal{A}$. Συνεπώς και η κλειστή του θήκη K είναι $\mathcal{A}$-αναλλοίωτος υπόχωρος (αν $x \in K$ και $B \in \mathcal{A}$, τότε $Bx \in K$: πράγματι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ ώστε $\|x - A\xi\| < \epsilon$, οπότε $\|Bx - BA\xi\| < \epsilon\|B\|$, άρα $Bx \in K$ αφού $BA\xi \in K_0 \subseteq K$).

Κατά συνέπεια για κάθε $A \in \mathcal{A}$ ο τελεστής $A|_K$ ανήκει στον $\mathcal{B}(K)$. Θέτοντας $\pi(A) := A|_K$, έχουμε μια *-αναπαράσταση $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(K)$. Πράγματι, είναι φανερό ότι

$$\begin{gathered} (A_1 + \lambda A_2)|_K = A_1|_K + \lambda A_2|_K \\ \text{δηλαδή} \;\; \pi(A_1 + \lambda A_2) = \pi(A_1) + \lambda\pi(A_2)\,. \end{gathered}$$

Επίσης, αφού $A_2(K) \subseteq K$, αν $x \in K$ έχουμε $A_1(A_2x) = A_1|_K(A_2x)$, δηλαδή $(A_1A_2)|_K = A_1|_KA_2|_K$ και άρα

$$\pi(A_1A_2) = (A_1A_2)|_K = A_1|_KA_2|_K = \pi(A_1)\pi(A_2)\,.$$

Για να δείξουμε ότι $(\pi(A))^* = \pi(A^*)$ όταν $A \in \mathcal{A}$ πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $x, y \in K$ ισχύει η ισότητα

$$\langle(\pi(A))^*x, y\rangle = \langle\pi(A^*)x, y\rangle \quad \text{δηλαδή} \quad \langle x, \pi(A)y\rangle = \langle\pi(A^*)x, y\rangle\,.$$

Όμως $\pi(A)y = Ay$, άρα $\langle x, \pi(A)y\rangle = \langle x, Ay\rangle = \langle A^*x, y\rangle$. Επίσης, επειδή $A^* \in \mathcal{A}$, έχουμε $\pi(A^*)x = A^*x$ οπότε $\langle\pi(A^*)x, y\rangle = \langle A^*x, y\rangle$ και η ζητούμενη ισότητα αποδείχθηκε.

Η τριάδα (π, K, ξ) ικανοποιεί την σχέση $\phi(A) = \langle A\xi, \xi\rangle$, $A \in \mathcal{A}$, οπότε το συμπέρασμα έπεται από την προηγούμενη Πρόταση.