

Το Θεώρημα Krein - Milman

Ορισμός 1. Έστω E γραμμικός χώρος και $K \subseteq E$ κυρτό σύνολο. Ένα $x \in K$ λέγεται **ακραίο σημείο** του K αν

$$y, z \in K, \lambda \in (0, 1), \lambda y + (1 - \lambda)z = x \implies y = z (= x).$$

Γράφουμε $x \in \text{ex}(K)$.

Ένα μη κενό κυρτό υποσύνολο $F \subseteq K$ λέγεται **ακραίο στο K ή έδρα (face) του K** αν

$$y, z \in K, \lambda \in (0, 1), \lambda y + (1 - \lambda)z \in F \implies y, z \in F.$$

Παρατήρηση 1. Το $x \in K$ είναι ακραίο σημείο του $K \iff$ το σύνολο $\{x\}$ είναι ακραίο στο K .

Παρατήρηση 2. Αν $\{F_i : i \in I\}$ ακραία στο K και $\cap_i F_i \neq \emptyset$, τότε $\cap_i F_i$ ακραίο στο K .

Παρατήρηση 3. Αν $F \subseteq G \subseteq K$, όπου G ακραίο στο K και F ακραίο στο G , τότε F ακραίο στο K .
Άρα, αν $G \subseteq K$ ακραίο στο K , τότε $\text{ex}(G) \subseteq \text{ex}(K)$.

Απόδειξη. Οι αποδείξεις των δύο πρώτων παρατηρήσεων είναι άμεσες από τον ορισμό.

Για την τρίτη θεωρούμε δυο σημεία $y, z \in K$ κι ένα $\lambda \in (0, 1)$ ώστε $x := \lambda y + (1 - \lambda)z \in F$ και πρέπει να δείξουμε ότι $y, z \in F$.

Όμως, το $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$ ανήκει στο G που είναι ακραίο στο K , επομένως $y, z \in G$. Επομένως το x είναι γνήσιος κυρτός συνδυασμός δύο σημείων του G , και ανήκει στο F που είναι ακραίο στο G . Συνεπώς, $y, z \in F$. □

Λήμμα 4. Έστω $K \subseteq X^*$ μη κενό, ασθενώς-* συμπαγές, $\xi \in X$ και

$$\mu := \sup\{\text{Re } x(\xi) : x \in K\}.$$

Τότε το σύνολο

$$F := \{y \in K : \text{Re } y(\xi) = \mu\}$$

είναι συμπαγής έδρα του K .

Απόδειξη. Η συνάρτηση

$$f_\xi : K \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \text{Re } y(\xi)$$

είναι συνεχής, από τον ορισμό της ασθενούς-* τοπολογίας, και το K είναι συμπαγές. Επομένως η f_ξ παίρνει μέγιστη τιμή ($= \mu$) στο K , δηλαδή το F δεν είναι κενό. Είναι κλειστό, αφού η f_ξ είναι συνεχής, άρα είναι συμπαγές.

Για να δείξουμε ότι είναι ακραίο στο K , θεωρούμε $y, z \in K$ και υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lambda \in (0, 1)$ ώστε $x := \lambda y + (1 - \lambda)z \in F$. Έχουμε $f_\xi(x) = \mu$ και $f_\xi(y) \leq \mu, f_\xi(z) \leq \mu$, άρα

$$\mu = f_\xi(x) = \lambda f_\xi(y) + (1 - \lambda)f_\xi(z) \leq \lambda\mu + (1 - \lambda)\mu = \mu$$

οπότε αναγκαστικά $f_\xi(y) = \mu = f_\xi(z)$, δηλαδή $y, z \in F$. □

Θεώρημα 5 (Krein - Milman). Αν X χώρος Banach και $K \subseteq X^*$ μη κενό, ασθενώς-* συμπαγές και κυρτό, τότε

(α) Το K έχει ακραία σημεία.

(β) Η ασθενώς-* κλειστή κυρτή θήκη του $\text{ex}(K)$ είναι όλο το K .

Σχόλιο Το Θεώρημα ισχύει για οποιονδήποτε τοπικά κυρτό χώρο στη θέση του X^* [1, Θεώρημα 14.41].

Απόδειξη του (α). Ονομάζουμε \mathcal{A} την οικογένεια όλων των μη κενών συμπαγών ακραίων υποσυνόλων του K , διατεταγμένη με τη σχέση του περιέχεσθαι \supseteq .

Ισχυρισμός 1. Η (\mathcal{A}, \supseteq) έχει ελαχιστικό στοιχείο, δηλαδή υπάρχει $F_0 \in \mathcal{A}$ με τη ιδιότητα: αν $F \in \mathcal{A}$ και $F \subseteq F_0$ τότε $F = F_0$.

Απόδειξη. Θα εφαρμόσουμε το Λήμμα του Zorn.

Αν $\mathcal{C} = \{F_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{A}$ είναι μια μη κενή ολικά διατεταγμένη υπο-οικογένεια της \mathcal{A} , θέτω $F = \bigcap_{i \in I} F_i$.

Ισχυρίζομαι ότι $F \in \mathcal{A}$. Πράγματι: Αφού η \mathcal{C} είναι ολικά διατεταγμένη, κάθε πεπερασμένη υπο-οικογένεια $\{F_{i_1}, \dots, F_{i_n}\}$ της \mathcal{C} έχει ελάχιστο στοιχείο F_{i_k} (που είναι μη κενό, απ' τον ορισμό της \mathcal{A}), άρα $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n} = F_{i_k} \neq \emptyset$. Δηλαδή η οικογένεια $\mathcal{C} = \{F_i : i \in I\}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Από τη συμπάγεια (!) του K συμπεραίνουμε ότι η τομή $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ δεν είναι το κενό σύνολο. Επίσης, είναι κλειστό, άρα συμπαγές υποσύνολο του K , και είναι ακραίο ως μη κενή τομή ακραίων (Παρατήρηση 2). Δείξαμε λοιπόν ότι $F \in \mathcal{A}$.

Δείξαμε δηλαδή ότι κάθε μη κενή ολικά διατεταγμένη υπο-οικογένεια της \mathcal{A} έχει κάτω φράγμα στην (\mathcal{A}, \supseteq) . Από το Λήμμα του Zorn έπεται ότι η (\mathcal{A}, \supseteq) έχει ελαχιστικό στοιχείο, έστω F_0 .

Ισχυρισμός 2. Το F_0 είναι μονοσύνολο.

Απόδειξη. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι υπάρχουν $y, z \in F_0$ με $y \neq z$. Υπάρχει λοιπόν $\xi \in X$ ώστε $y(\xi) \neq z(\xi)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\operatorname{Re} y(\xi) \neq \operatorname{Re} z(\xi)$ (αλλάζοντας εν ανάγκη το ξ σε $i\xi$) και επίσης ότι

$$\operatorname{Re} y(\xi) < \operatorname{Re} z(\xi)$$

(αλλάζοντας εν ανάγκη το ξ σε $-\xi$). Ονομάζουμε

$$\mu := \sup\{\operatorname{Re} x(\xi) : x \in F_0\}$$

και θέτουμε

$$F_1 := \{u \in F_0 : \operatorname{Re} u(\xi) = \mu\}.$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα στο συμπαγές μη κενό σύνολο F_0 , συμπεραίνουμε ότι το F_1 είναι ακραίο στο F_0 . Αλλά το F_0 είναι ακραίο στο K , επομένως το F_1 είναι ακραίο στο K (Παρατήρηση 3), δηλαδή $F_1 \in \mathcal{A}$. Όμως, $\operatorname{Re} y(\xi) < \mu$ δηλαδή $y \notin F_1$. Επομένως το F_1 είναι γνήσιο υποσύνολο του F_0 , πράγμα άτοπο, αφού το F_0 είναι ελαχιστικό στην \mathcal{A} .

Δείξαμε λοιπόν ότι το ακραίο σύνολο F_0 είναι μονοσύνολο, $F_0 = \{x_0\}$, οπότε το x_0 είναι ακραίο σημείο του K . \square

Απόδειξη του (β). Ονομάζουμε L την ασθενώς-* κλειστή κυρτή θήκη του συνόλου $\operatorname{ex}(K)$ των ακραίων σημείων του K . Δείξαμε στο (α) ότι $L \neq \emptyset$.

Παρατηρούμε ότι το L είναι ασθενώς-* κλειστό και κυρτό. Επίσης, αφού $\operatorname{ex}(K) \subseteq K$ και το K είναι ασθενώς-* κλειστό και κυρτό, περιέχει και το L , οπότε το L είναι ασθενώς-* συμπαγές.

Αν το L ήταν γνήσιο υποσύνολο του K και $x \in K \setminus L$, από το *διαχωριστικό Θεώρημα Hahn-Banach* [1, Θεώρημα 14.35] θα υπήρχε μια ασθενώς-* συνεχής γραμμική μορφή $f : X^* \rightarrow \mathbb{C}$ ώστε

$$\sup\{\operatorname{Re} f(z) : z \in L\} < \operatorname{Re} f(x). \quad (*)$$

Όμως από το ορισμό της ασθενούς-* τοπολογίας μπορεί κανείς να δείξει (δες το Παράρτημα στο τέλος) ότι η f είναι της μορφής $f : X^* \rightarrow \mathbb{C} : y \rightarrow y(\xi)$ για κάποιο $\xi \in X$, οπότε η (*) γράφεται

$$\sup\{\operatorname{Re} z(\xi) : z \in L\} < \operatorname{Re} x(\xi). \quad (**)$$

Θέτοντας

$$\mu := \sup\{\operatorname{Re} y(\xi) : y \in K\}$$

και

$$F := \{u \in K : \operatorname{Re} u(\xi) = \mu\}$$

έχουμε από το Λήμμα ότι το F είναι ακραίο στο K . Συνεπώς από την Παρατήρηση 3 κάθε ακραίο σημείο του F είναι ακραίο σημείο του K δηλαδή $\operatorname{ex}(F) \subseteq \operatorname{ex}(K) \subseteq L$. Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί κάθε $u \in \operatorname{ex}(F)$ ικανοποιεί $\operatorname{Re} u(\xi) = \mu$, ενώ κάθε $z \in L$ ικανοποιεί $\operatorname{Re} z(\xi) < \operatorname{Re} x(\xi) \leq \mu$ (από την (**)). \square

Παράρτημα. Αν $f : X^* \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ασθενώς *-συνεχής γραμμική μορφή, τότε είναι της μορφής $f_\xi : y \rightarrow y(\xi)$ για κάποιο $\xi \in X$ (δηλαδή ο δυικός του τοπ. γραμμικού χώρου (X^*, w^*) είναι ισόμορφος, ως γραμμικός χώρος, με τον X).

Απόδειξη. Από την συνέχεια της f , υπάρχει μια περιοχή V του $0 \in X^*$ για την ασθενή-* τοπολογία ώστε

$$x \in V \Rightarrow |f(x)| < 1.$$

Από τον ορισμό της ασθενούς-* τοπολογίας (της τοπολογίας γινόμενο του \mathbb{C}^X περιορισμένης στον X^*) υπάρχουν ξ_1, \dots, ξ_n στον X και θετικοί αριθμοί $\delta_1, \dots, \delta_n$ ώστε

$$|x(\xi_k)| < \delta_k \text{ για κάθε } k = 1, \dots, n \Rightarrow x \in V.$$

Ισχυρίζομαι ότι

$$x(\xi_1) = x(\xi_2) = \dots = x(\xi_n) = 0 \Rightarrow f(x) = 0. \quad (\dagger)$$

Πράγματι αν $x(\xi_1) = x(\xi_2) = \dots = x(\xi_n) = 0$ τότε για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε $|(mx)(\xi_k)| = 0 < \delta_k$ για κάθε $k = 1, \dots, n$, άρα $mx \in V$ και συνεπώς $|f(mx)| < 1$ δηλαδή $|f(x)| < 1/m$, κι αφού το m είναι αυθαίρετο έπεται ότι $f(x) = 0$.

Θεωρώ τώρα την απεικόνιση

$$F : X^* \rightarrow \mathbb{C}^n : x \rightarrow (x(\xi_1), x(\xi_2), \dots, x(\xi_n)).$$

Είναι προφανώς γραμμική, και από την (\dagger) έπεται ότι αν $x, x' \in X^*$ και $F(x) = F(x')$, τότε $f(x) = f(x')$. Επομένως η απεικόνιση

$$\varphi : F(X^*) \rightarrow \mathbb{C} : F(x) \rightarrow f(x)$$

είναι καλά ορισμένη στον υπόχωρο $F(X^*)$ του \mathbb{C}^n , είναι γραμμική και ικανοποιεί $\varphi \circ F = f$.

Η φ επεκτείνεται σε μια γραμμική απεικόνιση $\tilde{\varphi} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$. Όπως γνωρίζουμε από τη Γραμμική Άλγεβρα, υπάρχουν $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ ώστε η $\tilde{\varphi}$ να είναι της μορφής $\tilde{\varphi}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_k a_k \lambda_k$ για κάθε $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$. Τελειώσαμε: για κάθε $x \in X^*$, έχουμε

$$f(x) = \varphi(F(x)) = \tilde{\varphi}(x(\xi_1), x(\xi_2), \dots, x(\xi_n)) = a_1 x(\xi_1) + \dots + a_n x(\xi_n) = x(a_1 \xi_1 + \dots + a_n \xi_n) = x(\xi),$$

όπου $\xi = a_1 \xi_1 + \dots + a_n \xi_n$. \square

Αναφορές

- [1] Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Ζαχαριάδης, Ν. Καλαμίδας, Β. Φαρμάκη, *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 1997.