Κλειστά πρώτα ιδεώδη σε μεταθετικές C*-άλγεβρες

Ένα ιδεώδες J ενός δακτυλίου $\mathcal{A}$ με μονάδα λέγεται *πρώτο* αν $J \neq \mathcal{A}$ και οποτεδήποτε ένα γινόμενο fg δυο στοιχείων της $\mathcal{A}$ ανήκει στο J, ένας από τους δύο παράγοντες ανήκει στο J.

Για παράδειγμα, αν $\mathcal{A} = C(K)$ όπου K είναι συμπαγής χώρος Hausdorf και $z \in K$ σταθερό, το ιδεώδες $J(\{z\})$ όλων των $f \in \mathcal{A}$ που μηδενίζονται στο z είναι βεβαίως πρώτο ιδεώδες. (Αυτά είναι τα μεγιστικά ιδεώδη της $C(K)$ - είναι αυτομάτως κλειστά, γιατί η κλειστή θήκη ενός ιδεώδους είναι ιδεώδες.)

Αντίστροφly, αν J είναι *κλειστό* πρώτο ιδεώδες της $C(K)$, τότε είναι μεγιστικό, δηλ. της μορφής $J(\{z\})$ για κάποιο $z \in K$.

Απόδειξη. Έστω $Z = \{t \in K : f(t) = 0 \text{ για κάθε } f \in J\}$. Το Z είναι κλειστό υποσύνολο του K, και ισχύει ότι [1] ότι το J είναι ίσο με το $J(Z) := \{g \in C(K) : g|_Z = 0\}$. Επομένως, αν το J δεν είναι μεγιστικό, τότε το Z δεν θα είναι μονοσύνολο (δες σχόλιο (i)). Αν z_1, z_2 είναι διαφορετικά σημεία του Z, και U_1, U_2 είναι ανοικτές ξένες περιοχές των z_1, z_2 αντίστοιχα, υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις f_1, f_2 στο K ώστε $f_i(z_i) = 1$ και $f_i(t) = 0$ για $t \notin U_i$, $i = 1, 2$ (Urysohn!). Από την κατασκευή έχουμε $f_1 f_2 = 0$, άρα $f_1 f_2 \in J$. Αλλά ούτε το f_1 ούτε το f_2 μηδενίζεται σ' όλο το Z, οπότε κανένα από τα δύο δεν ανήκει στο J. Δείξαμε ότι το J δεν είναι πρώτο. $\square$

Σχόλια. (i) Αν $Z \subseteq K$ είναι κλειστό, θέτω $J(Z) := \{f \in C(K) : f|_Z = 0\}$. Εύκολα φαίνεται ότι το $J(Z)$ είναι κλειστό ιδεώδες της $C(K)$, και (όπως σημειώσαμε νωρίτερα) όλα τα κλειστά ιδεώδη της $C(K)$ είναι αυτής της μορφής.

Αν $Z_1 \subseteq Z_2$ είναι κλειστά, τότε βεβαίως $J(Z_2) \subseteq J(Z_1)$. Χρησιμοποιώντας αυτήν την παρατήρηση μπορεί κανείς να δείξει ότι όλα τα *μεγιστικά* ιδεώδη είναι της μορφής $J(Z)$ όπου $Z = \{z\}$ μονοσύνολο.

Δείξαμε λοιπόν ότι τα κλειστά πρώτα ιδεώδη της C(K) είναι μεγιστικά.

(ii) Δεν ισχύει πάντα ότι τα πρώτα ιδεώδη της C(K) είναι μεγιστικά. Για παράδειγμα αν $K = [0, 1]$ και P_1 είναι το σύνολο των μη μηδενικών πολυωνύμων, υπάρχει ιδεώδες $J \subset C([0, 1])$ που είναι μεγιστικό *ως προς την ιδιότητα* $J \cap P_1 = \varnothing$ (αυτό αποδεικνύεται εφαρμόζοντας το Λήμμα Zorn). Δεν είναι δύσκολο να δείξεις ότι το J είναι πρώτο ιδεώδες (παρατήρησε ότι αν $p, q \in P_1$ τότε $pq \in P_1$). Αν ήταν μεγιστικό ιδεώδες, θα ήταν της μορφής $J(\{z\})$ για κάποιο $z \in [0, 1]$. Τότε όμως θα περιείχε το μη μηδενικό πολυώνυμο $p(t) = t - z$, που ανήκει στο P_1: άτοπο.

(iii) Στην πραγματικότητα δείξαμε ότι σε κάθε μεταθετική C* άλγεβρα με μονάδα, τα κλειστά πρώτα ιδεώδη είναι μεγιστικά (και βεβαίως τα μεγιστικά ιδεώδη είναι κλειστά και πρώτα). Αυτό έπεται από τη Θεωρία Gelfand: κάθε μεταθετική C* άλγεβρα με μονάδα είναι ισομετρικά ισόμορφη με κάποια $C(K)$.

---

[1] δες το αρχείο `https://eclass.uoa.gr/modules/document/file.php/MATH287/idealgr.pdf`