Το φάσμα στοιχείου άλγεβρας Banach

Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα $\mathbf{1}$. Ένα $x \in \mathcal{A}$ λέγεται *αντιστρέψιμο (invertible)* αν υπάρχει $x^{-1} \in \mathcal{A}$ ώστε $xx^{-1} = x^{-1}x = \mathbf{1}$. Γράφουμε $x \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$.

Ορισμός 1. *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα και $x \in \mathcal{A}$. Το* **φάσμα (spectrum)** $\sigma(x)$ *του x είναι το σύνολο*

$$\sigma(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda\mathbf{1} - x \notin \mathrm{Inv}(\mathcal{A})\}.$$

Αν $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma(x)$, το $r_\lambda(x) := (\lambda\mathbf{1} - x)^{-1} \in \mathcal{A}$ λέγεται **επιλύων ή επιλύουσα συνάρτηση (resolvent)** *του x.*

Θεώρημα 1. *Σε κάθε άλγεβρα Banach $\mathcal{A}$ (με μονάδα), το φάσμα $\sigma(x)$ κάθε $x \in \mathcal{A}$ είναι* μη κενό και συμπαγές *υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και η επιλύουσα συνάρτηση*

$$\mathbb{C}\backslash\sigma(x) \to \mathcal{A} : \lambda \to r_\lambda(x) := (\lambda\mathbf{1} - x)^{-1}$$

είναι ολόμορφη *(:έχει τοπικά δυναμοσειρά γύρω από κάθε $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\sigma(x)$).*

Απόδειξη. (i) Έστω πρώτα $|\lambda| > \|x\|$. Τότε $\left\|\frac{x}{\lambda}\right\| < 1$ άρα $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left\|(\frac{x}{\lambda})^n\right\| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left\|\frac{x}{\lambda}\right\|^n < \infty$ (γεωμετρική σειρά). Συνεπώς η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{x}{\lambda})^n$ συγκλίνει απόλυτα, άρα συγκλίνει στην $\mathcal{A}$ (πληρότητα της $\mathcal{A}$). Έχουμε

$$r_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}\left(\mathbf{1} - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}$$

διότι

$$\begin{aligned}(\lambda\mathbf{1} - x)\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}} &= \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}(\lambda\mathbf{1} - x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{\lambda^n} - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^{n+1}}{\lambda^{n+1}} \\ &= \mathbf{1} - \frac{x^{N+1}}{\lambda^{N+1}} \to 0 \ \text{ καθώς } N \to \infty\,.\end{aligned}$$

Συνεπώς κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| > \|x\|$ ανήκει στο $\mathbb{C}\backslash\sigma(x)$.

• *Δηλαδή το $\sigma(x)$ είναι φραγμένο σύνολο στο $\mathbb{C}$ και μάλιστα $\sigma(x) \subseteq B(0, \|x\|)$.*

(ii) Έστω τώρα $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\sigma(x)$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(\lambda_0, \delta) \subseteq \mathbb{C}\backslash\sigma(x)$, οπότε το $\mathbb{C}\backslash\sigma(x)$ είναι ανοικτό, και ότι η $\lambda \to r_\lambda(x)$ έχει δυναμοσειρά που συγκλίνει για κάθε λ_0 στην $B(\lambda_0, \delta)$.

Πράγματι: αφού $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\sigma(x)$, το $r_{\lambda_0}(x) = (\lambda_0\mathbf{1} - x)^{-1} \in \mathcal{A}$ ορίζεται. Το συμβολίζουμε με $r \in \mathcal{A}$ για συντομία, και θέτουμε $\delta = \frac{1}{\|r\|}$.

Έστω $\lambda \in B(\lambda_0, \delta)$, δηλαδή $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|r\|}$. Θέτοντας $\mu = \lambda_0 - \lambda$, παρατηρούμε ότι $\|\mu r\| < 1$ άρα η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\mu r)^n$ συγκλίνει στην $\mathcal{A}$ (όπως πριν) και έχουμε

$$r\sum_{n=0}^{\infty} (\mu r)^n = r(\mathbf{1} - \mu r)^{-1} = (r^{-1} - \mu\mathbf{1})^{-1} = ((\lambda_0\mathbf{1} - x) - (\lambda_0 - \lambda)\mathbf{1})^{-1} = (\lambda\mathbf{1} - x)^{-1}$$

άρα το $r_\lambda(x)$ ορίζεται, δηλαδή $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma(x)$ και (αντικαθιστώντας $\mu = \lambda_0 - \lambda$ και $r = (\lambda_0\mathbf{1} - x)^{-1}$)

$$r_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n (\lambda_0 \mathbf{1} - x)^{-(n+1)} \tag{*}$$

που είναι η δυναμοσειρά της $\lambda \to r_\lambda(x)$ με κέντρο λ_0. Δείξαμε λοιπόν ότι

• *το $\sigma(x)$ είναι κλειστό στο* $\mathbb{C}$ και

• *η $\lambda \to r_\lambda(x)$ έχει δυναμοσειρά γύρω από κάθε $\lambda_0 \in \mathbb{C} \backslash \sigma(x)$.*

(iii) Υποθέτουμε τώρα, προς άτοπο, ότι το $\sigma(x)$ είναι κενό. Από το (ii), ξέρουμε ότι η συνάρτηση $\mathbb{C} \to \mathcal{A} : \lambda \to r_\lambda(x)$ ορίζεται παντού και έχει (τοπικά) δυναμοσειρά γύρω από κάθε σημείο $\lambda_0 \in \mathbb{C}$.

Σταθεροποιούμε μια συνεχή γραμμική μορφή $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ και θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : \lambda \to \phi(r_\lambda(x)).$$

Για κάθε $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, εφαρμόζοντας την ϕ στην σχέση (*) έχουμε, από τη γραμμικότητα και τη συνέχεια της ϕ,

$$f(\lambda) = \phi(r_\lambda(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n \phi((\lambda_0 \mathbf{1} - x)^{-(n+1)}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\lambda_0 - \lambda)^n$$

όπου $c_n = \phi((\lambda_0 \mathbf{1} - x)^{-(n+1)}) \in \mathbb{C}$ και η σειρά συγκλίνει για κάθε $\lambda \in B(\lambda_0, \frac{1}{\|r\|})$, όπως είδαμε στο (ii).

Δηλαδή η η f έχει δυναμοσειρά γύρω από κάθε $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, συνεπώς είναι ακέραια (έχει μιγαδική παράγωγο σε κάθε λ_0).

Ειδικότερα όταν $|\lambda| > \|x\|$ ξέρουμε από το (i) ότι

$$r_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}} \qquad \text{άρα } \; f(\lambda) = \phi(r_\lambda(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi(x^n) \frac{1}{\lambda^{n+1}}\,.$$

Κατά συνέπεια, ολοκληρώνοντας τη σχέση αυτή πάνω σε έναν κύκλο $\gamma(t) = \rho e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ ακτίνας $\rho > \|x\|$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στον κύκλο, [1] έχουμε

$$\int_\gamma f(\lambda) d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \phi(x^n) \int_\gamma \frac{1}{\lambda^{n+1}} d\lambda = 2\pi i \, \phi(x^0) = 2\pi i \, \phi(\mathbf{1})$$

Όμως, αφού η f είναι ακέραια, το ολοκλήρωμά της στον κλειστό κύκλο μηδενίζεται (τοπικό Θεώρημα Cauchy). Κατά συνέπεια, έχουμε $\phi(\mathbf{1}) = 0$. Άλλά η συνεχής γραμμική μορφή ϕ ήταν αυθαίρετη, και από το Θεώρημα Hahn Banach μπορούμε να βρούμε ϕ ώστε $\phi(\mathbf{1}) \neq 0$.

Η αντίφαση αυτή ολοκληρώνει την απόδειξη ότι το $\sigma(x)$ δεν μπορεί να είναι κενό.

Σημείωση Στο τελευταίο βήμα μπορεί κανείς να ολοκληρώσει την απόδειξη και ως εξής:

Όταν $|\lambda| > \|x\|$ έχουμε $|f(\lambda)| \leqslant \|\phi\| (|\lambda| - \|x\|)^{-1}$ όπως είδαμε, άρα $\lim\limits_{|\lambda| \to \infty} |f(\lambda)| = 0$. Αφού η f είναι ακέραια και μηδενίζεται το άπειρο, από το Θεώρημα Liouville (!) έπεται ότι αναγκαστικά $f = 0$. Θέτοντας $\lambda = 0$ βρίσκουμε $0 = f(0) = \phi(x^{-1})$, που οδηγεί πάλι σε άτοπο από το Θεώρημα Hahn Banach. $\square$

[1] όταν $|\lambda| = \rho$,

$$\|r_\lambda\| = \frac{1}{|\lambda|} \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n \right\| \leqslant \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \left\|\frac{x}{\lambda}\right\|^n = \frac{1}{|\lambda|} \left(1 - \left\|\frac{x}{\lambda}\right\|\right)^{-1} = (\rho - \|x\|)^{-1}$$

άρα $|f(\lambda)| \leqslant \|\phi\| \, \|r_\lambda(x)\| \leqslant \|\phi\| \, (\rho - \|x\|)^{-1}$