# Η τετραγωνική ρίζα διατηρεί τη διάταξη

**Πρόταση 1.** *Αν $b, c$ είναι μη αρνητικά στοιχεία μιάς C* άλγεβρας $\mathcal{A}$ με μονάδα και $b^2 \leqslant c^2$, τότε $b \leqslant c$.*

*Απόδειξη.* Αφού $b - c = (b-c)^*$, αρκεί να δείξουμε ότι $\sigma(b-c) \subseteq \mathbb{R}_+$, δηλαδή ότι το στοιχείο $\lambda\mathbf{1} + (b-c)$ είναι αντιστρέψιμο για κάθε $\lambda > 0$. Θέτουμε

$$x = (\lambda\mathbf{1} + b + c)(\lambda\mathbf{1} + b - c) \in \mathcal{A}$$

και $c := \frac{1}{2}(x + x^*), d := \frac{1}{2i}(x - x^*)$. Έχουμε

$$c = \frac{1}{2}((\lambda\mathbf{1} + b + c)(\lambda\mathbf{1} + b - c) + (\lambda\mathbf{1} + b - c)(\lambda\mathbf{1} + b + c)) = (\lambda\mathbf{1} + b)^2 - c^2 \geqslant \lambda^2\mathbf{1}\,.$$

Έπεται ότι το $c$ είναι θετικό στοιχείο και επιπλέον αντιστρέψιμο (διότι $\sigma(c - \lambda^2\mathbf{1}) \subseteq [0, +\infty)$ άρα $\sigma(c) \subseteq [\lambda^2, \infty)$.

Κατά συνέπεια το $c^{-1}$ ορίζεται και είναι θετικό, άρα έχει θετική τετραγωνική ρίζα $c^{-1/2}$, οπότε ορίζεται το $\mathbf{1} + ic^{-1/2}dc^{-1/2}$, το οποίο μάλιστα είναι αντιστρέψιμο γιατί $\sigma(ic^{-1/2}dc^{-1/2}) \subseteq i\mathbb{R}$. Άρα το $c + id = c^{1/2}(\mathbf{1} + ic^{-1/2}dc^{-1/2})c^{1/2}$ είναι αντιστρέψιμο. Δηλαδή το $x = (\lambda\mathbf{1} + b + c)(\lambda\mathbf{1} + b - c)$ έχει αντίστροφο οπότε θέτοντας $y = x^{-1}(\lambda\mathbf{1} + b + c)$ έχουμε $\mathbf{1} = x^{-1}(\lambda\mathbf{1} + b + c)(\lambda\mathbf{1} + b - c) = y(\lambda\mathbf{1} + b - c)$. Τότε όμως $\mathbf{1} = (\lambda\mathbf{1} + b - c)^* y^* = (\lambda\mathbf{1} + b - c)y^*$. Επομένως το $(\lambda\mathbf{1} + b - c)$ έχει αριστερό αντίστροφο και δεξιό αντίστροφο, άρα είναι αντιστρέψιμο.

Δείξαμε λοιπόν ότι για κάθε $\lambda > 0$ ισχύει $-\lambda \notin \sigma(b-c)$, άρα $\sigma(b-c) \subseteq \mathbb{R}_+$.

Αξίζει να παρατηρήσει κανείς ότι, σε αντίθεση με τη συνάρτηση $t \to \sqrt{t}$, η συνάρτηση $t \to t^2$ δεν διατηρεί τη διάταξη:

*Παράδειγμα* Στην C* άλγεβρα $\mathcal{A} = M_2(\mathbb{C})$ θεωρούμε τα θετικά στοιχεία

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Τότε $b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + a$, άρα $b \geqslant a$ αλλά $b^2 \not\geqslant a^2$ γιατί η διαφορά $b^2 - a^2 = b^2 - a = \begin{bmatrix} 5-1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ έχει ιδιοτιμές $3 \pm \sqrt{9+1}$ μια από τις οποίες είναι αρνητική. $\square$