Καλώς ήρθατε στη Θεωρία Τελεστών!

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH175/

Εαρινό Εξάμηνο 2017-18

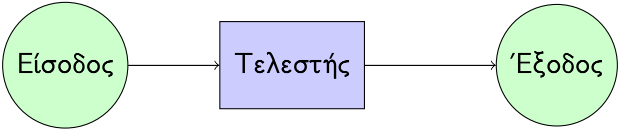
Περιεχόμενα I

Περιεχόμενα II

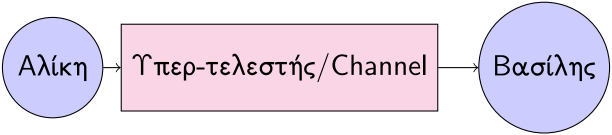
Alice and Bob

Δύο εργαστήρια: Εργαστήριο Αλίκης, Εργαστήριο Βασίλη.

[Εργαστήριο Αλίκης]



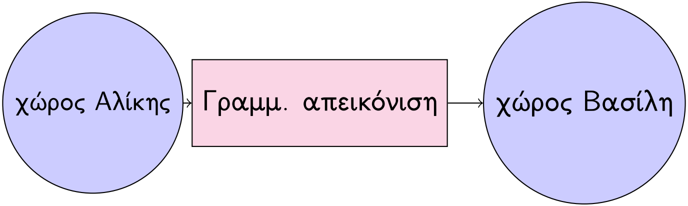
Μετάδοση Πληροφοριών



Τελεστές

[Χώρος Τελεστών Αλίκης]

[Απεικόνιση μεταξύ χώρων τελεστών Αλίκης → Βασίλη]



Γουατ ιζ αν Οπερέιτωρ;

Παράδειγμα 1. $T : f \to a_1 f + a_2 f' + a_3 f''$: διαφορικός τελεστής (εδώ a_i «καλές» συναρτήσεις σε κάποιο $\Omega \subseteq \mathbb{R}$).
Πού ορίζεται; Στον χώρο $C_2(\Omega)$. Πού παίρνει τιμές; Στον χώρο $C(\Omega)$: Γραμμικοί χώροι, γραμμική απεικόνιση.

Παράδειγμα 2. $T : \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \to [a_{i,j}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (x_i \in \mathbb{C}, [a_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C}))$

Τελεστές

Παράδειγμα 3. $T : f \to (Tf)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x-y)f(y)dy$: ολοκληρωτικός τελεστής
(εδώ g «καλή» συνάρτηση, 2π-περιοδική)
Παρατήρηση: Αν $f_n(x) = e^{inx}$ βρίσκω $Tf_n = \hat{g}(n)f_n$ $(n \in \mathbb{Z})$,

δηλαδή $T : \begin{bmatrix} \vdots \\ f_{-1} \\ f_0 \\ f_1 \\ \vdots \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & \hat{g}(-1) & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \hat{g}(0) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \hat{g}(1) & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ f_{-1} \\ f_0 \\ f_1 \\ \vdots \end{bmatrix}$

Ο T διαγωνοποιήθηκε! ... Ως προς την $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$. Είναι γραμμ. ανεξάρτητα. Γιατί; Γιατί είναι ορθοκανονικά. Άρα είναι βάση του χώρου που παράγουν. Ο χώρος αυτός δεν είναι πλήρης, είναι όμως πυκνός στους χώρους που ενδιαφέρουν στην Ανάλυση...

Γραμμικοί χώροι

$\mathbb{K}$ είναι το σώμα $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

Ορισμός

Ένα $X \neq \emptyset$ λέγεται $\mathbb{K}$-γραμμικός χώρος αν είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις $+ : X \times X \to X$ και $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ ώστε

(I) Αξιώματα της πρόσθεσης: $\forall\, x, y, z \in X$,

(i) $x + y = y + x$.

(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$.

(iii) $\exists\, \vec{0} \in X$ *ώστε* $\forall\, x \in X$, $\vec{0} + x = x$.

(iv) $\forall x \in X\ \exists\, (-x) \in X$ *ώστε* $x + (-x) = \vec{0}$.

(II) Αξιώματα του πολλαπλασιασμού: $\forall\, x, y \in X$ *και* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

(i) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

(ii) $1x = x$.

(iii) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

(iv) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων

• Το $\mathbb{C}$.

• Αν $n \in \mathbb{N}$, ο $\mathbb{C}^n$ που αποτελείται από όλες τις n-αδες μιγαδικών αριθμών,

$$\vec{x} = (x(1), x(2), \ldots, x(n))$$

με πράξεις κατά συνεταγμένη. Γράφουμε καμμιά φορά τα στοιχεία του $\mathbb{C}^n$ ως διανύσματα-στήλες (column vectors).

$$\begin{bmatrix} x(1) \\ \vdots \\ x(n) \end{bmatrix} = [x(1), \ldots, x(n)]^T .$$

(το σύμβολο T σημαίνει «ανάστροφος» (transpose).

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων II

- Ο χώρος

$$c_{00} = c_{00}(\mathbb{N}) := \{x = (x(n)) : x(n) \in \mathbb{C} \text{ τ.ω. } \exists n_x \in \mathbb{N} \text{ με } x(n) = 0 \forall n > n_x\}$$

με πράξεις κατά συνεταταγμένη.
Έστω $e_m = (\delta_m(n))$ όπου $\delta_m(n) = 1$ όταν $n = m$ και $\delta_m(n) = 0$ αλλιώς. Η (άπειρη) οικογένεια $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη και παράγει τον c_{00}: κάθε $x = x(n)) \in c_{00}$ γράφεται (μοναδικά) ως γραμμικός συνδυασμός $x = \sum\limits_{m=1}^{n_x} x(m) e_m$.
Δηλαδή η $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ είναι (αλγεβρική ή Hamel) βάση του c_{00}.

Παρατηρούμε ότι ο c_{00} είναι ο χώρος όλων των συναρτήσεων $x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ τω οποίων ο φορέας $\operatorname{supp} x := \{n \in \mathbb{N} : x(n) \neq 0\}$ είναι πεπερασμένο σύνολο (περιέχεται στο $\{1, 2, \ldots, n_x\}$).

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων III

• Το σύνολο $\mathscr{S}$ όλων των ακολουθιών πραγμ. ή μιγ. αριθμών γίνεται γραμμικός χώρος αν ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά συντεταγμένη:

$$x+y=(\xi(k)+\eta(k)) \quad , \quad \lambda x=(\lambda\xi(k))$$

για $x=(\xi(k))$, $y=(\eta(k))$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

• Αν $A \neq \emptyset$ και $\mathbb{K}^A$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : A \to \mathbb{K}$, τότε το $\mathbb{K}^A$ γίνεται γραμμικός χώρος αν ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά σημείο:
αν $f, g \in \mathbb{K}^A$ και $\lambda \in \mathbb{K}$, ορίζουμε $f+g,\ \lambda f \in \mathbb{K}^A$ θέτοντας

$$(f+g)(t)=f(t)+g(t) \quad , \quad (\lambda f)(t)=\lambda f(t) \quad , \quad t \in A.$$

(Πρτρ: $\mathscr{S}=\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$).

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων IV

• Ο χώρος $\mathscr{L}^1[0,1]$ των Lebesgue-ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f:[0,1]\to\mathbb{C}$.
Κάθε συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ γράφεται μοναδικά $f=u+iv$ όπου $u(t):=\frac{1}{2}(f(t)+\overline{f(t)})$, $v(t):=\frac{1}{2i}(f(t)-\overline{f(t)})$ (παίρνουν πραγματικές τιμές). Η f λέγεται (Lebesgue)-ολοκληρώσιμη όταν οι u και v είναι Lebesgue-ολοκληρώσιμες, και τότε ορίζουμε

$$\int f(t)d\lambda(t):=\int u(t)d\lambda(t)+i\int v(t)d\lambda(t),$$

Ο $\mathscr{L}^1[0,1]$ είναι γραμμ. χώρος (πράξεις κατά σημείο) λόγω της γραμμικότητας του ολοκληρώματος.

• Ο χώρος $\ell^2=\ell^2(\mathbb{N})$ αποτελείται από όλες τις ακολουθίες μιγ. αριθμών (= συναρτήσεις $x:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$) που είναι τετραγωνικά αθροίσιμες, δηλ. $\sum_n|x(n)|^2<\infty$. Είναι γραμμ. χώρος (πράξεις κατά συντεταγμένη). Γιατί;

Παρατήρηση - Άσκηση Κάθε γραμμικός χώρος «είναι» ένας χώρος συναρτήσεων σε κάποιο σύνολο.

Γραμμικές απεικονίσεις

Ορισμός

Έστω E, F *(πραγματικοί ή μιγαδικοί) γραμμικοί (:διανυσματικοί) χώροι. Μια απεικόνιση* $T : E \mapsto F$ *λέγεται γραμμική αν*

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}: \; T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y).$$

Μια γραμμική απεικόνιση λέγεται (γραμμικός) ισομορφισμός αν επι πλέον είναι 1-1 και επί.
Δυο γραμμικοί χώροι E, F *λέγονται ισόμορφοι αν υπάρχει ισομορφισμός* $T : E \mapsto F$.

Γραμμικοί χώροι με νόρμα

Νόρμα σε έναν γραμμ. χώρο X είναι μια απεικόνιση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ ώστε για κάθε $x, y, \in X$ και $\lambda \in \mathbb{K}$,

(N1) $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$,

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ και

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (τριγωνική ανισότητα).

Ορισμός

Αν $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα στον X, τότε το ζεύγος $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος με νόρμα.
Η συνάρτηση $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με $d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in X$ είναι μετρική (η μετρική που επάγεται στον X από τη νόρμα του). Όταν ο μετρ. χώρος (X, d) είναι πλήρης, ο $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος Banach.

Γραμμικοί χώροι με νόρμα

Αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα και $x_n, x \in X$, τότε $x_n \to x$ σημαίνει $\|x_n - x\| \to 0$.

Παρατήρηση Πολύ συχνά στις εφαρμογές, η νόρμα (ή η μετρική) προσδιορίζεται από την σύγκλιση που μελετάμε. Για παράδειγμα, η νόρμα supremum στον $C([a,b])$ (δες πιο κάτω) εκφράζει την ομοιόμορφη σύγκλιση μιας ακολουθίας (f_n) συνεχών συναρτήσεων:

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0 \iff f_n \to f \text{ ομοιόμορφα στο } [a,b].$$

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ορισμός

Έστω E ένας $\mathbb{K}$-γραμμικός χώρος ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Ένα εσωτερικό γινόμενο (inner product ή scalar product) στον E είναι μια απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$$

τέτοια ώστε

$$\begin{aligned}
&(i) && \langle x_1 + \lambda x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \lambda \langle x_2, y \rangle \\
&(ii) && \overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle \\
&(iii) && \langle x, x \rangle \geq 0 \\
&(iv) && \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0
\end{aligned}$$

για κάθε $x, x_1, x_2, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

άρα $\quad (i)' \, \langle x, y_1 + \lambda y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y_2 \rangle .$

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Πρόταση (Ανισότητα Cauchy-Schwarz)

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο,
(α) για κάθε $x, y \in E$ ισχύει

$$|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle^{1/2} \langle y, y \rangle^{1/2}.$$

(β) Ισότητα ισχύει αν και μόνον αν τα x, y είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Πρόταση

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, η απεικόνιση $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ όπου $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ είναι νόρμα στον E.

Χώροι Hilbert

Ορισμός

Ένας χώρος $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *με εσωτερικό γινόμενο λέγεται χώρος Hilbert αν είναι πλήρης ως προς την μετρική που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.*

Χώροι Hilbert

Παραδείγματα (a) Ο χώρος $\mathbb{K}^n$, με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x(k)\overline{y(k)}$, είναι βέβαια χώρος Hilbert. Είναι επίσης πλήρης ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_\infty$, αλλά δεν είναι χώρος Hilbert ως προς αυτήν (γιατί δεν ικανοποιείται ο κανόνας του παραλληλογράμμου), μολονότι οι δυο νόρμες είναι ισοδύναμες.

(b) Ο χώρος ℓ^2, με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\overline{y(k)}$, είναι χώρος Hilbert, και ο χώρος c_{oo} των ακολουθιών με πεπερασμένο φορέα είναι πυκνός υπόχωρος του. Επομένως ο χώρος $(c_{oo}, \|\cdot\|_2)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο αλλά όχι Hilbert, εφ' όσον δεν είναι πλήρης.

(c) Ο χώρος $C([a, b])$ δεν είναι πλήρης ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_2$ που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

Ο $L^2([a,b])$, ο $L^2(\mathbb{R})$

Έστω $(X, \mathscr{S}, \mu)$ χώρος μέτρου (π.χ. $([a,b], \mathscr{B}, \lambda)$).

Ορισμός

Ο χώρος $\mathscr{L}^2(X, \mathscr{S}, \mu) = \mathscr{L}^2(\mu)$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (ή $f : X \to \mathbb{C}$) που είναι μετρήσιμες και ικανοποιούν $\int_X |f|^2 d\mu < +\infty$. Ο αριθμός $\left(\int_X |f|^2 d\mu\right)^{1/2}$ συμβολίζεται $\|f\|_2$.

Θέτω $\mathscr{N} = \{f \in \mathscr{L}^2(\mu) : \|f\|_2 = 0\}$.
Αν $f, g \in \mathscr{L}^2(\mu)$, έχω $f = g$ μ-σ.π. $\iff$ $f - g \in \mathscr{N}$.
Επίσης, ο $\mathscr{N}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathscr{L}^2$.
Θέτω $\|f + \mathscr{N}\|_2 := \|f\|_2$. Είναι καλά ορισμένη νόρμα στον χώρο πηλίκο

Ορισμός: $L^2(\mu) := \mathscr{L}^2(\mu)/\mathscr{N}$.

Ο $L^2([a,b])$, ο $L^2(\mathbb{R})$

$$L^2(\mu) := \mathscr{L}^2(\mu)/\mathscr{N}.$$

Ο $L^2(\mu)$ αποτελείται από τις κλάσεις ισοδυναμίας συναρτήσεων του $\mathscr{L}^2(\mu)$ modulo ισότητα μ-σ.π.

Θεώρημα (Riesz–Fisher) Ο $L^2(\mu)$ είναι πλήρης (άρα είναι χώρος Hilbert αφού η $\|\cdot\|_2$ προέρχεται από το εσωτ. γινόμενο $\langle f+\mathscr{N}, g+\mathscr{N}\rangle = \int_X f(t)\overline{g(t)}d\mu(t)$).

Θεώρημα (πόρισμα π.χ. του Luzin) Ο $C([a,b])$ είναι πυκνός στον $L^2([a,b],\mathscr{B},\lambda)$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_2$, βεβαίως.

Ο $C_c(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $L^2(\mathbb{R},\mathscr{B},\lambda)$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_2$.

Ορθογώνιες διασπάσεις

Θεώρημα (Ύπαρξη καθέτου διανύσματος)

Αν H είναι χώρος Hilbert και M είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του H τότε υπάρχει $z \in H$, $z \neq 0$ ώστε $z \perp M$.

Αν A είναι μη κενό υποσύνολο του H, θέτω

$$A^{\perp} = \{x \in E : \langle x, y \rangle = 0 \text{ για κάθε } y \in A\}.$$

Ο $A^{\perp}$ είναι πάντα κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H.

Θεώρημα (Ορθογώνια διάσπαση)

Αν M είναι κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H, τότε

$$M \oplus M^{\perp} = H.$$

Πόρισμα (Ορθή προβολή)

Έστω M κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H. Η απεικόνιση

$$P_M : H \to H : y \to P_M(y)$$

είναι γραμμική και συνεχής.

Ο δυϊκός ενός χώρου Hilbert

Θεώρημα (Riesz)

Έστω H *χώρος Hilbert. Για κάθε γραμμική και συνεχή* $f : H \to \mathbb{K}$ *υπάρχει μοναδικό* $x_f \in H$ *ώστε*

$$f(y) = \langle y, x_f \rangle \quad \textit{για κάθε} \;\; y \in H$$

(και αντίστροφα).

Ορθοκανονικές Βάσεις

Ορισμός

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Μια οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ λέγεται ορθοκανονική βάση του E αν
(i) είναι ορθοκανονική, (δηλ. $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}\ \forall i, j$) και
(ii) Η γραμμική θήκη της είναι πυκνός υπόχωρος του E, δηλ. $\overline{\mathrm{span}\{e_i : i \in I\}} = E$.

Παρατήρηση Σε απειροδιάστατους χώρους, μια ορθοκανονική βάση δεν είναι συνήθως αλγεβρική βάση (π.χ. στον ℓ^2).

Σε διαχωρίσιμο χώρο, για κάθε $x \in E$,
(ι) $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$
(σύγκλιση ως προς τη νόρμα του E).
(ιι) $\|x\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$.

Χώροι Hilbert

Τρία πράγματα:

(1) Ύπαρξη κάθετου διανύσματος

(2) Συνεχείς γραμμικές μορφές είναι τα εσωτερικά γινομενα.

(3) Ύπαρξη ορθοκανονικών βάσεων.

Ισομορφισμοί

Δείξαμε:

Έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο E με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$.

Άρα η απεικόνιση $(E, \|\cdot\|) \to (\ell^2, \|\cdot\|_2) : x \to (\langle x, e_n\rangle)_n$ είναι (γραμμ.) ισομετρική εμφύτευση. Η εικόνα της είναι πυκνή στον ℓ^2.
(Άρα, ο E έχει μια πλήρωση που είναι χώρος Hilbert.)

Θεώρημα

Κάθε απειροδιάστατος διαχωρίσιμος [1] χώρος Hilbert H είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ^2.
Ακριβέστερα, αν επιλέξουμε μια ορθοκανονική βάση $\{x_n\}$ του H, η απεικόνιση

$$U : H \twoheadrightarrow \ell^2 \;:\; x \to (\langle x, x_n\rangle)_n$$

απεικονίζει τον H (γραμμικά και) ισομετρικά επί του ℓ^2.

[1] Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει και για μη διαχωρίσιμους χώρους.

Ορθοκανονικές βάσεις

Παράδειγμα: μετασχηματισμός Fourier.
Έστω $k \in \mathbb{Z}$ και $f_k(t) = \exp(2\pi ikt)$, $t \in [0,1]$.
Θεώρημα Η $\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $L^2([0,1])$.
Δηλαδή για κάθε $f \in L^2([0,1])$, έχουμε

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} \langle f, f_k \rangle f_k \quad \text{και ισχύει} \quad \|f\|_2^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2.$$

Εδώ η πρώτη σειρά συγκλίνει ως προς τη νόρμα του $L^2[0,1]$.
Γράφουμε

$$\hat{f}(k) = \langle f, f_k \rangle = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi ikt} dt \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Δημιουργείται έτσι μια απεικόνιση

$$F : L^2[0,1] \to \ell^2(\mathbb{Z}) : f \to \hat{f}$$

που είναι ισομετρία και επί.

Η πλήρωση ενός χώρου με νόρμα

Πρόταση

Αν $(X, \|\cdot\|)$ *είναι χώρος με νόρμα, υπάρχει χώρος Banach* $(\tilde{X}, \|\cdot\|)$ *και γραμμική και ισομετρική εμφύτευση* $\phi : X \to \tilde{X}$ *με πυκνή εικόνα. Ο* $\tilde{X}$ *είναι «ουσιαστικά μοναδικός», δηλ. αν* $(Y, \|\cdot\|)$ *είναι χώρος Banach και* $\psi : X \to Y$ *γραμμική ισομετρία με πυκνή εικόνα, τότε υπάρχει γραμμική ισομετρία* T *από τον* $\tilde{X}$ *επί του* Y *ώστε* $T(\phi(x)) = \psi(x)$ *για κάθε* $x \in X$.
Ο χώρος Banach $(\tilde{X}, \|\cdot\|)$ *λέγεται **η πλήρωση** του* $(X, \|\cdot\|)$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, two heads, "\phi"] \arrow[d, tail, two heads, "id"] & \phi(X) \arrow[r, tail] \arrow[d, tail, two heads, dashed] & \tilde{X} = \overline{\phi(X)} \arrow[d, tail, two heads, "T"] \\
X \arrow[r, tail, two heads, "\psi"'] & \psi(X) \arrow[r, tail] & Y = \overline{\psi(X)}
\end{tikzcd}$$

Η πλήρωση

Πρόταση

Αν $(E,\langle .,. \rangle)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, υπάρχει χώρος Hilbert $(H,\langle .,. \rangle)$ και γραμμική και ισομετρική εμφύτευση $\phi : E \to H$ με πυκνή εικόνα. Ο H είναι «ουσιαστικά μοναδικός», με την έννοια ότι αν $(K,\langle .,. \rangle)$ είναι χώρος Hilbert και $\psi : E \to K$ γραμμική ισομετρία με πυκνή εικόνα, τότε υπάρχει γραμμική ισομετρία T από τον H επί του K ώστε $T(\phi(x)) = \psi(x)$ για κάθε $x \in E$.

Ο χώρος Hilbert $(H,\langle .,. \rangle)$ λέγεται *η πλήρωση* *του $(E,\langle .,. \rangle)$.*

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, tail, two heads, "\phi"] \arrow[d, tail, two heads, "id"] & \phi(E) \arrow[r, tail] \arrow[d, tail, two heads, dashed] & H = \overline{\phi(E)} \arrow[d, tail, two heads, "T"] \\
E \arrow[r, tail, two heads, "\psi"'] & \psi(E) \arrow[r, tail] & K = \overline{\psi(E)}
\end{tikzcd}$$

Φραγμένοι τελεστές

Έστω $(E, \|\cdot\|_E)$ και $(F, \|\cdot\|_F)$ χώροι με νόρμα.

Παρατήρηση. Καμμιά γραμμική συνάρτηση (εκτός απ' την 0) δεν είναι φραγμένη με τη συνήθη έννοια σε όλον το χώρο.

Ορισμός

Μία γραμμική *απεικόνιση* $T : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ *λέγεται* *φραγμένη* ή *φραγμένος τελεστής (bounded operator)* *αν*

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} < +\infty.$$

$(\mathscr{B}(E,F), \|\cdot\|)$: *ο χώρος των φραγμένων τελεστών.*
Είναι χώρος Banach (δηλ. πλήρης) ανν $(F, \|\cdot\|_F)$ *Banach.*

$$\left\|Tx - Tx'\right\|_F \overset{\gamma\rho.}{=} \left\|T(x - x')\right\|_F \overset{\varphi\rho.}{\leq} \|T\| \left\|x - x'\right\|_E$$

Αν T γραμμική,
φραγμένη $\iff$ συνεχής $\iff$ ομοιόμορφα συνεχής.

Φραγμένοι τελεστές

Η επόμενη Πρόταση είναι βασικό εργαλείο:

Πρόταση

Έστω $(E, \|.\|_E)$ *χώρος με νόρμα,* $(F, \|.\|_F)$ *χώρος Banach,* $D \subseteq E$ *πυκνός υπόχωρος και*

$$T : D \to F$$

γραμμική απεικόνιση.
Αν η T *είναι συνεχής, τότε (και μόνο τότε) δέχεται συνεχή επέκταση*

$$\tilde{T} : E \to F \quad \text{δηλ.} \;\; \tilde{T}|_D = T \, .$$

Η επέκταση $\tilde{T}$ *είναι μοναδική (αν υπάρχει) και* $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Απόδειξη στο αρχείο `extend.pdf`

Ο συζυγής τελεστής

Θεώρημα

Αν H_1, H_2 είναι δύο χώροι Hilbert και $T : H_1 \to H_2$ ένας φραγμένος τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός φραγμένος τελεστής $T^* : H_2 \to H_1$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle T^* x_2, x_1 \rangle_{H_1} = \langle x_2, Tx_1 \rangle_{H_2} \qquad \text{για κάθε } x_1 \in H_1, x_2 \in H_2.$$

Ο $T^* : H_2 \to H_1$ ονομάζεται ο συζυγής (adjoint) του T. Είναι φραγμένος τελεστής και $\|T^*\| = \|T\|$.

Παραδείγματα (α) Αν $H_1 = H_2 = \ell^2(n)$ και ο A έχει πίνακα $[a_{ij}]$, δηλ. $a_{ij} = \langle Ae_j, e_i \rangle$, ο A^* είναι ο τελεστής που έχει πίνακα $[b_{ij}]$ όπου $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$.
(β) Αν σε κάθε $x \in H$ αντιστοιχίσω τον τελεστή $\tilde{x} : \mathbb{C} \to H : \lambda \to \lambda x$ τότε $\tilde{x}^* : H \to \mathbb{C} : y \to \langle y, x \rangle$ δηλ. $\tilde{x}^* = f_x$.

Ο συζυγής τελεστής

Προειδοποίηση Ο συζυγής ενός μη φραγμένου τελεστή δεν ορίζεται με τον ίδιο τρόπο.

Πρόταση

Η απεικόνιση $T \to T^* : \mathscr{B}(H_1, H_2) \to \mathscr{B}(H_2, H_1)$ *έχει τις εξής ιδιότητες:*
(α) είναι αντιγραμμική, δηλαδή $(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*$.
(β) $T^{**} = T$.
(γ) $\|T^*\| = \|T\|$.
(δ) Αν $H_1 \xrightarrow{S} H_2 \xrightarrow{T} H_3$ *φραγμένοι τελεστές,* $(TS)^* = S^* T^*$.
(ε) $\|T^* T\| = \|T\|^2$.

Ειδικότερα (αν $H_1 = H_2 = H$),
η $T \to T^* : \mathscr{B}(H) \to \mathscr{B}(H)$ είναι μια ενέλιξη (involution) που ικανοποιεί την λεγόμενη ιδιότητα C^*, δηλ. την (ε).

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Αν $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle),(F,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης, κάθε γραμμική απεικόνιση $T:E\to F$ είναι συνεχής. Αν επιλέξω ορθοκανονικές βάσεις $\{e_1,\dots,e_m\}$ του E και $\{f_1,\dots,f_n\}$ του F, ορίζεται ένας $n\times m$ πίνακας $[a_{ik}]\in M_{nm}(\mathbb{K})$ από την σχέση

$$a_{ik}=\langle Te_k,f_i\rangle\,, i=1,\dots n,\ k=1,\dots m.$$

Αντίστροφα, κάθε $[a_{ij}]\in M_{nm}(\mathbb{K})$ ορίζει μια μοναδική απεικόνιση $T_A:E\to F$ που ικανοποιεί τη σχέση αυτή:
αν $x=\sum\xi_j e_j$ τότε $T_A(x)=\sum\eta_k f_k$ όπου

$$\begin{bmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{bmatrix}=[a_{ij}]\begin{bmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^m a_{1j}\xi_j\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^m a_{nj}\xi_j\end{bmatrix}.$$

Αν $A\in M_{nm}$, ορίζουμε $A^t\in M_{mn}$ τον $A^t=[b_{ij}]$ όπου $b_{ij}=a_{ji}$. Θέτουμε $A^*=[\overline{a_{ji}}]$. Τότε $\langle T_{A^*}y,x\rangle=\langle y,T_Ax\rangle$ για κάθε $y\in F,x\in E$.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Κάθε φραγμένος τελεστής $T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ ορίζει έναν $\infty \times \infty$ πίνακα $[\langle Te_k, e_i\rangle]$, όπου $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ η συνηθισμένη ορθοκανονική βάση του ℓ^2. Δεν ισχύει όμως το αντίστροφο. Παράδειγμα;

• Διαγώνιοι τελεστές Αν $a = (a_n),\ a_n \in \mathbb{C}$, είναι τυχούσα ακολουθία, η απεικόνιση $(x(n)) \to (a_n x(n))$ στέλνει τον ℓ^2 στον ℓ^2 ανν $(a_n) \in \ell^\infty$ και τότε ορίζει φραγμένο τελεστή D_a με νόρμα $\|D_a\| = \|a\|_\infty$. Έχουμε $\langle D_a e_k, e_i\rangle = a_k \delta_{ik}$ (διαγώνιος πίνακας).

• Αν Γ τυχόν με κενό σύνολο (πχ. $\Gamma = [0,1]$) ορίζω

$$\ell^2(\Gamma) := \{x : \Gamma \to \mathbb{C} : \exists M : \forall F \subseteq \Gamma \text{ πεπερ. } \sum_{t \in F} |x(t)|^2 \leq M^2\}$$

με $\|x\|_2 = \inf\{M : \dots\}$ γίνεται χώρος Hilbert με ο.κ. βάση $\{\delta_t : t \in \Gamma\}$.
Κάθε $a \in \ell^\infty(\Gamma)$ ορίζει φραγμένο τελεστή $D_a \in \mathscr{B}(\ell^2(\Gamma))$, όπως για το $\mathbb{N}$.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Τελεστές μετατόπισης (shift operators) στον $\ell^2(\mathbb{Z})$:

$$x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots)$$

Ορίζω U:

$$Ux = (\dots, x(-2), x(-1), x(0), x(1), \dots)$$

δηλαδή $(Ux)(n) = x(n-1)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.
Προφανώς $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$, γραμμικός, ισομετρία και επί.
Ο συζυγής U^*:

$$x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots)$$
$$U^*x = (\dots, x(0), x(1), x(2), x(3), \dots)$$

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Τελεστές μετατόπισης (shift operators) (α) Στον $\ell^2(\mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned} Ue_n &= e_{n+1} \quad (\text{μετατόπιση δεξιά}) \\ \text{και}\;\; U^*e_n &= e_{n-1} \quad (\text{μετατόπιση αριστερά}) \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z})$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$-ισομετρίες, άρα επεκτείνονται σε ισομετρίες $\ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$.

- (β) Στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$:

$$\begin{aligned} Se_n &= e_{n+1} \quad (\text{μετατόπιση δεξιά}) \;\; (n \in \mathbb{Z}_+) \\ \text{και}\;\; S^*e_n &= \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases} \quad (\text{μετατόπιση αριστερά}) \end{aligned}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z}_+)$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$-συστολές (δηλ. $\|Sx\|_2 \leq \|x\|_2$ για κάθε $x \in c_{00}(\mathbb{Z}_+)$), άρα επεκτείνονται σε συστολές $\ell^2(\mathbb{Z}_+) \to \ell^2(\mathbb{Z}_+)$).
(Μάλιστα ο S είναι ισομετρία. Ο S^*;)

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- (γ) Στον $L^2(\mathbb{R})$ (translation operators):

Έστω $t \in \mathbb{R}$. Αν $f \in C_c(\mathbb{R})$, ορίζω $f_t : s \to f_t(s) = f(s-t)$. Τότε $f_t \in C_c(\mathbb{R})$ και η απεικόνιση

$$\lambda_t : (C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) \to C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) : f \to f_t$$

είναι (γραμμική) ισομετρία επί (γιατί;). Άρα επεκτείνεται σε γραμμική ισομετρία $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, επί.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Πολλαπλασιαστικοί τελεστές στον $L^2([a,b])$ Αν $f \in C([a,b])$, ορίζουμε
$$M_f^o : C([a,b]) \to C([a,b]) : g \to fg$$
(κατά σημείο γινόμενο). Επειδή $\|fg\|_2 \leq \|f\|_\infty \|g\|_2$, ο M_f^o επεκτείνεται σε $M_f : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ με $\|M_f\| \leq \|f\|_\infty$ (μάλιστα, ισότητα).

(Αλλιώς: με μέτρο) Πάρε $f \in L^\infty(\mu)$ και όρισε $M_f : L^2(\mu) \to L^2(\mu) : g \to fg$. Είναι καλά ορισμένος και $\|M_f\| \leq \|f\|_\infty$ (ισότητα για σ-πεπερασμένο μ).

Υπενθύμιση: Ο $L^{\infty}(X,\mathscr{S},\mu)$

Αν $(X,\mathscr{S},\mu)$ είναι χώρος μέτρου, μία $f : X \to \mathbb{C}$ ανήκει στον $\mathscr{L}^{\infty}(X,\mathscr{S},\mu)$ αν (α) είναι $\mathscr{S}$-μετρήσιμη και
(β) είναι ουσιωδώς φραγμένη (essentially bounded),
δηλ. υπάρχει $M < +\infty$ ώστε $|f(x)| \leq M$ σχεδόν παντού,
δηλ. $\mu(\{x \in X : |f(x) > M\}) = 0$.

Ο μικρότερος τέτοιος M (υπάρχει και) λέγεται το ουσιώδες φράγμα (essential supremum) της $|f|$.
Δηλ. ορίζουμε
$\|f\|_{\infty} := \mathrm{esssup}|f| := \min\{M : \mu(\{x \in X : |f(x) > M\}) = 0\}$.

Αν $f \in \mathscr{L}^{\infty}(X,\mathscr{S},\mu)$, τότε
$\|f\|_{\infty} = 0$ ανν $f(x) = 0$ μ-σχεδόν για κάθε $x \in X$.

Ο $L^{\infty}(X,\mathscr{S},\mu)$ είναι ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμίας, modulo ισότητα μ-σχεδόν παντού, συναρτήσεων του $\mathscr{L}^{\infty}(X,\mathscr{S},\mu)$.

Η $\|\cdot\|_{\infty}$ είναι νόρμα στον $L^{\infty}(X,\mathscr{S},\mu)$, που γίνεται C* άλγεβρα με τις πράξεις κατά σημείο.

Ορισμός

Ενέλιξη (involution) σε μια μιγαδική άλγεβρα $\mathscr{A}$ είναι μια απεικόνιση $\mathscr{A} \to \mathscr{A} : a \to a^*$, που έχει τις ιδιότητες:
(α) είναι αντιγραμμική, δηλαδή $(a+\lambda b)^* = a^* + \bar{\lambda} b^*$.
(β) $a^{**} = a$.
(δ) $(ab)^* = b^* a^*$.
για κάθε $a, b \in \mathscr{A}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$.

Παράδειγμα, η $A \to A^*$ στον $\mathscr{B}(H)$.
Επίσης, η $f \to f^*$ στην $C(K)$, όπου $f^*(t) = \overline{f(t)}, t \in K$.

C^*-άλγεβρες

Ορισμός

C^*-άλγεβρα είναι μια άλγεβρα Banach $\mathscr{A}$ εφοδιασμένη με μια ενέλιξη $\mathscr{A} \to \mathscr{A} : a \to a^*$ που η νόρμα της ικανοποιεί την λεγόμενη ιδιότητα C^*:

$$\|a^* a\| = \|a\|^2 .$$

Αν H είναι χώρος Hilbert, η $\mathscr{B}(H)$ είναι C^*-άλγεβρα. Μια κλειστή υπάλγεβρα $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}(H)$ είναι C^*-άλγεβρα ανν είναι αυτοσυζυγής (selfadjoint), δηλ. αν ικανοποιεί $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^* \in \mathscr{A}$.

Θεώρημα (Gelfand-Naimark)

Κάθε C^*-άλγεβρα $\mathscr{A}$ είναι ισομορφική, ως C^*-άλγεβρα, με μία κλειστή αυτοσυζυγή υπάλγεβρα κάποιου $\mathscr{B}(H)$. Ακριβέστερα, υπάρχει χώρος Hilbert H και απεικόνιση $\Phi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(H)$ που διατηρεί την αλγεβρική δομή (άθροισμα, γινόμενο, ενέλιξη) και την νόρμα.

Αναπαραστάσεις

Αναπαράσταση (representation) (π, H) μιάς C* άλγεβρας $\mathscr{A}$ λέγεται μια απεικόνιση $\pi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(H)$ όπου H χώρος Hilbert που είναι μορφισμός *-αλγεβρών, δηλαδή

$$\begin{aligned}\pi(a+\lambda b) &= \pi(a)+\lambda\pi(b)\\ \pi(ab) &= \pi(a)\pi(b)\\ \pi(a^*) &= (\pi(a))^*\end{aligned}$$

για κάθε $a, b \in \mathscr{A}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$. Γράφουμε $\mathscr{A} \overset{\pi}{\curvearrowright} H$.

Η αναπαράσταση $\mathscr{A} \overset{\pi}{\curvearrowright} H$ λέγεται πιστή (faithful) αν είναι 1-1. Λέγεται μη εκφυλισμένη (non-degenerate) αν $\overline{\mathrm{span}(\pi(\mathscr{A})(H))} = H$.

Αναπαραστάσεις της $C([0,1])$: Παραδείγματα

• π_1 στον χώρο $\ell^2(\Gamma)$ όπου $\Gamma = [0,1]$ (δες (35)): Ορίζουμε $\pi_1(f) \in \mathscr{B}(\ell^2([0,1]))$ από τη σχέση $\pi_1(f) = D_f$ δηλ. $(\pi_1(f)\xi)(t) = f(t)\xi(t)$ για κάθε $\xi \in \ell^2([0,1])$ και $t \in [0,1]$.

• π_2 στον $\ell^2([0,1] \cap \mathbb{Q})$: ίδιος τύπος $\pi_2(f) = D_f$, αλλά ο $\ell^2([0,1] \cap \mathbb{Q})$ είναι διαχωρίσιμος.

• π_μ στον $L^2([0,1], \mu)$. Ορίζουμε $\pi_\mu(f) \in \mathscr{B}(L^2([0,1], \mu))$ από τη σχέση $\pi_\mu(f) = M_f$ δηλ. $(\pi_\mu(f)\xi)(t) = f(t)\xi(t)$ για κάθε $\xi \in L^2([0,1], \mu)$ και (μ-σχεδόν) κάθε $t \in [0,1]$.

Οι π_1 και π_2 είναι πιστές αναπαραστάσεις. Για την π_μ, εξαρτάται από τον φορέα του μέτρου.

Κατηγορίες τελεστών

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.
(i) Ένας $T \in \mathscr{B}(H_1)$ λέγεται φυσιολογικός (normal) αν $T^*T = TT^*$.(σαν τις συναρτήσεις)
(ii) Ένας $T \in \mathscr{B}(H_1)$ λέγεται αυτοσυζυγής (self-adjoint) αν $T = T^*$. (σαν τις πραγματικές συναρτήσεις)
(iii) Ένας $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$ λέγεται ορθομοναδιαίος (unitary) αν $T^*T = I_{H_1}$ και $TT^* = I_{H_2}$. (σαν τις συναρτήσεις που $|f(t)| = 1$)

Παραδείγματα: Ο shift S δεν είναι φυσιολογικός.
Κάθε M_f είναι φυσιολογικός.
Ένας M_f είναι αυτοσυζυγής ανν $f(t) \in \mathbb{R}$ για κάθε t.
Ο μετασχηματισμός Fourier $F : L^2([0, 2\pi]) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ είναι ορθομοναδιαίος.

Ορισμός

Έστω $\mathscr{A}$ μια C άλγεβρα.*

(i) Ένα $a \in \mathscr{A}$ λέγεται φυσιολογικό (normal) αν $a^*a = aa^*$.
(π.χ. κάθε $f \in C(K)$)

(ii) Ένα $a \in \mathscr{A}$ λέγεται αυτοσυζυγές (self-adjoint) αν $a = a^*$.
(π.χ. κάθε $f \in C(K)$ με $f(K) \subseteq \mathbb{R}$)

(iii) Αν η $\mathscr{A}$ έχει μονάδα $\mathbf{1}$, ένα $u \in \mathscr{A}$ λέγεται ορθομοναδιαίο (unitary) αν $u^*u = \mathbf{1}$ και $uu^* = \mathbf{1}$.
(π.χ. κάθε $f \in C(K)$ με $f(K) \subseteq \mathbb{T}$)

Το φάσμα ενός $x \in \mathscr{A}$

Έστω $\mathscr{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα $\mathbf{1}$. Ένα $x \in \mathscr{A}$ λέγεται αντιστρέψιμο (invertible) αν υπάρχει $x^{-1} \in \mathscr{A}$ με $xx^{-1} = x^{-1}x = \mathbf{1}$. Γράφουμε $x \in \mathrm{Inv}(\mathscr{A})$.
Αν T είναι γραμμικός φραγμένος τελεστής σ' έναν χώρο Banach X το σύνολο $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ όχι 1-1}\}$ είναι το σύνολο των ιδιοτιμών του T, ενδεχομένως κενό. Όμως θα δούμε ότι το $\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \mathrm{Inv}(\mathscr{B}(X))\}$ δεν είναι ποτέ κενό.

Ορισμός

Έστω $\mathscr{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα και $x \in \mathscr{A}$. Το φάσμα (spectrum) $\sigma(x)$ του x είναι το σύνολο

$$\sigma(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda\mathbf{1} - x \notin \mathrm{Inv}(\mathscr{A})\}.$$

Αν $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$, το $r_\lambda(x) := (\lambda\mathbf{1} - x)^{-1}$ λέγεται επιλύων ή επιλύουσα συνάρτηση (resolvent) του x.

Αν $(\lambda I - T)\xi = \eta$, τότε $\xi = (\lambda I - T)^{-1}\eta = R_\lambda(T)\eta$.

Παράδειγμα: το φάσμα του $M_f \in \mathscr{B}(L^2(\mu))$

Έστω (X,μ) χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου.

Πρόταση

Αν $f \in L^\infty(X,\mu)$, ο τελεστής M_f είναι αντιστρέψιμος ανν η f είναι αντιστρέψιμο στοιχείο της άλγεβρας $L^\infty(X,\mu)$, αν δηλαδή η $1/f$ (ορίζεται μ-σχεδόν παντού και) είναι ουσιωδώς φραγμένη. Ο αντίστροφός του (αν υπάρχει) είναι ο M_g όπου $g = 1/f$.

Πρόταση

Αν $f \in L^\infty(X,\mu)$, το φάσμα του τελεστή M_f είναι το σύνολο των $\lambda \in \mathbb{C}$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ το σύνολο $\{t \in X : |f(t) - \lambda| < \delta\}$ να έχει θετικό μέτρο. Το σύνολο αυτό το ονομάζεται ουσιώδες σύνολο τιμών (essential range) της f.

Αποδείξεις: στο αρχείο `spmf.pdf`

Άσκηση Αν $(X,\mu) = ([0,1], m)$ και $f \in C([0,1])$, τότε $\sigma(M_f) = \sigma(f) = f([0,1])$.

Το φάσμα είναι μη κενό συμπαγές

Σε κάθε άλγεβρα Banach $\mathscr{A}$ (με μονάδα), το φάσμα $\sigma(x)$ κάθε $x \in \mathscr{A}$ είναι μη κενό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και η επιλύουσα συνάρτηση

$$\mathbb{C} \setminus \sigma(x) \to \mathscr{A} : \lambda \to r_\lambda(x) := (\lambda \mathbf{1} - x)^{-1}$$

είναι ολόμορφη (:έχει τοπικά δυναμοσειρά γύρω από κάθε $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$).

Για την απόδειξη, δες το αρχείο `spban.pdf`.

Ο τύπος Gelfand-Beurling

Έστω $\mathscr{A}$ άλγεβρα Banach (με μονάδα) και $a \in \mathscr{A}$. Η φασματική ακτίνα (spectral radius) $\rho(a)$ είναι η ακτίνα του μικρότερου δίσκου στο $\mathbb{C}$ που περιέχει το $\sigma(a)$. Δηλαδή

$$\rho(a) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Δείξαμε ότι $\rho(a) \leq \|a\|$, αλλά η ανισότητα μπορεί να είναι γνήσια (π.χ. όταν $a \neq 0$ και $a^2 = 0$).

Θεώρημα

Έστω $\mathscr{A}$ άλγεβρα Banach (με μονάδα) και $a \in \mathscr{A}$. Τότε

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} = \lim_n \|a^n\|^{1/n}.$$

Πόρισμα

Αν $\mathscr{A}$ είναι C-άλγεβρα (με μονάδα) και $a \in \mathscr{A}$ φυσιολογικό (δηλ. $a^*a = aa^*$) τότε $\rho(a) = \|a\|$.*

Αποδείξεις στο αρχείο `gelbe.pdf`.

Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις

Σταθεροποιούμε έναν $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Αν p πολυώνυμο, $p(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k$ $(c_k \in \mathbb{C})$, θέτουμε $p(A) = \sum_{k=0}^{n} c_k A^k$ (όπου $A^0 = I$).
Στόχος: να ορίσουμε τελεστές της μορφής $f(A)$ για άλλες κλάσεις συναρτήσεων f.

Γενικότερα, έστω $\mathscr{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathscr{A}$.
Ορίζουμε πάλι $p(a) = \sum_{k=0}^{n} c_k a^k$,

Πρτρ. Η απεικόνιση $\Phi_\pi : p \to p(a)$ διατηρεί $+$ και $\cdot$.

Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις

Πρόταση (Λήμμα Φασματικής Απεικόνισης)

Έστω $\mathscr{A}$ άλγεβρα με μονάδα. Αν $a \in \mathscr{A}$ και p είναι πολυώνυμο, τότε

$$\sigma(p(a)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Πρόταση

Έστω $\mathscr{A}$ μια $C*$ άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathscr{A}$.

$$a = a^* \implies \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}.$$

Θεώρημα

Έστω $\mathscr{A}$ μια $C*$ άλγεβρα με μονάδα. Αν $a \in \mathscr{A}$ και $a = a^*$ τότε, για κάθε πολυώνυμο p,

$$\|p(a)\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(a)\} := \|p\|_{\sigma(a)}.$$

Αποδείξεις στο αρχείο `funcalc.pdf`.

Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις

Έστω $\mathscr{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα.

Θεώρημα (Συναρτησιακός λογισμός (functional calculus))

*Αν $a = a^* \in \mathscr{A}$, υπάρχει μοναδικός ισομετρικός αλγεβρικός *-μορφισμός*

$$\Phi_c : (C(\sigma(a)), \|\cdot\|_{\sigma(a)}) \to (\mathscr{A}, \|\cdot\|) : f \to f(a)$$

που απεικονίζει το σταθερό πολυώνυμο $p_0(t) = 1$ στη μονάδα $\mathbf{1} \in \mathscr{A}$ και το ταυτοτικό πολυώνυμο $p_1(t) = t$ στο $a \in \mathscr{A}$.

Επομένως ισχύει $\Phi_c(p) = p(a)$ για κάθε πολυώνυμο p.

Ορισμός

Έστω $a = a^* \in \mathscr{A}$. Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις (continuous functional calculus) είναι η απεικόνιση $\Phi_c : C(\sigma(a)) \to \mathscr{A}$. Γράφουμε $f(a)$ αντί για $\Phi_c(f)$.

Δηλαδή αν η f είναι συνεχής στο $\sigma(a)$, το στοιχείο $f(a)$ της $\mathscr{A}$ ορίζεται μοναδικά από το όριο

$$f(a) = \lim p_n(a) \text{ όπου } (p_n) \text{ πολυώνυμα με } \|p_n - f\|_{\sigma(a)} \to 0.$$

Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις

Πόρισμα

Έστω $\mathscr{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα και $a = a^* \in \mathscr{A}$. Το σύνολο

$$C^*(\mathbf{1}, a) := \{f(a) : f \in C(\sigma(a))\}$$

είναι μεταθετική C^* άλγεβρα με μονάδα. Είναι η μικρότερη κλειστή υπάλγεβρα της $\mathscr{A}$ που περιέχει την μονάδα και το a. Κάθε στοιχείο της είναι όριο πολυωνύμων του a.

Πρόταση

Έστω $\mathscr{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα $a = a^* \in \mathscr{A}$. Για κάθε $f \in C(\sigma(a))$ ισχύει

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

Ανεξαρτησία του φάσματος σε C* άλγεβρες

Έστω $\mathscr{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ κλειστή υπάλγεβρα με $\mathbf{1} \in \mathscr{B}$. Έστω $b \in \mathscr{B}$. Αν $b \in \mathrm{Inv}(\mathscr{B})$, τότε βέβαια $b \in \mathrm{Inv}(\mathscr{A})$. Συνεπώς $\sigma_{\mathscr{A}}(b) \subseteq \sigma_{\mathscr{B}}(b)$. Ισότητα όμως δεν ισχύει πάντα.

Παράδειγμα

$\mathscr{A} = C(\mathbb{T})$ (όπου $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$) και $\mathscr{B}$ η άλγεβρα του δίσκου, δηλ. το σύνολο των $f \in \mathscr{A}$ για τις οποίες υπάρχει συνεχής επέκταση $\tilde{f} : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$, που είναι ολόμορφη στον ανοικτό δίσκο $\mathbb{D}$. Η $f(z) = z$ ανήκει στην $\mathscr{B}$, αλλά η $\frac{1}{f} \in \mathscr{A}$ δεν ανήκει στην $\mathscr{B}$.

Πρόταση

Έστω $\mathscr{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ μια C^* υπάλγεβρα με $\mathbf{1} \in \mathscr{B}$. Τότε για κάθε $b \in \mathscr{B}$ ισχύει

$$\sigma_{\mathscr{A}}(b) = \sigma_{\mathscr{B}}(b).$$

Ο θετικός κώνος μιας C* άλγεβρας

Ορισμός

Έστω $\mathscr{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα. Ένα $a \in \mathscr{A}$ λέγεται ***θετικό*** *(γράφουμε $a \geq 0$) αν $a = a^*$ και $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$.*
Θέτουμε $\mathscr{A}_+ = \{a \in \mathscr{A} : a \geq 0\}$.
Αν a, b είναι αυτοσυζυγή, λέμε ότι $a \leq b$ όταν $b - a \in \mathscr{A}_+$.

Παραδείγματα

• Στον $C(K)$: $f \geq 0$ ανν $f(t) \in \mathbb{R}_+$ για κάθε $t \in K$ (γιατί $\sigma(f) = f(K)$).
• Στην $M_n(\mathbb{C})$: $T \geq 0$ ανν ο T διαγωνοποιείται και έχει μη αρνητικές ιδιοτιμές, ισοδύναμα ανν είναι θετικά ημιορισμένος, δηλ. $\langle T\xi, \xi \rangle \geq 0$ για κάθε $\xi \in \mathbb{C}^n$.
• Στην $\mathscr{B}(H)$: $T \geq 0$ ανν $\langle T\xi, \xi \rangle \geq 0$ για κάθε $\xi \in H$.

Πρόταση

Αν $\mathscr{A}$ C^* άλγεβρα με μονάδα, $a = a^* \in \mathscr{A}$ και $f \in C(\sigma(a))$, τότε

$$f(a) \geq 0 \iff f(\sigma(a)) \subseteq \mathbb{R}_+.$$

Ο θετικός κώνος μιας C* άλγεβρας

Έστω $\mathscr{A}$ C* άλγεβρα με μονάδα.

Πρόταση

Το σύνολο $\mathscr{A}_+$ είναι κώνος:

$$a, b \in \mathscr{A}_+,\ \lambda \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda a \in \mathscr{A}_+, a+b \in \mathscr{A}_+.$$

Λήμμα

Αν $x = x^*$ και $\|x\| \leq \mu$, τότε $-\mu\mathbf{1} \leq x \leq \mu\mathbf{1}$

$$\textit{και} \quad x \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \|x - \mu\mathbf{1}\| \leq \mu\,.$$

Πόρισμα

$$\mathscr{A}_+ = \{x \in \mathscr{A} : x = x^* \ \textit{και} \ \|\|x\|\mathbf{1} - x\| \leq \|x\|\}\,.$$

Πρόταση

Ο κώνος $\mathscr{A}_+$ είναι $\|\cdot\|$-κλειστός και γνήσιος, δηλαδή

$$\mathscr{A}_+ \cap (-\mathscr{A}_+) = \{0\}.$$

Ο θετικός κώνος μιας C* άλγεβρας

Πρόταση

Κάθε θετικό στοιχείο μιάς C^* άλγεβρας $\mathscr{A}$ έχει μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα. Μάλιστα

$$a \in \mathscr{A}_+ \quad \text{αν και μόνον αν υπάρχει } b \in \mathscr{A}_+ \text{ ώστε } a = b^2.$$

Πρόταση

Κάθε αυτοσυζυγές στοιχείο a μιάς C^* άλγεβρας $\mathscr{A}$ (με μονάδα) γράφεται $a = a_+ - a_-$ όπου $a_+, a_- \in \mathscr{A}_+$ (μάλιστα, $a_+, a_- \in C^*(\mathbf{1}, a)$) ώστε $a_+ a_- = a_- a_+ = 0$.
Επομένως, κάθε στοιχείο $x \in \mathscr{A}$ είναι γραμμικός συνδυασμός τεσσάρων θετικών στοιχείων: $x = a + ib$ όπου $a = a^*, b = b^*$, άρα $x = (a_+ - a_-) + i(b_+ - b_-)$.

Θεώρημα

Σε μια C^* άλγεβρα $\mathscr{A}$, ένα στοιχείο είναι θετικό ανν είναι της μορφής $a^* a$.

Συνέχεια μορφισμών [2]

Έστω $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ C* άλγεβρες με μονάδα και $\Phi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ *-μορφισμός με $\Phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Τότε

1. Για κάθε $a \in \mathscr{A}$ ισχύει $\sigma_{\mathscr{B}}(\Phi(a)) \subseteq \sigma_{\mathscr{A}}(a)$.
2. Για κάθε $a \in \mathscr{A}_+$ ισχύει $\Phi(a) \in \mathscr{B}_+$.
3. Για κάθε $a \in \mathscr{A}$ ισχύει $\|\Phi(a)\| \leq \|a\|$.
4. Αν Φ 1-1, τότε για κάθε $a = a^* \in \mathscr{A}$ ισχύει $\sigma_{\mathscr{B}}(\Phi(a)) = \sigma_{\mathscr{A}}(a)$.
5. Αν Φ 1-1, τότε Φ ισομετρία.

Σε μια C* άλγεβρα, η νόρμα καθορίζεται από την αλγεβρική δομή: $\|a\|^2 = \|a^*a\| = \sup \sigma(a^*a)$.

Πρόταση (Μοναδικότητα της νόρμας)

Αν $(\mathscr{A}, \|\cdot\|)$ είναι C άλγεβρα και $\|\cdot\|'$ μια νόρμα στην $\mathscr{A}$ με $\|ab\|' \leq \|a\|' \|b\|'$ και $\|a^*a\|' = \|a\|'^2$ για κάθε $a, b \in \mathscr{A}$, τότε $\|\cdot\|' = \|\cdot\|$.*

[2] Δείτε και το `morph.pdf`.

Θετικές γραμμικές μορφές

Ορισμός

Μια γραμμική $\phi : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ *σε μια* C^* *άλγεβρα* $\mathscr{A}$ *λέγεται* ***θετική*** *αν* $\phi(a) \geq 0$ *για κάθε* $a \in \mathscr{A}_+$. *Λέγεται* ***κατάσταση (state)*** *αν* $\|\phi\| = 1$. *Λέγεται* ***πιστή (faithful)*** *αν* $\phi(a^*a) > 0$ *για κάθε* $a \neq 0$.

Πρόταση

Αν ϕ *είναι θετική γραμμική μορφή τότε* $\phi(x^*) = \overline{\phi(x)}$ *για κάθε* $x \in \mathscr{A}$. *Η απεικόνιση* $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \to \mathbb{C} : \langle a, b \rangle = \phi(b^*a)$ *είναι ημι-εσωτερικό γινόμενο, και είναι εσωτερικό γινόμενο ανν η* ϕ *είναι πιστή. Ισχύει η ανισότητα*

$$|\phi(b^*a)|^2 \leq \phi(a^*a)\phi(b^*b) \ \text{για κάθε} \ a, b \in \mathscr{A}.$$

Παρατήρηση Έπεται ότι αν $a \in \mathscr{A}$ τότε

$$\phi(a^*a) = 0 \iff \phi(b^*a) = 0 \text{ για κάθε } b \in \mathscr{A}.$$

Θετικές γραμμικές μορφές

Πρόταση

Κάθε θετική γραμμική μορφή είναι συνεχής. Όταν η $\mathscr{A}$ έχει μονάδα και η ϕ είναι θετική, $\|\phi\| = \phi(\mathbf{1})$.

Απόδειξη (όταν $\mathbf{1} \in \mathscr{A}$)

$0 \leq a^*a \leq \|a^*a\| \mathbf{1} = \|a\|^2 \mathbf{1} \Rightarrow 0 \leq \phi(a^*a) \leq \|a\|^2 \phi(\mathbf{1})$. Αλλά $|\phi(a)|^2 = |\phi(\mathbf{1}^*a)|^2 \leq \phi(a^*a)\phi(\mathbf{1}^*\mathbf{1})$ άρα $|\phi(a)|^2 \leq \|a\|^2 \phi(\mathbf{1})^2$.

Παραδείγματα

1. Στην $\mathscr{B}(H)$, *(i)* η $\phi(T) = \langle T\xi, \xi \rangle$ (όπου $\xi \in H$ νόρμας 1)
2. *(ii)* η $\psi(T) = \sum_i \langle T\xi_i, \xi_i \rangle$ όπου $\sum \|\xi_i\|^2 = 1$.
3. Στην $C(K)$, *(i)* η $\phi(f) = f(t_0)$ όπου $t_0 \in K$
4. *(ii)* η $\psi(f) = \int f d\mu$ όπου μ μέτρο πιθανότητας.
5. Σε μια C* άλγεβρα $\mathscr{A}$, αν $\pi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(H)$ είναι μια αναπαράσταση και $\xi \in H$ νόρμας 1, η $\phi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$.

Αντίστροφο του (5):

Κάθε κατάσταση σε μια C* άλγεβρα ορίζει μια αναπαράσταση:

Η Αναπαράσταση GNS

Συμβολίζουμε $\mathscr{S}(\mathscr{A})$ το σύνολο των καταστάσεων μιας C* άλγεβρας $\mathscr{A}$.

Θεώρημα (Gelfand, Naimark, Segal)

Για κάθε κατάσταση ϕ σε μια C^* άλγεβρα $\mathscr{A}$ υπάρχει μια τριάδα $(\pi_\phi, H_\phi, \xi_\phi)$ όπου π_ϕ είναι αναπαράστση της $\mathscr{A}$ στον χώρο Hilbert H_ϕ και $\xi_\phi \in H_\phi$ ένα κυκλικό [3] μοναδιαίο διάνυσμα ώστε

$$\phi(a) = \left\langle \pi_\phi(a)\xi_\phi, \xi_\phi \right\rangle \quad \text{για κάθε } a \in \mathscr{A}.$$

Όπως θα δούμε, η τριάδα GNS $(\pi_\phi, \mathscr{H}_\phi, \xi_\phi)$ καθορίζεται μοναδικά, modulo unitary ισοδυναμία, από την ισότητα αυτή.

[3] δηλ. τέτοιο ώστε το $\pi_\phi(\mathscr{A})\xi_\phi$ να είναι πυκνό στον H_ϕ.

Βήματα απόδειξης GNS [4].

1. Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο $\mathscr{A}$.
2. Εφοδιάζεται με το ημι-εσωτερικό γινόμενο $\langle a,b\rangle_0 := \phi(b^*a)$.
   Όταν $\mathscr{A} = C(X)$ έχουμε $\langle a,b\rangle_0 = \int_X a(t)\overline{b(t)}d\mu(t)$.
3. Αφού ϕ θετική, $\langle a,a\rangle_0 = \phi(a^*a) \geq 0$.
   Λόγω Cauchy-Schwarz το σύνολο
   $\mathscr{N}_\phi = \mathscr{N} := \{u \in \mathscr{A} \ : \langle u,u\rangle_0 = 0\}$ είναι γραμμικός χώρος.
4. Θέτουμε $H_{0\phi} := \mathscr{A}/\mathscr{N}$ και ονομάζουμε H_ϕ $(= L^2(\mu))$ την πλήρωση του $H_{0\phi}$ ως προς την $\|[a]\|_\phi := \sqrt{\langle a,a\rangle_0}$.
   (γράφω $[a] = a + \mathscr{N}$, $a \in \mathscr{A}$).

[4] Δείτε και το gns.pdf

Βήματα απόδειξης GNS II

5. Η $\mathscr{A}$ δρα στον γραμ. χώρο $\mathscr{A}$ έτσι: $\pi_0(a)(b) = ab$.

6. Επειδή $\pi_0(a)(\mathscr{N}) \subseteq \mathscr{N}$ ο τελεστής $\pi_0(a)$ επάγει $\pi_1(a)$ στον $H_{0\phi} = \mathscr{A}/\mathscr{N}$.

7. Δείχνουμε ότι $\|\pi_1(a)([b])\|_\phi \leq \|a\| \, \|[b]\|_\phi$.
   [Όταν $\mathscr{A} = C(X)$, $\|ab\|_2 \leq \|a\|_\infty \|b\|_2$.]
   Έπεται ότι ο $\pi_1(a)$ επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $\pi_\phi(a)$ στον H_ϕ.

   Εύκολο: η $\pi_\phi : a \to \pi_\phi(a) : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(H_\phi)$ είναι *-αναπαράσταση. [Όταν $\mathscr{A} = C(X)$, τότε $\pi_\phi(a) = M_a$ δηλ. $(\pi_\phi(a)b)(t) = a(t)b(t)$ μ-σχεδόν για κάθε $t \in X$.]

8. Θέτουμε $\xi_\phi = [\mathbf{1}_{\mathscr{A}}]$. Τότε

$$\left\langle \pi_\phi(a)\xi_\phi, \xi_\phi \right\rangle_{H_\phi} = \left\langle \pi_\phi(a)[\mathbf{1}], [\mathbf{1}] \right\rangle_{H_\phi}$$
$$= \langle a, \mathbf{1} \rangle_{H_\phi} = \phi(\mathbf{1}^* a) = \phi(a). \qquad \square$$

Η Αναπαράσταση GNS: Μοναδικότητα

Πρόταση

Έστω $\mathscr{A}$ C^* άλγεβρα με μονάδα και ϕ κατάσταση στην $\mathscr{A}$. Αν (π, H, ξ) αναπαράσταση με κυκλικό μοναδιαίο διάνυσμα ξ ώστε

$$\langle \pi(a)\xi, \xi \rangle = \phi(a) \quad \text{για κάθε } a \in \mathscr{A},$$

τότε η (π, H, ξ) είναι unitarily ισοδύναμη με την $(\pi_\phi, \mathscr{H}_\phi, \xi_\phi)$. Δηλαδή υπάρχει μια επί ισομετρία $U : H_\phi \to H$ ώστε

$$\pi(a) = U\pi_\phi(a)U^* \quad \text{για κάθε } a \in \mathscr{A}.$$

Πόρισμα

Έστω $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}(H)$ C^* άλγεβρα με $I \in \mathscr{A}$ και $\xi \in H$ μοναδιαίο διάνυσμα. Θεωρούμε την κατάσταση $\phi(A) := \langle A\xi, \xi \rangle$, $A \in \mathscr{A}$. Τότε η αναπαράσταση GNS $(\pi_\phi, \mathscr{H}_\phi, \xi_\phi)$ είναι unitarily ισοδύναμη με την $A \to A|_K$, $A \in \mathscr{A}$ όπου $K := \overline{\mathrm{span}\{A\xi : A \in \mathscr{A}\}}$.

(... και μπορώ $U\xi_\phi = \xi$.)

Ευθέα αθροίσματα: χώρων Hilbert

Αν H_1, H_2 είναι χώροι Hilbert ορίζουμε

$$H_1 \oplus H_2 := H = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_i \in H_i \right\}$$

Είναι χώρος Hilbert με γραμμικές πράξεις κατά συντεταγμένη και εσωτερικό γινόμενο

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle := \langle x_1, y_1 \rangle_{H_1} + \langle x_2, y_2 \rangle_{H_2}$$

δηλ. με τη νόρμα $\left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\|x_1\|_{H_1}^2 + \|x_2\|_{H_2}^2}$).

Αν $T_i \in \mathscr{B}(H_i)$, $i = 1, 2$, ορίζουμε $T = T_1 \oplus T_2$ από τη σχέση

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T(x_1) \\ T(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Εύκολο: η απεικόνιση $T_1 \oplus T_2$ είναι καλά ορισμένη και γραμμική.
Χρήσιμη Άσκηση:

$$\| T_1 \oplus T_2 \| = \max\{\| T_1 \|, \| T_2 \|\}.$$

Ευθέα αθροίσματα: χώρων Hilbert

Αν $\{H_i : i \in I\}$ χώροι Hilbert,

Ορισμός

Το ευθύ άθροισμα χώρων Hilbert $H := \bigoplus_{i\in I} H_i$ *είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων* $\xi = (\xi_i)$ *με* $\xi_i \in H_i$ *για κάθε* $i \in I$ *και*

$$\|\xi\|_H := \sup\left\{\sum_{i\in J} \|\xi_i\|_{H_i}^2 : J \subseteq I \text{ πεπερασμένο}\right\} < \infty.$$

Άσκηση Είναι πλήρης χώρος. Κάθε $\xi \in H$ έχει αριθμήσιμο φορέα $J_\xi := \{j \in I : \xi_j \neq 0\}$. Ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \xi, \eta \rangle_H = \sum_{i\in J_\xi} \langle \xi_i, \eta_i \rangle_{H_i}$$

που επάγει τη νόρμα $\|\cdot\|_H$. Το *αλγεβρικό ευθύ άθροισμα*

$$H_0 := \{(x_i)_i \in I : x_i \in H_i \text{ και } x_i = 0 \text{ πλην πεπερασμένου πλήθους } i \in I\}$$

είναι ισομετρικό με έναν πυκνό υπόχωρο του H.

Ευθέα αθροίσματα: Τελεστών

Αν δοθεί $T_i \in \mathscr{B}(H_i)$ για κάθε $i \in I$, να ορίσουμε τελεστή $\bigoplus_i T_i \in \mathscr{B}(\bigoplus H_i)$. Ορίζουμε πρώτα

$$T_0 : H_0 \to H_0 : (x_i) \to (T_i x_i)\,.$$

Είναι καλά ορισμένη απεικόνιση (γιατί $\operatorname{supp}(T_i x_i) \subseteq \operatorname{supp}(x_i)$) και γραμμική, αλλά δεν επεκτείνεται πάντα στον H.

Πρόταση

Μια οικογένεια (T_i) με $T_i \in \mathscr{B}(H_i)$ ορίζει φραγμένο τελεστή $\bigoplus_i T_i \in \mathscr{B}(\bigoplus H_i)$ που επεκτείνει τον T_0 αν και μόνον αν $\sup\{\|T_j\|_{\mathscr{B}(H_j)} : j \in I\} < \infty$. *Μάλιστα*

$$\left\|\bigoplus_i T_i\right\|_{\mathscr{B}(H)} = \sup\{\|T_j\|_{\mathscr{B}(H_j)} : j \in I\}\,.$$

Ευθέα αθροίσματα: Αναπαραστάσεων [5].

Έστω $\mathscr{A}$ μια C*-άλγεβρα και για κάθε $i \in I$ έστω (π_i, H_i) μια αναπαράσταση. Επειδή $\sup_i \|\pi_i(a)\|_{\mathscr{B}(H_i)} \leq \|a\|_{\mathscr{A}}$ για κάθε $a \in \mathscr{A}$, μπορούμε να ορίσουμε:

$$\pi(a) := \oplus_{i \in I} \pi_i(a) : \oplus H_i \to \oplus H_i : (x_i) \to (\pi_i(a) x_i)\,.$$

Επομένως ορίζεται μια απεικόνιση

$$\pi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(\oplus H_i) : a \to \pi(a)$$

και $\|\pi(a)\| = \sup_i \|\pi_i(a)\| \leq \|a\|$ για κάθε $a \in \mathscr{A}$.
Η π είναι μια *-αναπαράσταση της $\mathscr{A}$.

[5] Δείτε και το `dirsum.pdf`

Η καθολική αναπαράσταση

Έστω $\mathscr{A}$ μια C*-άλγεβρα και $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathscr{A})$ το σύνολο των states της $\mathscr{A}$. Για κάθε $\phi \in \mathscr{S}$ θεωρούμε την τριάδα GNS $(\pi_\phi, H_\phi, \xi_\phi)$.

Ορισμός

*Η **καθολική αναπαράσταση** της $\mathscr{A}$ είναι η (π, H) όπου*

$$H := \bigoplus_{\phi \in \mathscr{S}} H_\phi \quad \textit{και} \quad \pi(a) := \bigoplus_{\phi \in \mathscr{S}} \pi_\phi(a), \;\; a \in \mathscr{A}.$$

Στόχος:

Θεώρημα (Gelfand-Naimark)

Η καθολική αναπαράσταση είναι πιστή, δηλ. 1-1.
Επομένως κάθε C-άλγεβρα αναπαρίσταται ισομετρικά και *-ισομορφικά ως πιστή C*-υπάλγεβρα της άλγεβρας $\mathscr{B}(H)$ των τελεστών σε έναν κατάλληλο χώρο Hilbert.*

Αρκεί να δείξουμε ότι

Πρόταση

Για κάθε $a \in \mathscr{A} \setminus \{0\}$ υπάρχει $\phi = \phi_a \in \mathscr{S}(\mathscr{A})$ ώστε $\phi(a^* a) \neq 0$.

Η καθολική αναπαράσταση

Καλύτερα:

Πρόταση

Για κάθε $a \in \mathscr{A} \setminus \{0\}$ *υπάρχει* $\phi = \phi_a \in \mathscr{S}(\mathscr{A})$ *ώστε* $\phi(a^* a) = \|a^* a\|$.

Συνεπώς $\left\|\pi_\phi(a)\right\| = \|a\|$ άρα $\|\pi(a)\| = \|a\|$.

Απόδειξη Αν $b := a^* a$ και $\lambda_0 := \max \sigma(b) = \|b\|$, ορίζω

$$\psi : C^*(\mathbf{1}, b) \to \mathbb{C} \quad \text{με} \quad \psi(f(b)) = f(\lambda_0) \quad (f \in C(\sigma(b)))$$

και επεκτείνω το ψ σε $\phi \in \mathscr{S}(\mathscr{A})$, οπότε $\phi(a^* a) = \psi(b) = \lambda_0 = \|a^* a\|$.

Η καθολική αναπαράσταση

Πόρισμα

Αν $\{a_i : i \in I\}$ πυκνό υποσύνολο της $\mathscr{A}$, για κάθε $i \in I$ έστω π_i αναπαράσταση της $\mathscr{A}$ ώστε $\|\pi_i(a_i)\| = \|a_i\|$. Τότε η αναπαράσταση

$$\pi := \oplus_{i \in I} \pi_i$$

είναι πιστή.

Παρατήρηση - Άσκηση Αν η $(\mathscr{A}, \|\cdot\|)$ είναι διαχωρίσιμη, τότε για κάθε $\phi \in \mathscr{S}(\mathscr{A})$ ο χώρος Hilbert $(H_\phi, \|\cdot\|_\phi)$ είναι διαχωρίσιμος.

Πόρισμα

Αν η $\mathscr{A}$ είναι διαχωρίσιμη, τότε δέχεται πιστή αναπαράσταση σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert.

Μεταθετικές C*-άλγεβρες

Έστω $\mathscr{C}$ μεταθετική C*-άλγεβρα με μονάδα. Ονομάζουμε $\sigma(\mathscr{C})$ το σύνολο των μη μηδενικών μορφισμών ή χαρακτήρων (πολλ/κών γραμμικών μορφών) $\phi : \mathscr{C} \to \mathbb{C}$. Κάθε $\phi \in \sigma(\mathscr{C})$ ικανοποιεί αυτομάτως $\|\phi\| = \phi(\mathbf{1}) = 1$.

Εφοδιάζουμε το $\sigma(\mathscr{C})$ με την τοπολογία της σύγκλισης κατά σημείο: $\phi_i \to \phi$ ανν $\phi_i(a) \to \phi(a)$ για κάθε $a \in \mathscr{C}$. Είναι συμπαγής χώρος Hausdorff.

Όταν η $\mathscr{C}$ δεν είναι μεταθετική μπορεί να μην έχει καθόλου χαρακτήρες (π.χ. $M_2(\mathbb{C})$ ή $\mathscr{B}(H)$).

Όταν η $\mathscr{C}$ είναι μεταθετική υπάρχουν «πολλοί» χαρακτήρες: για κάθε $a \in \mathscr{C}$ υπάρχει $\phi \in \sigma(\mathscr{C})$ ώστε $\|a\| = |\phi(a)|$.

Μεταθετικές C*-άλγεβρες

Θεώρημα [Gelfand-Naimark 1]

Κάθε μεταθετική C*-άλγεβρα $\mathscr{A}$ με μονάδα είναι ισομετρικά *-ισόμορφη με την C*-άλγεβρα $C(\sigma(\mathscr{A}))$ των συνεχών συναρτήσεων $f : \sigma(\mathscr{A}) \to \mathbb{C}$, όπου $\sigma(\mathscr{A})$ είναι το σύνολο των μη μηδενικών μορφισμών $\phi : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$:
Ο μετασχηματισμός Gelfand:

$$(\mathscr{A}, \|\cdot\|) \to (C(\sigma(\mathscr{A})), \|\cdot\|_\infty) : \ a \to \hat{a}$$

(όπου $\hat{a}(\phi) = \phi(a)$, $\phi \in \sigma(\mathscr{A})$)
είναι ισομετρικός *-ισομορφισμός της $\mathscr{A}$ *επί* της $C(\sigma(\mathscr{A}))$.

Θεώρημα Gelfand-Naimark 1: Σχέδιο Απόδειξης [6]

Παρατήρηση Αν $\phi \in \sigma(\mathscr{A})$, τότε $\phi(a) \in \sigma(a)$, άρα $|\phi(a)| \leq \|a\|$.
Παρατήρηση Αν η $\mathscr{A}$ είναι C*-άλγεβρα με μονάδα, κάθε $\phi \in \sigma(\mathscr{A})$ έχει $\|\phi\| = 1$ και άρα $\sigma(\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{S}(\mathscr{A})$.

Πρόταση

Έστω $\mathscr{A}$ μια C-άλγεβρα με μονάδα. Με την ασθενή-* τοπολογία, το σύνολο των καταστάσεων $\mathscr{S}(\mathscr{A})$ είναι συμπαγής χώρος Hausdorff και το σύνολο των χαρακτήρων $\sigma(\mathscr{S})$ είναι κλειστό, άρα συμπαγές, υποσύνολό του.*

[6] Αναλυτική απόδειξη στο abelian.pdf.

Θεώρημα Gelfand-Naimark 1: Σχέδιο Απόδειξης II

Ορισμός

*Έστω $\mathscr{A}$ μεταθετική C**-άλγεβρα με μονάδα και $x \in \mathscr{A}$. Ορίζουμε*

$$\hat{x} : \sigma(\mathscr{A}) \to \mathbb{C} : \phi \to \phi(x).$$

Παρατήρηση Από τον ορισμό της ασθενούς-* τοπολογίας, για κάθε $x \in \mathscr{A}$ η συνάρτηση

$$\hat{x} : (\sigma(\mathscr{A}), w^*) \to (\mathbb{C}, |\cdot|)$$

είναι συνεχής: $\hat{x} \in C(\sigma(\mathscr{A}))$.

Ορισμός

Η απεικόνιση

$$\mathscr{G} : \mathscr{A} \to C(\sigma(\mathscr{A})) : x \to \hat{x}$$

λέγεται μετασχηματισμός Gelfand.

Θεώρημα Gelfand-Naimark 1: Σχέδιο Απόδειξης III

Πρόταση

Έστω $\mathscr{A}$ μεταθετική C-άλγεβρα με μονάδα. Η απεικόνιση Gelfand*

$$\mathscr{G} : (\mathscr{A}, \|\cdot\|_{\mathscr{A}}) \to (C(\sigma(\mathscr{A})), \|\cdot\|_\infty)$$

*είναι *-μορφισμός και διατηρεί την μονάδα.*

Πρόταση

Έστω $\mathscr{A}$ μεταθετική C-άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathscr{A}$. Για κάθε $\lambda \in \sigma(a)$, υπάρχει $\phi \in \sigma(\mathscr{A})$ ώστε $\phi(a) = \lambda$. Δηλαδή*

$$\sigma(a) = \{\phi(a) : \phi \in \sigma(\mathscr{A})\}.$$

Η ιδέα της Απόδειξης Σταθεροποιώ $\lambda \in \sigma(a)$. Θεωρώ την

$$\psi : f(a) \to f(\lambda) \; (f \in C(\sigma(\mathscr{A})))$$

(οπότε $\psi(a) = \lambda$). Η ψ επεκτείνεται σε χαρακτήρα της $\mathscr{A}$. Πώς;

Θεώρημα Gelfand-Naimark 1: Σχέδιο Απόδειξης IV

Παρατήρηση Το σύνολο Ω των επεκτάσεων της ψ στην $\mathscr{A}$ είναι κυρτό και ασθενώς-* συμπαγές υποσύνολο του $\mathscr{S}(\mathscr{A})$. Συνεπώς, από το θεώρημα Krein-Milman (!) έχει ακραία σημεία. [7]
Κάθε τέτοιο ακραίο σημείο είναι ακραίο σημείο και του $\mathscr{S}(\mathscr{A})$.

Πρόταση

Κάθε ακραίο σημείο ϕ του κυρτού συνόλου $\mathscr{S}(\mathscr{A})$ των καταστάσεων μιας μεταθετικής C-άλγεβρας $\mathscr{A}$ με μονάδα είναι χαρακτήρας της $\mathscr{A}$.*
Αντίστροφα, κάθε χαρακτήρας της $\mathscr{A}$ είναι ακραίο σημείο του $\mathscr{S}(\mathscr{A})$.

Αποδείχθηκε ότι $\quad \sigma(a) = \{\phi(a) : \phi \in \sigma(\mathscr{A})\}$.
Έπεται ότι ο μετασχηματισμός Gelfand $a \to \hat{a}$ είναι ισομετρία.
Λόγω Stone – Weierstrass, είναι και επί της $C(\sigma(\mathscr{A}))$. $\square$

[7] Δες την μεθεπόμενη διαφάνεια και το kreinmilman.pdf.

Παράρτημα: Θεώρημα Stone – Weierstrass

Έστω K συμπαγής μετρικός χώρος (ή, γενικότερα, συμπαγής χώρος Hausdorff) και έστω $C(K)$ η μιγαδική άλγεβρα όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : K \to \mathbb{C}$ (με πράξεις κατά σημείο και τη νόρμα supremum). Έστω

$$\mathscr{B} \subseteq C(K)$$

με τις εξής ιδιότητες

(1) είναι υπάλγεβρα (δηλ. περιέχει το άθροισμα και το γινόμενο των στοιχείων της)

(2) περιέχει τις σταθερές συναρτήσεις (δηλ. $\mathbf{1} \in \mathscr{B}$)

(3) χωρίζει τα σημεία του K (δηλ. αν $f(x) = f(y)$ για κάθε $f \in \mathscr{B}$ τότε $x = y$)

(4) περιέχει το συζυγές κάθε στοιχείου της (δηλ. $f \in \mathscr{B} \Rightarrow \bar{f} \in \mathscr{B}$).

Τότε η $\mathscr{B}$ είναι ομοιόμορφα πυκνή στην $C(K)$.

Εφαρμογή. $K \subseteq \mathbb{C}$ συμπαγές, $\mathscr{B} := \{p(z, \bar{z}) : p(\cdot, \cdot)\,\text{πολυώνυμο}\}$.

Το Θεώρημα Krein - Milman

Ορισμός

Έστω E γραμμικός χώρος και $K \subseteq E$ κυρτό σύνολο. Ένα $x \in K$ λέγεται ***ακραίο σημείο*** *του K αν*

$$y,z \in K,\ \lambda \in (0,1),\ \lambda y + (1-\lambda)z = x \implies y = z\ (= x).$$

Γράφουμε $x \in \mathrm{ex}(K)$.
Ένα κυρτό υποσύνολο $F \subseteq K$ λέγεται ***ακραίο στο K ή έδρα (face) του K*** *αν*

$$y,z \in K,\ \lambda \in (0,1),\ \lambda y + (1-\lambda)z \in F \implies y,z \in F.$$

Παρατήρηση Το $x \in K$ είναι ακραίο σημείο του K $\iff$ το σύνολο $\{x\}$ είναι ακραίο στο K.

Παρατήρηση Αν $\{F_i : i \in I\}$ ακραία στο K και $\cap_i F_i \neq \emptyset$, τότε $\cap_i F_i$ ακραίο στο K.

Παρατήρηση Αν $F \subseteq G \subseteq K$, όπου G ακραίο στο K και F ακραίο στο G, τότε F ακραίο στο K.

Άρα,αν $G \subseteq K$ ακραίο στο K, τότε $\mathrm{ex}(G) \subseteq \mathrm{ex}(K)$.

Θεώρημα (Krein - Milman)

Αν X χώρος Banach και $K \subseteq X^*$ μη κενό, ασθενώς- συμπαγές κυρτό,* (α) *Το K έχει ακραία σημεία.*

(β) *Η ασθενώς-* κλειστή κυρτή θήκη του $\mathrm{ex}(K)$ είναι όλο το K.*

[Ισχύει για οποιονδήποτε τοπικά κυρτό χώρο στη θέση του X^*.]

Λήμμα

Έστω $K \subseteq X^*$ μη κενό, ασθενώς- συμπαγές, $\xi \in X$ και $\mu := \sup\{\mathrm{Re}\, x(\xi) : x \in K\}$. Τότε το σύνολο*

$$F := \{y \in K : \mathrm{Re}\, y(\xi) = \mu\}$$

είναι συμπαγής έδρα του K.

Το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz

Θεώρημα (Riesz)

Έστω K (τοπικά) συμπαγής χώρος Hausdorff. Για κάθε θετική γραμμική μορφή $\phi : C_c(K) \to \mathbb{C}$ υπάρχει μοναδικό κανονικό (θετικό) μέτρο Borel μ στον K ώστε

$$\phi(g) = \int g d\mu \quad \text{για κάθε } g \in C_c(K).$$

Για μια απόδειξη δες π.χ. Κουμουλλή-Νεγρεπόντη, Θεώρημα 12.26 ή W. Rudin, Real & Complex Analysis, Theorem 2.14.

Το φασματικό θεώρημα

Κάθε φυσιολογικός τελεστής είναι unitarily ισοδύναμος με έναν πολλαπλασιαστικό τελεστή:

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathscr{B}(H)$ *φυσιολογικός τελεστής. Υπάρχει χώρος μέτρου* (X, μ), *συνάρτηση* $f \in L^\infty(X, \mu)$ *και ορθομοναδιαίος τελεστής (ισομετρία επί)* $U : L^2(X, \mu) \to H$ *ώστε* $A = UM_f U^{-1}$.

Λήμμα

Για κάθε μη μηδενικό $x \in H$ υπάρχει θετικό κανονικό πεπερασμένο μέτρο Borel μ_x στο $\sigma(A)$ και ισομετρία $U_x : L^2(\sigma(A), \mu_x) \to H$ ώστε $U_x M_f = f(A) U_x$ για κάθε $f \in C(\sigma(A))$ (και ειδικότερα $AU_x = U_x M_{f_1}$ όπου $f_1(\lambda) = \lambda$).

Απόδειξη Σταθεροποιούμε ένα μη μηδενικό $x \in H$ και θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση

$$\phi_x : C(\sigma(A)) \to \mathbb{C} : f \to \langle f(A)x, x \rangle.$$

Παρατηρούμε ότι η ϕ_x είναι *θετική* γραμμική μορφή, δηλαδή $\phi_x(f) \geq 0$ για κάθε $f \geq 0$. Από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz υπάρχει (μοναδικό) θετικό πεπερασμένο κανονικό μέτρο Borel μ_x στο $\sigma(A)$ ώστε

$$\int f d\mu_x = \phi_x(f) = \langle f(A)x, x \rangle \quad \text{για κάθε } f \in C(\sigma(A)).$$

Όμως $C(\sigma(A)) \subseteq L^2(\sigma(A), \mu_x)$. Ορίζουμε

$$U_{ox} : (C(\sigma(A)), \|.\|_2) \to (H, \|.\|_H) : f \to f(A)x$$

Ισχυρίζομαι ότι είναι ισομετρία. Πράγματι, για κάθε $f \in C(\sigma(A))$,

$$\begin{aligned}\|f(A)x\|_H^2 &= \langle f(A)x, f(A)x\rangle = \langle f(A)^* f(A)x, x\rangle = \langle (\bar{f}f)(A)x, x\rangle \\ &= \int \bar{f} f d\mu_x = \|f\|_2^2\end{aligned}$$

Άρα επεκτείνεται σε μια ισομετρία

$$U_x : L^2(\sigma(A), \mu_x) \to H$$

που ικανοποιεί $U_x(f) = f(A)x$ όταν η f είναι συνεχής.

Τέλος, για κάθε $g \in C(\sigma(A))$ έχουμε

$$(U_x M_f)(g) = U_x(fg) = (fg)(A)x = f(A)(g(A)x) = (f(A)U_x)(g).$$

άρα $U_x M_f = f(A)U_x$. □

Το φασματικό θεώρημα: απόδειξη όταν $A = A^*$

Το σύνολο τιμών $\mathrm{im}(U_x)$ της ισομετρίας U_x του Λήμματος είναι ακριβώς ο κυκλικός υπόχωρος

$$H_x = \overline{[A^n x : n = 0, 1, \ldots]} = \overline{[x, Ax, A^2 x, \ldots]}$$

του x για τον A.

Ορισμός

Ένα διάνυσμα $x \in H$ λέγεται κυκλικό (cyclic) για τον τελεστή $A = A^* \in \mathscr{B}(H)$ αν ο κυκλικός υπόχωρος (cyclic subspace) που ορίζει είναι όλος ο H, ισοδύναμα αν ο γραμμικός χώρος $[A^n x : n = 0, 1, \ldots]$ είναι πυκνός στον H.

Πρόταση

Αν ένας αυτοσυζυγής τελεστής $A \in \mathscr{B}(H)$ έχει κυκλικό διάνυσμα, υπάρχει πεπερασμένο θετικό κανονικό μέτρο Borel μ στο $\sigma(A)$ ώστε ο A να είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με τον τελεστή M_{f_1} του πολλαπλασιασμού επί την ανεξάρτητη μεταβλητή, $(M_{f_1}(g))(t) = tg(t)$, στον $L^2(\sigma(A), \mu)$.

Το φασματικό θεώρημα: απόδειξη όταν $A = A^*$

Παράδειγμα

Έστω $H = L^2([0,1]) \oplus L^2([0,1])$ [8] *και έστω* $A = M_{f_1} \oplus M_{f_1}$ *όπου* $f_1(\lambda) = \lambda$ $(\lambda \in [0,1])$. *Τότε ο* A *είναι αυτοσυζυγής τελεστής χωρίς κυκλικό διάνυσμα.*

Λήμμα

Αν $A \in \mathscr{B}(H)$ *είναι αυτοσυζυγής, υπάρχει μια οικογένεια* $\{H_i : i \in I\}$ *από κάθετους ανά δύο υποχώρους του* H*, ώστε*

(ι) *κάθε* H_i *να είναι* A*-αναλλοίωτος, δηλ.* $A(H_i) \subseteq H_i$

(ιι) *κάθε* H_i *να είναι* A*-κυκλικός, δηλ. να περιέχει ένα* A*-κυκλικό διάνυσμα*

(ιιι) *το ευθύ άθροισμα* $\oplus_i H_i$ *(δηλαδή ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του* H *που περιέχει κάθε* H_i*) να είναι όλος ο* H*.*

---

[8] με το εσωτερικό γινόμενο $\langle f_1 \oplus g_1, f_2 \oplus g_2 \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle + \langle g_1, g_2 \rangle$

Το φασματικό θεώρημα: απόδειξη όταν $A = A^*$

$$X_i = \sigma(A), \quad f_i(\lambda) = \lambda \, (\lambda \in X_i)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H} = \oplus \mathscr{H}_i \arrow[rr, "A"] & & \mathscr{H} = \oplus \mathscr{H}_i \\
\oplus L^2(X_i, \mu_i) \arrow[u, "\oplus U_i"] \arrow[rr, "\oplus M_{f_i}"] & & \oplus L^2(X_i, \mu_i) \arrow[u, "\oplus U_i"']
\end{tikzcd}$$

$AU_i = M_{f_i} U_i \ \forall i \in I \ \Rightarrow \ AU = (\oplus M_{f_i}) U$ όπου $U = \oplus U_i$.

Το φασματικό θεώρημα: απόδειξη όταν $A = A^*$

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{H} = \bigoplus \mathscr{H}_i \arrow[r, "A"] & \mathscr{H} = \bigoplus \mathscr{H}_i \\
\bigoplus L^2(X_i, \mu_i) \arrow[u, "\bigoplus U_i"] \arrow[r, "\bigoplus M_{f_i}"] & \bigoplus L^2(X_i, \mu_i) \arrow[u, "\bigoplus U_i"'] \\
L^2(X, \mu) \arrow[u, "V"] \arrow[r, "M_f"] & L^2(X, \mu) \arrow[u, "V"']
\end{tikzcd}
$$

Λεπτομέρειες στο
`http://users.uoa.gr/~akatavol/telmasu.pdf`, §8.

Το φασματικό θεώρημα

Θεώρημα (Φασματικό Θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές)

Έστω $A \in \mathscr{B}(H)$ αυτοσυζυγής τελεστής. Υπάρχει χώρος μέτρου (X, μ), συνάρτηση $f \in L^\infty(X, \mu)$ και ορθομοναδιαίος τελεστής $U : L^2(X, \mu) \to H$ ώστε $A = UM_f U^{-1}$.

Μάλιστα όταν ο χώρος H είναι διαχωρίσιμος, μπορεί να επιλέξει κανείς $X = \mathbb{R}$ και μ ένα σ-πεπερασμένο μέτρο Borel.

Συναρτήσεις Borel φυσιολογικού τελεστή

Έστω $A \in \mathscr{B}(H)$ φυσιολογικός τελεστής, $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|A\|\}$. Για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση $g : D \to \mathbb{C}$ ορίζεται ένας φυσιολογικός τελεστής $g(A) \in \mathscr{B}(H)$. Η απεικόνιση $g \to g(A)$ διατηρεί άθροισμα και γινόμενο, επεκτείνει τον συναρτησιακό λογισμό για πολυώνυμα, και ικανοποιεί

$$\|g(A)\| \leq \sup\{|g(z)| : z \in D\}.$$

Υπενθύμιση: Η Αναπαράσταση GNS

Συμβολίζουμε $\mathscr{S}(\mathscr{A})$ το σύνολο των καταστάσεων μιας C* άλγεβρας $\mathscr{A}$.

Θεώρημα (Gelfand, Naimark, Segal)

Για κάθε κατάσταση ϕ σε μια C^* άλγεβρα $\mathscr{A}$ υπάρχει μια τριάδα $(\pi_\phi, H_\phi, \xi_\phi)$ όπου π_ϕ είναι αναπαράσταση της $\mathscr{A}$ στον χώρο Hilbert H_ϕ και $\xi_\phi \in H_\phi$ ένα κυκλικό [9] μοναδιαίο διάνυσμα ώστε

$$\phi(a) = \langle \pi_\phi(a)\xi_\phi, \xi_\phi \rangle \quad \text{για κάθε } a \in \mathscr{A}.$$

[9] δηλ. τέτοιο ώστε το $\pi_\phi(\mathscr{A})\xi_\phi$ να είναι πυκνό στον H_ϕ.

Καθαρές καταστάσεις και ανάγωγες αναπαραστάσεις

Μια αναπαράσταση (π, H) μιας C* άλγεβρας $\mathscr{A}$ λέγεται (τοπολογικά) ανάγωγη (irreducible) αν οι μόνοι κλειστοί αναλλοίωτοι υπόχωροι της $\pi(\mathscr{A})$ είναι οι τετριμμένοι: $\{0\}$ και H.

Θεώρημα

Έστω $\mathscr{A}$ μια C άλγεβρα με μονάδα και $\phi \in \mathscr{S}(\mathscr{A})$.*
Η αναπαράσταση GNS π_ϕ είναι ανάγωγη αν και μόνον αν η ϕ είναι καθαρή κατάσταση, δηλαδή ακραίο σημείο του κυρτού συνόλου $\mathscr{S}(\mathscr{A})$ των καταστάσεων της $\mathscr{A}$.

Ανάγωγες αναπαραστάσεις

Πρόταση (Λήμμα Schur)

Μια αναπαράσταση (π, H) μιας C^* άλγεβρας $\mathscr{A}$ είναι ανάγωγη αν και μόνον αν οι μόνοι τελεστές που μετατίθενται με την $\pi(\mathscr{A})$ είναι οι τετριμμένοι: τα πολλαπλάσια του ταυτοτικού τελεστή.

Πίνακες σε μια C* άλγεβρα

Αν $\mathscr{A}$ είναι μια C* άλγεβρα με μονάδα και $n \in \mathbb{N}$, ο χώρος $M_n(\mathscr{A})$ των $n \times n$ πινάκων $[a_{ij}]$ με στοιχεία $a_{ij} \in \mathscr{A}$ γίνεται *-άλγεβρα με τις προφανείς πράξεις: γραμμικές πράξεις κατά συντεταγμένη, γινόμενο $[a_{ij}] \cdot [b_{ij}] = [c_{ij}]$ όπου $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \in \mathscr{A}$ και ενέλιξη $[a_{ij}]^* = [d_{ij}]$ όπου $d_{ij} = a_{ji}^* \in \mathscr{A}$.
Πώς όμως να ορίσω νόρμα στην $M_n(\mathscr{A})$, ώστε να γίνει C* άλγεβρα;
Εμφυτεύοντας την $\mathscr{A}$ ως C* άλγεβρα (δηλ. *-ισομορφικά και ισομετρικά) στην C* άλγεβρα $\mathscr{B}(H)$ των τελεστών σε κατάλληλο χώρο Hilbert H (μέσω της καθολικής ή όποιας άλλης πιστής αναπαράστασης), βλέπουμε ότι αρκεί να δείξουμε ότι η *-άλγεβρα $M_n(\mathscr{B}(H))$ δέχεται νόρμα ως προς την οποία είναι C* άλγεβρα.

Πίνακες τελεστών

Έστω H χώρος Hilbert, $n \in \mathbb{N}$ και $H^n = H \oplus H \oplus \cdots \oplus H$. Για κάθε $n \times n$ πίνακα $[a_{ij}] \in M_n(\mathscr{B}(H))$ ορίζουμε $A : H^n \to H^n$ από τη σχέση

$$A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = [a_{ij}] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{1j}\xi_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{m} a_{nj}\xi_j \end{bmatrix}.$$

Εύκολα φαίνεται ότι $A \in \mathscr{B}(H^n)$.

(Δες και το αρχείο `mat.pdf`.)

Πίνακες τελεστών

Αντίστροφα, αν δοθεί $A \in \mathscr{B}(H^n)$ ορίζουμε έναν $n \times n$ πίνακα $[a_{ij}] \in M_n(\mathscr{B}(H))$ ως εξής:
Θεωρούμε την απεικόνιση $H \times H \to \mathbb{C}$ που ορίζεται από την

$$\langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle := \langle A(\xi \otimes e_i), (\eta \otimes e_j) \rangle_{H^n}, \quad \xi, \eta \in H$$

και παρατηρούμε ότι είναι sesquilinear μορφή στον $H \times H$, και φράσσεται από την $\|A\|$. Επομένως υπάρχει μοναδικός τελεστής $a_{ij} \in \mathscr{B}(H)$ που ικανοποιεί τη σχέση:

$$\langle a_{ij}\xi, \eta \rangle_H = \langle\langle \xi, \eta \rangle\rangle = \langle A(\xi \otimes e_i), (\eta \otimes e_j) \rangle, \quad \xi, \eta \in H.$$

Η απεικόνιση $\quad \Phi : M_n(\mathscr{B}(H)) \to \mathscr{B}(H^n) : [a_{ij}] \to A$ που ορίσαμε είναι ισομορφισμός *-αλγεβρών. Επομένως, αν μεταφέρουμε τη νόρμα από την C* άλγεβρα $\mathscr{B}(H^n)$ στην $M_n(\mathscr{B}(H))$ ορίζοντας

$$\|[a_{ij}]\| := \left\|\Phi^{-1}([a_{ij}])\right\|_{\mathscr{B}(H^n)},$$

η $M_n(\mathscr{B}(H))$ γίνεται C* άλγεβρα.

Πλήρως θετικές απεικονίσεις

Αν $n \in \mathbb{N}$, κάθε $A \in \mathscr{B}(H^n)$ ορίζει $n \times n$ πίνακα $[a_{ij}]$ με $a_{ij} \in \mathscr{B}(H)$ από τη σχέση

$$A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \quad (\xi_i \in H)$$

Η απεικόνιση $A \to [a_{ij}] : \mathscr{B}(H^n) \to M_n(\mathscr{B}(H))$ είναι *-ισομορφισμός.
Συνεπώς η $M_n(\mathscr{B}(H))$ γίνεται C*-άλγεβρα με τη νόρμα της $\mathscr{B}(H^n)$. Έτσι, αν $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}(H)$ είναι άλγεβρα τελεστών, η $M_n(\mathscr{A})$ γίνεται άλγεβρα τελεστών.

Έστω $\Phi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ γραμμική απεικόνιση μεταξύ αλγεβρών (ή απλώς χώρων) τελεστών. Ορίζουμε

$$\Phi_n : M_n(\mathscr{A}) \to M_n(\mathscr{B}) \text{ όπου } \Phi_n([a_{ij}]) = [\Phi(a_{ij})].$$

Αν οι $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ είναι C*-άλγεβρες και η Φ διατηρεί την ενέλιξη, το ίδιο ισχύει για την Φ_n.
Αν η Φ είναι *-μορφισμός, το ίδιο ισχύει για την Φ_n.

Πλήρως θετικές απεικονίσεις

$$\Phi_n : M_n(\mathscr{A}) \to M_n(\mathscr{B}) \text{ όπου } \Phi_n([a_{ij}]) = [\Phi(a_{ij})].$$

Υπενθύμιση

Μια απεικόνιση $\Phi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ μεταξύ C* αλγεβρών είναι θετική ανν

$$a \geq 0 \;\Rightarrow\; \Phi(a) \geq 0.$$

ΔΕΝ έπεται πάντα ότι η Φ_n είναι θετική. Παράδειγμα Αν $\Phi(a) = a^\dagger$ (ανάστροφος) στην $\mathscr{A} = M_2$: προφανώς θετική. Όμως

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ θετικός, αλλά } \Phi_2(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ όχι θετικός.}$$

Ορισμός

Μια απεικόνιση $\Phi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ μεταξύ C^* αλγεβρών λέγεται πλήρως θετική αν η Φ_n είναι θετική για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Θεώρημα διαστολής του Stinespring

Παραδείγματα πλήρως θετικών (cp) απεικονίσεων:
Κάθε *-μορφισμός π είναι θετικός ($\pi(a^*a) = \pi(a)^*\pi(a) \geq 0 \ \forall a$).
Άρα κάθε *-μορφισμός είναι πλήρως θετικός (γιατί ο π_n είναι *-μορφισμός).
Κάθε απεικόνιση $a \to V^*aV$ είναι πλήρως θετική
(εδώ $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}(H)$ και $V \in \mathscr{B}(H)$). Σύνθεση:
Επομένως κάθε $a \to V^*\pi(a)V$ είναι πλήρως θετική.
Δεν υπάρχουν άλλες:

Θεώρημα (Stinespring)

*Για κάθε μοναδιαία πλήρως θετική απεικόνιση $\Phi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(H)$ από μια C^*-άλγεβρα $\mathscr{A}$ με μονάδα στον $\mathscr{B}(H)$ υπάρχει (π, H_ϕ, V) όπου π είναι *-αναπαράσταση της $\mathscr{A}$ στον χώρο Hilbert H_ϕ και $V : H \to H_\phi$ είναι ισομετρία, ώστε*

$$\Phi(a) = V^*\pi(a)V \quad \text{για κάθε } a \in \mathscr{A}.$$

Η *-αναπαράσταση π λέγεται διαστολή της Φ μέσω της «εμφύτευσης» $V : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$.

Υπενθύμιση: Η Αναπαράσταση GNS

Συμβολίζουμε $\mathscr{S}(\mathscr{A})$ το σύνολο των καταστάσεων μιας C* άλγεβρας $\mathscr{A}$.

Θεώρημα (Gelfand, Naimark, Segal)

Για κάθε κατάσταση ϕ σε μια C^* άλγεβρα $\mathscr{A}$ υπάρχει μια τριάδα $(\pi_\phi, H_\phi, \xi_\phi)$ όπου π_ϕ είναι αναπαράστση της $\mathscr{A}$ στον χώρο Hilbert H_ϕ και $\xi_\phi \in H_\phi$ ένα κυκλικό [10] μοναδιαίο διάνυσμα ώστε

$$\phi(a) = \left\langle \pi_\phi(a)\xi_\phi, \xi_\phi \right\rangle \quad \text{για κάθε } \; a \in \mathscr{A}.$$

Όπως θα δούμε, η τριάδα GNS $(\pi_\phi, \mathscr{H}_\phi, \xi_\phi)$ καθορίζεται μοναδικά, modulo unitary ισοδυναμία, από την ισότητα αυτή.

[10] δηλ. τέτοιο ώστε το $\pi_\phi(\mathscr{A})\xi_\phi$ να είναι πυκνό στον H_ϕ.

Βήματα απόδειξης GNS

1. Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο $\mathscr{A}$.
2. Εφοδιάζεται με το ημι-εσωτερικό γινόμενο $\langle a, b \rangle_0 := \phi(b^* a)$.
   Όταν $\mathscr{A} = C(X)$ έχουμε $\langle a, b \rangle_0 = \int_X a(t)\overline{b(t)}d\mu(t)$.
3. Αφού ϕ θετική, $\langle a, a \rangle_0 = \phi(a^* a) \geq 0$.
   Λόγω Cauchy-Schwarz το σύνολο
   $\mathscr{N}_\phi = \mathscr{N} := \{u \in \mathscr{A} : \langle u, u \rangle_0 = 0\}$ είναι γραμμικός χώρος.
4. Θέτουμε $H_{0\phi} := \mathscr{A}/\mathscr{N}$ και ονομάζουμε H_ϕ $(= L^2(\mu))$ την πλήρωση του $H_{0\phi}$ ως προς την $\|[a]\|_\phi := \sqrt{\langle a, a \rangle_0}$.
   (γράφω $[a] = a + \mathscr{N}$, $a \in \mathscr{A}$).

Βήματα απόδειξης GNS II

5. Η $\mathscr{A}$ δρα στον γραμ. χώρο $\mathscr{A}$ έτσι: $\pi_0(a)(b) = ab$.

6. Επειδή $\pi_0(a)(\mathscr{N}) \subseteq \mathscr{N}$ ο τελεστής $\pi_0(a)$ επάγει $\pi_1(a)$ στον $H_{0\phi} = \mathscr{A}/\mathscr{N}$.

7. Δείχνουμε ότι $\|\pi_1(a)([b])\|_\phi \leq \|a\| \, \|[b]\|_\phi$.
   [Όταν $\mathscr{A} = C(X)$, $\|ab\|_2 \leq \|a\|_\infty \|b\|_2$.]
   Έπεται ότι ο $\pi_1(a)$ επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $\pi_\phi(a)$ στον H_ϕ.

   Εύκολο: η $\pi_\phi : a \to \pi_\phi(a) : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(H_\phi)$ είναι *-αναπαράσταση. [Όταν $\mathscr{A} = C(X)$, τότε $\pi_\phi(a) = M_a$ δηλ. $(\pi_\phi(a)b)(t) = a(t)b(t)$ μ-σχεδόν για κάθε $t \in X$.]

8. Θέτουμε $\xi_\phi = [\mathbf{1}_{\mathscr{A}}]$. Τότε

$$\begin{aligned}\left\langle \pi_\phi(a)\xi_\phi, \xi_\phi \right\rangle_{H_\phi} &= \left\langle \pi_\phi(a)[\mathbf{1}], [\mathbf{1}] \right\rangle_{H_\phi} \\ &= \langle a, \mathbf{1} \rangle_{H_\phi} = \phi(\mathbf{1}^* a) = \phi(a). \qquad \square\end{aligned}$$

Stinespring: Operator-valued GNS

Θεώρημα (Stinespring)

Για κάθε μοναδιαία πλήρως θετική απεικόνιση $\Phi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(H)$ *από μια* C^**-άλγεβρα* $\mathscr{A}$ *με μονάδα στον* $\mathscr{B}(H)$ *υπάρχει* (π, H_ϕ, V) *όπου* π *είναι *-αναπαράσταση της* $\mathscr{A}$ *στον χώρο Hilbert* H_ϕ *και* $V : H \to H_\phi$ *είναι ισομετρία, ώστε*

$$\Phi(a) = V^* \pi(a) V \quad \text{για κάθε } a \in \mathscr{A}.$$

Βήματα απόδειξης Stinespring

1. Αντί για τον γραμμικό χώρο $\mathscr{A}$, θεωρούμε τον
$$\mathscr{A}\otimes c_{00}(\mathbb{N}) = c_{00}(\mathbb{N},\mathscr{A}) = \{\vec{a}:\mathbb{N}\to\mathscr{A} : \operatorname{supp}\vec{a}\ \text{πεπερ.}\}$$
$$= \operatorname{span}\{a\otimes e_n : a\in\mathscr{A}, n\in\mathbb{N}\} := \widetilde{\mathscr{A}}$$
Όταν $\mathscr{H}=\mathbb{C}$ έχουμε $\mathscr{A}\otimes\mathbb{C}\simeq\mathscr{A}$.
2. Αν $\{\xi_n : n\in\mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση του H ορίζουμε $\langle a\otimes e_n, b\otimes e_m\rangle_0 := \langle\Phi(b^*a)\xi_n,\xi_m\rangle_H$ και επεκτείνουμε γραμμικά. Δηλαδή
$$\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle_0 := \sum_{n,m}\langle\Phi(b(m)^*a(n))\xi_n,\xi_m\rangle_H\,.$$
Όταν $\mathscr{H}=\mathbb{C}$ έχουμε $\langle a,b\rangle_0=\phi(b^*a)$.
3. Χρησιμοποιώντας ότι η Φ είναι πλήρως θετική δείχνουμε ότι
$$\left\langle\sum_{n=1}^N a(n)\otimes e_n, \sum_{m=1}^N a(m)\otimes e_m\right\rangle_0 \geq 0.$$
Από Cauchy-Schwarz το σύνολο $\mathscr{N}_\phi=\mathscr{N} := \{\vec{u}\in\widetilde{\mathscr{A}} : \langle\vec{u},\vec{u}\rangle_0=0\}$ είναι γραμμικός χώρος.

Βήματα απόδειξης Stinespring II

4. Θέτουμε $H_{0\phi} := \widetilde{\mathscr{A}}/\mathscr{N}$ και ονομάζουμε H_ϕ την πλήρωση του $H_{0\phi}$ ως προς τη νόρμα $\|[\vec{a}]\|_\phi := \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_0}$ (γράφω $[\vec{a}] = \vec{a} + \mathscr{N}, \vec{a} \in \widetilde{\mathscr{A}}$).
5. Η $\mathscr{A}$ δρα στον $\widetilde{\mathscr{A}} = \mathscr{A} \otimes c_{00}(\mathbb{N})$ ως εξής:

$$\pi_0(a)(b \otimes e_j) := ab \otimes e_j \quad (a, b \in \mathscr{A}, j \in \mathbb{N})$$

$$\text{ισοδύναμα } (\pi_0(a)\vec{b})(j) := a \cdot \vec{b}(j) \quad (a \in \mathscr{A}, \vec{b} \in \widetilde{\mathscr{A}}, j \in \mathbb{N}).$$

6. Επειδή $\pi_0(a)(\mathscr{N}) \subseteq \mathscr{N}$ για κάθε $a \in \mathscr{A}$, ο τελεστής $\pi_0(a)$ επάγει καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση $\pi_1(a)$ στον $H_{0\phi} = \widetilde{\mathscr{A}}/\mathscr{N}$:

$$\pi_1(a)[b \otimes e_j] = [ab \otimes e_j].$$

Βήματα απόδειξης Stinespring III

7. Δείχνουμε ότι $\left\|\pi_1(a)([\vec{b}])\right\|_\phi \leq \|a\| \left\|[\vec{b}]\right\|_\phi$.
   [Όταν $\mathscr{A} = C(X)$, $\|ab\|_2 \leq \|a\|_\infty \|b\|_2$.]
   Έπεται ότι ο $\pi_1(a)$ επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $\pi_\phi(a)$ στον H_ϕ.
   Δείχνουμε ότι η $\pi_\phi : a \to \pi_\phi(a) : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(H_\phi)$ είναι *-αναπαράσταση.
8. Αν $H_0 = \mathrm{span}\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq H$ ορίζουμε

$$V : H_0 \to H_{0\phi} \to H_\phi : \xi_n \to \mathbf{1}_{\mathscr{A}} \otimes e_n \to [\mathbf{1}_{\mathscr{A}} \otimes e_n]$$

   και επεκτείνουμε γραμμικά. Η V είναι ισομετρία, άρα επεκτείνεται σε ισομετρία $V : H \to H_\phi$.
   Τέλος, για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\langle (V^*\pi(a)V)\xi_n, \xi_m\rangle_H &= \langle \pi(a)V\xi_n, V\xi_m\rangle_{H_\phi} = \langle \pi(a)[\mathbf{1} \otimes e_n], [\mathbf{1} \otimes e_m]\rangle_{H_\phi} \\ &= \langle [a \otimes e_n], [\mathbf{1} \otimes e_m]\rangle_{H_\phi} = \langle \Phi(\mathbf{1}^*a)\xi_n, \xi_m\rangle_H .\end{aligned}$$

   Έπεται ότι

$$V^*\pi(a)V = \Phi(a). \qquad \square$$

Choi - Kraus Decomposition

Πρόταση

Έστω $\mathscr{A} = M_n(\mathbb{C})$ και $\Phi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}(H)$ όπου $H = \mathbb{C}^k$ μία n-θετική απεικόνιση. Τότε υπάρχουν $V_j : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^n$ ώστε

$$\Phi(A) = \sum_{j=1}^{nk} V_j^* A V_j \quad \forall A \in \mathscr{A} .$$

Η παράσταση αυτή λέγεται διάσπαση Kraus της Φ και το ελάχιστο πλήθος των V_j ονομάζεται τάξη Kraus της Φ.

Παρατήρηση Οπότε η Φ είναι αυτομάτως πλήρως θετική.

Choi - Kraus Decomposition: Απόδειξη

Ονομάζουμε $E_{rs} \in M_n(\mathbb{C})$ τον πίνακα με 1 στην θέση (r,s) και 0 αλλού. Δηλαδή

$$E_{rs}(x) = \langle x, e_s \rangle \, e_r := e_r e_s^*(x) \;\; (x \in \mathbb{C}^n).$$

Η $\{E_{rs} : 1 \leq r, s \leq n\}$ είναι βάση του γραμμ. χώρου $\mathscr{A} = M_n$.

Παρατήρηση Αν $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}^k$, έστω V^* ο $k \times n$ πίνακας που έχει στήλες τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$, οπότε

$$V^* : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k : e_r \to x_r, \; r = 1, \ldots, n.$$

Τότε

$$\begin{array}{rccccccc} V^* E_{rs} V : & \mathbb{C}^k & \to & \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C}^k \\ & y & \to & Vy & \to & \langle Vy, e_s \rangle \, e_r & \to & \langle Vy, e_s \rangle \, V^* e_r \end{array}$$

Δηλαδή $(V^* E_{rs} V)(y) = \langle Vy, e_s \rangle \, V^* e_r = \langle y, V^* e_s \rangle \, V^* e_r = \langle y, x_s \rangle \, x_r = (x_r x_s^*)(y)$.

Choi - Kraus Decomposition: Απόδειξη

Αν ονομάσουμε v το διάνυσμα στήλη $v = (x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n)^\dagger \in \mathbb{C}^{nk}$, τότε ο τελεστής $vv^* : \mathbb{C}^{nk} \to \mathbb{C}^{nk}$ που ανήκει στον $\mathscr{B}(\mathbb{C}^{nk}) = M_{nk} = M_n(M_k)$ έχει πίνακα $vv^* = [x_r x_s^*]_{r,s}$. Δηλαδή $[V^* E_{rs} V] = [x_r x_s^*]_{r,s}$.

Απόδειξη της διάσπασης Kraus. Αρκεί (λόγω γραμμικότητας) να το δείξουμε για $A = E_{rs}$, $1 \leq r, s \leq n$.

Παρατηρώ ότι ο $[E_{rs}] = \begin{bmatrix} E_{11} & \dots & E_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ E_{n1} & \dots & E_{nn} \end{bmatrix}$ είναι θετικός στην $M_n(\mathscr{A}) = M_n(M_n)$.Επομένως αφού η Φ είναι n-θετική, ο $[\Phi(E_{rs})] = \begin{bmatrix} \Phi(E_{11}) & \dots & \Phi(E_{1n}) \\ \vdots & & \vdots \\ \Phi(E_{n1}) & \dots & \Phi(E_{nn}) \end{bmatrix}$ είναι θετικός στην $M_n(\mathscr{B}(H)) = M_n(M_k)$.

Choi - Kraus Decomposition: Απόδειξη

Δηλαδή ο $B := [\Phi(E_{rs})]$ είναι θετικός στην $M_n(M_k) = M_{nk} = \mathscr{B}(\mathbb{C}^{nk})$. Από το Φασματικό Θεώρημα υπάρχει ΟΚ βάση $\{f_j : j = 1, \dots, nk\}$ του $\mathbb{C}^{nk}$ από ιδιοδιανύσματα του B με ιδιοτιμές $\lambda_j \geq 0$.Δηλαδή

$$B = \sum_{j=1}^{nk} \lambda_j f_j f_j^* = \sum_{j=1}^{nk} v_j v_j^* \quad \text{όπου} \quad v_j = \sqrt{\lambda_j} f_j \,.$$

Από την Παρατήρηση, γράφοντας κάθε $v_j \in \mathbb{C}^{nk}$ ως διάνυσμα στήλη $v_j = (x_1^j \oplus x_2^j \oplus \cdots \oplus x_n^j)^\dagger$ με $x_r^j \in \mathbb{C}^k$, έχουμε

$$v_j v_j^* = [x_r^j x_s^{j*}] = [V_j^* E_{rs} V_j]$$

και συνεπώς

$$[\Phi(E_{rs})] = B = \sum_{j=1}^{nk} [V_j^* E_{rs} V_j] \quad \text{άρα}$$

$$\Phi(E_{rs}) = \sum_{j=1}^{nk} V_j^* E_{rs} V_j \quad 1 \leq r, s \leq n$$

όπως θέλαμε. □