Θεωρία Τελεστών

Αριστείδης Κατάβολος*

Ιούνιος 2003

*διορθώσεις: Αύγουστος 2006

Περιεχόμενα

1 Χώροι με νόρμα, χώροι Hilbert

Στις σημειώσεις αυτές, όλοι οι γραμμικοί χώροι θα είναι *μιγαδικοί*, εκτός αν αναφέρεται ρητά κάτι διαφορετικό.

1.1 Χώροι με νόρμα και τελεστές

Ορισμός 1.1 *Έστω $\mathcal{X}$* μιγαδικός *γραμμικός χώρος. Μία* **νόρμα** *στον $\mathcal{X}$ είναι μια απεικόνιση*

$$\|\cdot\| : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^+ \ : \ x \mapsto \|x\|$$

που ικανοποιεί

$$\begin{array}{ll} (1) & \|x+y\| \le \|x\| + \|y\| \qquad (x, y \in \mathcal{X}) \\ (2) & \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \qquad (x \in \mathcal{X}, \lambda \in \mathbb{C}) \\ (3) & \|x\| = 0 \iff x = 0 \end{array}$$

Ένας χώρος με νόρμα $(\mathcal{X}, \|.\|)$ λέγεται **χώρος Banach** *αν είναι πλήρης ως προς την μετρική $d(x, y) = \|x - y\|$ που ορίζει η νόρμα.*

Θεώρημα 1.1 *Αν $(\mathcal{X}, \|.\|_X)$ και $(\mathcal{Y}, \|.\|_Y)$ είναι χώροι με νόρμα και $T : (\mathcal{X}, \|.\|_X) \to (\mathcal{Y}, \|.\|_Y)$ είναι* γραμμική *απεικόνιση, τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η T είναι συνεχής.*

(β) *Η T είναι συνεχής στο $0 \in \mathcal{X}$.*

(γ) *Η T είναι συνεχής σε* κάποιο σημείο *$x_o \in \mathcal{X}$.*

(δ) *Υπάρχει $M < \infty$ ώστε $\|Tx\|_Y \le M\|x\|_X$* για κάθε *$x \in \mathcal{X}$.*

(ε) *Ο περιορισμός της T στην μοναδιαία σφαίρα του $\mathcal{X}$ είναι φραγμένη συνάρτηση, δηλαδή το σύνολο $\{\|Tx\|_Y : \|x\|_X \le 1\}$ είναι φραγμένο.*

(στ) *Η T είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Παρατήρηση 1.2 *Αν $T : (\mathcal{X}, \|.\|_X) \to (\mathcal{Y}, \|.\|_Y)$ είναι γραμμική και $T \neq 0$, τότε το σύνολο $\{\|Tx\|_Y : x \in \mathcal{X}\}$ δεν είναι ποτέ φραγμένο.*

Ορισμός 1.2 *Μία* γραμμική *απεικόνιση $T : (\mathcal{X}, \|.\|_X) \to (\mathcal{Y}, \|.\|_Y)$ λέγεται* **φραγμένη** *ή* **φραγμένος τελεστής** *αν ο περιορισμός της T στην μοναδιαία σφαίρα του $\mathcal{X}$ είναι φραγμένη συνάρτηση.*

Ο αριθμός
$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_Y : \|x\|_X \leq 1\}$$
ονομάζεται **νόρμα του** T.

Πρόταση 1.3 *Έστω* $T : (\mathcal{X}, \|.\|_X) \to (\mathcal{Y}, \|.\|_Y)$ *φραγμένος τελεστής. Τότε*
$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tx\| : x \in \mathcal{X},\ \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in \mathcal{X},\ x \neq 0\} \\ &= \inf\{M > 0 : \|Tx\| \leq M\|x\| \text{ για κάθε } x \in \mathcal{X}\} \end{aligned}$$
και ισχύει $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ *για κάθε* $x \in \mathcal{X}$.

Πρόταση 1.4 *Έστω* $(\mathcal{X}, \|.\|)$ *χώρος με νόρμα,* $D \subseteq \mathcal{X}$ *πυκνός υπόχωρος και* $(\mathcal{Y}, \|.\|)$ *χώρος Banach. Αν* $T : D \to \mathcal{Y}$ *είναι γραμμική απεικόνιση, τότε η* T *δέχεται συνεχή επέκταση* $\tilde{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *αν και μόνον αν η* T *είναι συνεχής. Η συνεχής επέκταση, αν υπάρχει, είναι μοναδική, και* $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Ορισμός 1.3 *Αν* $(\mathcal{X}, \|.\|_X), (\mathcal{Y}, \|.\|_Y)$ *είναι χώροι με νόρμα, το σύνολο των γραμμικών και φραγμένων απεικονίσεων* $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *συμβολίζεται* $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. *Γράφουμε* $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ *αντί για* $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$. *Ειδικότερα το σύνολο* $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ *συμβολίζεται* $\mathcal{X}^*$ *και ονομάζεται ο* **(τοπολογικός) δυϊκός** *του* $\mathcal{X}$.

Αν εφοδιάσουμε το σύνολο $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ με τις πράξεις κατά σημείο, δηλαδή αν ορίσουμε, για $T, S \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ και $\lambda \in \mathbb{C}$
$$(T + S)(x) = T(x) + S(x) \quad \text{και} \quad (\lambda T)(x) = \lambda T(x) \quad (x \in \mathcal{X})$$
τότε ο $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ γίνεται γραμμικός χώρος. Επίσης, η απεικόνιση
$$\|.\| : \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \to \mathbb{R}^+ : T \mapsto \|T\|$$
όπου $\|T\| = \sup\{\|Tx\|_Y : \|x\|_X \leq 1\}$ (πρβλ. τον ορισμό 1.2) είναι νόρμα στον $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Θεώρημα 1.5 (Hahn - Banach, αναλυτική μορφή) *Έστω* $(\mathcal{X}, \|.\|)$ *χώρος με νόρμα και* $\mathcal{Y}$ *γραμμικός υπόχωρος του* $\mathcal{X}$. *Αν* $y^* : \mathcal{Y} \to \mathbb{C}$ *είναι συνεχής γραμμική μορφή (δηλ.* $y^* \in \mathcal{Y}^*$*), τότε υπάρχει* $x^* : \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ *συνεχής γραμμική μορφή (δηλ.* $x^* \in \mathcal{X}^*$*) με* την ίδια νόρμα *(δηλ.* $\|x^*\| = \|y^*\|$*)* που επεκτείνει την y^* *(δηλ.* $x^*|_{\mathcal{Y}} = y^*$*).*

Θεώρημα 1.6 (Αρχή Ομοιομόρφου φράγματος) *Έστω $\mathcal{X}$ χώρος* **Banach**, *$\mathcal{Y}$ χώρος με νόρμα και $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ οικογένεια φραγμένων τελεστών. Αν η $\mathcal{T}$ είναι κατά σημείο φραγμένη, τότε είναι ομοιόμορφα φραγμένη.*

Θεώρημα 1.7 (Banach - Steinhaus) *Έστω $\mathcal{X}$ χώρος* **Banach**, *$\mathcal{Y}$ χώρος με νόρμα και $\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ακολουθία φραγμένων τελεστών. Αν για κάθε $x \in \mathcal{X}$ το όριο της ακολουθίας $(T_n(x))$ υπάρχει στον $\mathcal{Y}$, τότε υπάρχει* **φραγμένος** *γραμμικός τελεστής $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ ώστε $T(x) = \lim_n T_n(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{X}$.*

Παρατήρηση Έστω $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ χώροι με νόρμα, και $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *γραμμική* απεικόνιση. Αν η T είναι **ανοικτή**, τότε είναι επί του $\mathcal{Y}$.

Θεώρημα 1.8 (Ανοικτής Απεικόνισης) *Έστω $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ χώροι* **Banach** *και $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ γραμμική, συνεχής και επί. Τότε η T είναι ανοικτή.*

Θεώρημα 1.9 (Κλειστού Γραφήματος) *Έστω $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ χώροι* **Banach** *και $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ γραμμική. Αν το γράφημα $Gr(T) \equiv \{(x, Tx) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} : x \in \mathcal{X}\}$ είναι κλειστό στον χώρο $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, τότε η T είναι συνεχής.*

Ορισμός 1.4 (Τελεστές πρώτης τάξης) *Αν $(\mathcal{X}, \|.\|_X), (\mathcal{Y}, \|.\|_Y)$ είναι χώροι με νόρμα και $x^* \in \mathcal{X}^*$, $y \in \mathcal{Y}$ ο τελεστής $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ που ορίζεται από την σχέση $T(z) = x^*(z)y$, $(z \in \mathcal{X})$ είναι συνεχής και συμβολίζεται $T = y \otimes x^*$.*

Κάθε *φραγμένος* τελεστής πεπερασμένης τάξης (δηλαδή κάθε $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ με $\dim T(\mathcal{X}) < \infty$) είναι γραμμικός συνδυασμός τελεστών πρώτης τάξης.

Πρόταση 1.10 *Αν ο $\mathcal{Y}$ είναι χώρος Banach, τότε και ο $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ είναι χώρος Banach.*

Όταν $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, τότε ορίζεται η σύνθεση απεικονίσεων : $A \cdot B = A \circ B$, (όπου $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$). Ο τελεστής $A \cdot B$ είναι φραγμένος και μάλιστα ισχύει η ανισότητα $\|A \cdot B\| \leq \|A\|\|B\|$.

Ορισμός 1.5 *Άλγεβρα Banach λέγεται μια (προσεταιριστική, μιγαδική) άλγεβρα $\mathcal{A}$ που είναι χώρος Banach ως προς μια νόρμα $\|.\|$ που ικανοποιεί*

$$\|A.B\| \leq \|A\|\|B\| \quad \text{για κάθε } A, B \in \mathcal{A}.$$

Αν ο $\mathcal{X}$ είναι χώρος Banach, τότε ο χώρος $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ είναι άλγεβρα Banach με γινόμενο την σύνθεση απεικονίσεων.

Η άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ δεν είναι ποτέ μεταθετική, αν $\dim \mathcal{X} > 1$. Πράγματι, αν υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ στον $\mathcal{X}$, από το Θεώρημα Hahn-Banach μπορούμε να βρούμε $x_k^* \in \mathcal{X}^*$ ώστε[1] $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$. Τότε αν E_{ij} είναι ο τελεστής πρώτης τάξης $x_i \otimes x_j^*$, έχουμε $E_{11}E_{12} = E_{12}$ ενώ $E_{12}E_{11} = 0$.

Μάλιστα η $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ περιέχει (αλγεβρικά) την άλγεβρα $M_n(\mathbb{C})$ των $n \times n$ πινάκων. Πράγματι, ο τελεστής E_{ij} αντιστοιχεί στον $n \times n$ πίνακα που έχει μονάδα στην i, j θέση και 0 παντού αλλού. Ελέγχεται εύκολα ότι η απεικόνιση $(a_{ij}) \to \sum_{i,j} a_{ij}E_{ij}$ είναι 1-1 μορφισμός αλγεβρών $M_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{B}(\mathcal{X})$.

1.2 Χώροι Hilbert

Ορισμός 1.6 *Έστω $\mathcal{H}$ μιγαδικός γραμμικός χώρος. Ένα* **εσωτερικό γινόμενο** *στον $\mathcal{H}$ είναι μια απεικόνιση*

$$\langle .,. \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$$

με τις ιδιότητες

$$\begin{array}{ll} (i) & \langle x, x \rangle \geq 0 \\ (ii) & \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0 \\ (iii) & \overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle \\ (iv) & \langle x_1 + \lambda x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \lambda \langle x_2, y \rangle \end{array}$$

για κάθε $x, x_1, x_2, y \in \mathcal{H}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$. Τότε η απεικόνιση

$$\|.\| : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^+ \; : \; x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

είναι νόρμα στον $\mathcal{H}$.

Ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο λέγεται **χώρος Hilbert** *αν είναι πλήρης ως προς την νόρμα που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.*

Δύο στοιχεία $x, y \in \mathcal{H}$ σ'έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο λέγονται *κάθετα* αν $\langle x, y \rangle = 0$. Αν $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{H}$, το σύνολο

$$A^\perp = \{x \in \mathcal{H} : \langle x, y \rangle = 0 \text{ για κάθε } y \in A\}$$

[1] $\delta_{ij} = 1$ όταν $i = j$ και $\delta_{ij} = 0$ όταν $i \neq j$.

είναι πάντα κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}$.

Θεώρημα 1.11 *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και M κλειστός γνήσιος υπόχωρος του $\mathcal{H}$. Τότε $M^\perp \neq \{0\}$, και ισχύει*

$$M \oplus M^\perp = \mathcal{H}.$$

Επομένως κάθε $x \in \mathcal{H}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο

$$x = P_M(x) + P_{M^\perp}(x)$$

όπου $P_M(x) \in M$ και $P_{M^\perp}(x) \in M^\perp$, και ισχύει

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|P_{M^\perp}(x)\|^2$$

λόγω του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Επομένως $\|P_M(x)\|^2 \leq \|x\|^2$. Η απεικόνιση

$$P_M : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

λέγεται η **ορθή προβολή επί του** M. Είναι καλά ορισμένη, γραμμική και συνεχής. Μάλιστα $\|P_M\| = 1$ όταν $M \neq \{0\}$.

Ορισμός 1.7 *Μία οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{H}$ λέγεται* **ορθοκανονική** *αν $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Αν επιπλέον η κλειστή γραμμική θήκη $\overline{[e_i : i \in I]}$ είναι όλος ο χώρος $\mathcal{H}$, τότε η οικογένεια λέγεται* **ορθοκανονική βάση** *του $\mathcal{H}$ (μια ορθοκανονική βάση συνήθως δεν είναι βάση με την αλγεβρική έννοια).*

Θεώρημα 1.12 *Κάθε χώρος Hilbert έχει μία ορθοκανονική βάση, η οποία είναι αριθμήσιμη αν και μόνον αν ο χώρος είναι διαχωρίσιμος.*

Αν $\{e_i : i \in I\}$ είναι ορθοκανονική βάση του χώρου Hilbert $\mathcal{H}$, τότε κάθε $x \in \mathcal{H}$ γράφεται μοναδικά

$$x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i \quad \text{και ισχύει} \quad \|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$$

Το άθροισμα των σειρών αυτών είναι εξ'ορισμού το όριο του δικτύου των μερικών αθροισμάτων. Στην διαχωρίσιμη περίπτωση, λόγω της καθετότητας των όρων ο ορισμός αυτός ταυτίζεται με τον συνηθισμένο.

Επομένως η επιλογή μιας ορθοκανονικής βάσης $\{e_i : i \in I\}$ ορίζει μια γραμμική ισομετρική απεικόνιση

$$U : \mathcal{H} \to \ell^2(I) : x \to (\langle x, e_i \rangle)_{i\in I}$$

η οποία είναι επί του $\ell^2(I)$.

Θεώρημα 1.13 (Riesz) *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert. Για κάθε συνεχή γραμμική μορφή $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ υπάρχει μοναδικό $x \in \mathcal{H}$ ώστε $f(y) = \langle y, x \rangle$ για κάθε $y \in \mathcal{H}$, και $\|f\| = \|x\|$. Επομένως ο τοπολογικός δυϊκός ενός χώρου Hilbert $\mathcal{H}$ είναι αντιγραμμικά ισόμορφος με τον $\mathcal{H}$.*

2 Παραδείγματα

Παράδειγμα 2.1 (Διαγώνιοι τελεστές)

Έστω $a = (a_n) \in \ell^\infty$. Αν $x = (x_n) \in \ell^2$ θέτουμε $D_a(x) = (a_n x_n)$. Τότε ο D_a είναι καλά ορισμένος γραμμικός τελεστής από τον ℓ^2 στον εαυτό του και $\|D_a\| = \|a\|_\infty$.

Άσκηση 2.2 Έστω $a = (a_n)$ ακολουθία αριθμών. Δείξτε ότι $D_a(\ell^2) \subseteq (\ell^2)$ αν και μόνον αν $a \in \ell^\infty$.

Παράδειγμα 2.3 (Ο τελεστής της μετατόπισης (shift))

Έστω $x = (x_n) \in \ell^2$. Θέτουμε

$$S(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots) \quad \text{και} \quad T(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots).$$

Οι S και T είναι καλά ορισμένοι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές από τον ℓ^2 στον εαυτό του. Η νόρμα $\|T\|$ είναι 1 και ο S είναι ισομετρία. Ο S είναι 1-1, αλλά δεν είναι επί, και ο T είναι επί, αλλά δεν είναι 1-1. Η σύνθεση $T \circ S$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση I, αλλά $S \circ T \neq I$.

Κάθε φραγμένος τελεστής $A \in \mathcal{B}(\ell^2)$ ορίζει έναν $\infty \times \infty$ πίνακα (a_{ij}) με μιγαδικούς συντελεστές από την σχέση

$$a_{ij} = \langle Ae_j, e_i \rangle$$

όπου $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ η συνηθισμένη βάση. Αν $x = (x_n) \in \ell^2$, τότε $Ax = (y_n)$ όπου

$$y_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \,.$$

Για παράδειγμα, ο τελεστής D_a έχει πίνακα (d_{ij}) διαγώνιο: $d_{ij} = a_i \delta_{i,j}$, ενώ ο S έχει (γνήσια) κάτω τριγωνικό πίνακα: (s_{ij}) όπου $s_{ij} = \delta_{i,j+1}$.

Όμοια, κάθε τελεστής σ'έναν τυχαίο χώρο Hilbert ορίζει έναν πίνακα, μέσω της επιλογής μιας ορθοκανονικής βάσης του χώρου. Δεν είναι αλήθεια όμως ότι κάθε $\infty \times \infty$ πίνακας (a_{ij}) ορίζει φραγμένο τελεστή. Για παράδειγμα, ο πίνακας $a_{ij} = 1$ για κάθε i, j δεν ορίζει φραγμένο τελεστή.

Άσκηση 2.4 Δείξτε ότι ένας $\infty \times \infty$ πίνακας (a_{ij}) ορίζει φραγμένο τελεστή $\ell^2 \to \ell^2$ αν και μόνον αν απεικονίζει τον ℓ^2 στον εαυτό του, δηλαδή $(\sum_k a_{nk} x_k)_n \in \ell^2$ για κάθε $x = (x_n) \in \ell^2$.

Παράδειγμα 2.5 (Πολλαπλασιαστικοί τελεστές)

Έστω (X, μ) χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου. Ο χώρος $L^2(X, \mu)$ είναι ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμίας, modulo ισότητα μ-σχεδόν παντού, μετρησίμων συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{C}$ που είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες, δηλαδή ικανοποιούν $\int_X |f|^2 d\mu < \infty$. Ο $L^2(X, \mu)$ γίνεται χώρος Hilbert αν εφοδιασθεί με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \int_X f \bar{g} d\mu$$

(Θεώρημα Riesz-Fisher).

Μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ λέγεται *ουσιωδώς φραγμένη* αν υπάρχει $A \in \mathbb{R}^+$ ώστε $\mu(\{x \in X : |f(x)| > A\}) = 0$. Ο χώρος $L^\infty(X, \mu)$ είναι ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμίας, modulo ισότητα μ-σχεδόν παντού, μετρησίμων συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{C}$ που είναι ουσιωδώς φραγμένες. Αν ορίσουμε

$$\|f\|_\infty = \inf\{A : A \text{ ουσιώδες φράγμα της } f\}$$

τότε η $\|.\|_\infty$ ορίζει νόρμα στον $L^\infty(X, \mu)$ ως προς την οποία γίνεται άλγεβρα Banach, αν οι πράξεις ορισθούν κατά σημείο.

Κάθε $f \in L^\infty(X, \mu)$ ορίζει έναν φραγμένο τελεστή $M_f \in \mathcal{B}(L^2(X, \mu))$ από την σχέση $M_f(g) = fg$ και ισχύει $\|M_f\| = \|f\|_\infty$.

Παρατηρούμε ότι ένας διαγώνιος τελεστής είναι πολλαπλασιαστικός (στον χώρο $L^2(X, \mu) = \ell^2$ όπου $X = \mathbb{N}$ και $\mu(A) = \#A$, ο πληθάριθμος ενός συνόλου A).

Παράδειγμα 2.6 (Το shift στον χώρο του Hardy)

Ο χώρος του Hardy H^2 είναι ο χώρος όλων των συναρτήσεων που έχουν δυναμοσειρές με συντελεστές τετραγωνικά αθροίσιμους. Τέτοιες δυναμοσειρές έχουν ακτίνα σύγκλισης τουλάχιστον 1, επομένως ορίζουν συναρτήσεις ολόμορφες στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Είναι φανερό ότι η απεικόνιση $U : f \to (a_n)$, όπου $f(z) = \sum a_n z^n$, ορίζει γραμμικό ισομορφισμό μεταξύ του H^2 και του ℓ^2. Μεταφέροντας την νόρμα του ℓ^2 στον H^2, ο H^2 αποκτά την δομή χώρου Hilbert και ο U γίνεται ισομετρία επί (αλλιώς *μοναδιστικός τελεστής - unitary operator)*. Αποδεικνύεται ότι η νόρμα στον H^2 δίνεται από τον τύπο

$$\|f\|^2 = \sup_{0 \le r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})|^2 dt.$$

Αν ονομάσουμε $S_1 : H^2 \to H^2$ τον τελεστή που αντιστοιχεί στον τελεστή $S : \ell^2 \to \ell^2$ της μετατόπισης, δηλαδή $S_1 = U^{-1} S U$, τότε παρατηρούμε ότι $(S_1 f)(z) = z f(z)$ για κάθε $f \in H^2$ και $z \in \mathbb{D}$. Όμως ο S_1 δεν είναι πολλαπλασιαστικός τελεστής, γιατί δεν δρα σ'έναν χώρο της μορφής $L^2(X, \mu)$.

Παράδειγμα 2.7 (Ολοκληρωτικοί τελεστές)

Έστω $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε για κάθε $f \in L^2[0,1]$ το ολοκλήρωμα $\int_0^1 k(x,y) f(y) dy$ υπάρχει για κάθε $x \in [0,1]$ και ορίζει συνεχή συνάρτηση $A_k f : [0,1] \to \mathbb{C}$ από τον τύπο

$$(A_k f)(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y) dy.$$

Μάλιστα εξ αιτίας της ανισότητας

$$\int_0^1 |(A_k f)(x)|^2 dx \le \|k\|_{22}^2 \int_0^1 |f(y)|^2 dy$$

(όπου $\|k\|_{22}^2 = \iint |k(x,y)|^2 dx dy$) η απεικόνιση $f \to A_k f$ ορίζει φραγμένο τελεστή από τον $L^2[0,1]$ στον εαυτό του με νόρμα $\|A_k\| \le \|k\|_{22}$ (η ανισότητα είναι συνήθως γνήσια).

Μάλιστα, τα παραπάνω επεκτείνονται όταν η συνάρτηση k δεν είναι αναγκαστικά συνεχής, αλλά ανήκει στον $L^2([0,1] \times [0,1])$. Επίσης, ο χώρος μέτρου $([0,1], \lambda)$

μπορεί να αντικατασταθεί από έναν οποιονδήποτε χώρο (σ-πεπερασμένου) μέτρου.

(Οι ισχυρισμοί αυτοί αφήνονται ως άσκηση για τον αναγνώστη).

Παράδειγμα 2.8 (Ο μετασχηματισμός Fourier)

Για $k \in \mathbb{Z}$, θέτουμε $f_k : [0,1] \to \mathbb{C} : t \to e^{2\pi ikt}$. Ελέγχεται εύκολα ότι η οικογένεια $\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}$ είναι ορθοκανονική στον $L^2[0,1]$. Το σημαντικό είναι ότι αποτελεί ορθοκανονική *βάση* του $L^2[0,1]$. Έπεται ότι κάθε $f \in L^2[0,1]$ γράφεται στη μορφή

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} \langle f, f_k \rangle f_k \quad \text{και ισχύει} \quad \|f\|_2^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2.$$

Εδώ η πρώτη σειρά συγκλίνει ως προς τη νόρμα του $L^2[0,1]$, και αυτό είναι εύκολη συνέπεια της δεύτερης ισότητας (ισότητα Parseval). Γράφουμε

$$\hat{f}(k) = \langle f, f_k \rangle = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi ikt} dt \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Δημιουργείται έτσι μια απεικόνιση

$$F : L^2[0,1] \to \ell^2(\mathbb{Z}) : f \to \hat{f}$$

(προφανώς γραμμική) και η ισότητα Parseval λέει ότι είναι ισομετρία. Είναι μάλιστα επί του $\ell^2(\mathbb{Z})$, γιατί στην εικόνα της, που είναι κλειστός υπόχωρος του $\ell^2(\mathbb{Z})$, περιέχεται η συνηθισμένη βάση $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ του $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Άσκηση 2.9 *Έστω $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε τον ολοκληρωτικό τελεστή $K_g : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ από τον τύπο*

$$(K_g f)(x) = \int_0^1 g(x-y) f(y) dy \qquad (f \in L^2[0,1]).$$

Βρείτε τον πίνακα του τελεστή K_g ως προς την ορθοκανονική βάση $\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}$.

3 Ειδικές κατηγορίες τελεστών σ'ένα χώρο Hilbert

3.1 Sesquilinear μορφές και ο συζυγής ενός τελεστή

Ορισμός 3.1 *Έστω $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ χώροι Hilbert. Μία **sesquilinear μορφή** ϕ είναι μια απεικόνιση $\phi : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \to \mathbb{C}$ που είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή και αντιγραμμική ως προς την δεύτερη.*

*Η ϕ λέγεται **φραγμένη** αν ο αριθμός*

$$\|\phi\| = \sup\{|\phi(x,y)| : x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2, \|x\| = \|y\| = 1\}$$

*είναι πεπερασμένος. Αν $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$, η αντίστοιχη **τετραγωνική μορφή** $\tilde{\phi}$ είναι η απεικόνιση $\tilde{\phi}(x) = \phi(x,x)$.*

Όταν $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$, η **ταυτότητα πολικότητας (polarization)**

$$4\phi(x,y) = \tilde{\phi}(x+y) - \tilde{\phi}(x-y) + i\tilde{\phi}(x+iy) - i\tilde{\phi}(x-iy) \quad (x,y \in \mathcal{H}),$$

που είναι άμεση συνέπεια των ορισμών, δείχνει ότι η ϕ καθορίζεται από την $\tilde{\phi}$.

Αν $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ είναι χώροι Hilbert και $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, θέτουμε

$$\phi_T : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \to \mathbb{C} : (x,y) \to \langle Tx, y\rangle.$$

Παρατηρούμε ότι η ϕ_T είναι sesquilinear και φραγμένη. Μάλιστα έχουμε $\|\phi_T\| = \|T\|$.

Είναι φανερό ότι δύο φραγμένοι τελεστές S, T στον $\mathcal{H}$ είναι ίσοι αν και μόνον αν οι αντίστοιχες μορφές ϕ_T και ϕ_S συμπίπτουν. Από την ταυτότητα πολικότητας έπεται ότι οι S και T είναι ίσοι αν και μόνον αν[2] $\langle Tx, x\rangle = \langle Sx, x\rangle$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$.

Επομένως κάθε $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ ορίζει μια μοναδική φραγμένη sesquilinear μορφή ϕ_T. Αντίστροφα,

[2] Αυτό δεν ισχύει σε πραγματικούς χώρους Hilbert. Για παράδειγμα, αν T είναι ο τελεστής της στροφής κατά $\pi/2$ στον $\mathbb{R}^2$, τότε $\langle Tx, x\rangle = 0$ για κάθε x.

Πρόταση 3.1 *Κάθε φραγμένη sesquilinear μορφή $\phi : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \to \mathbb{C}$ ορίζει έναν μοναδικό $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ από την σχέση*

$$\langle Tx, y\rangle = \phi(x, y) \quad \text{για κάθε } \ x \in \mathcal{H}_1 \text{ και } y \in \mathcal{H}_2.$$

Απόδειξη Για κάθε $x \in \mathcal{H}_1$ η απεικόνιση

$$f_x : \mathcal{H}_2 \to \mathbb{C} : y \to \overline{\phi(x, y)}$$

είναι γραμμική και φραγμένη γιατί $|f_x(y)| \leq (\|\phi\|\|x\|)\|y\|)$. Επομένως, από το Θεώρημα Riesz (1.13) υπάρχει μοναδικό $z_x \in \mathcal{H}_2$ με $\|z_x\| = \|f_x\|$ ώστε

$$\langle y, z_x\rangle = \overline{\phi(x, y)},$$

ισοδύναμα $\langle z_x, y\rangle = \phi(x, y)$, για κάθε $y \in \mathcal{H}_2$. Είναι φανερό ότι η απεικόνιση $x \to z_x : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ είναι γραμμική, και είναι φραγμένη γιατί

$$\|z_x\| = \|f_x\| \leq \|\phi\|\|x\|.$$

Επομένως υπάρχει $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ ώστε $T(x) = z_x$ για κάθε $x \in \mathcal{H}_1$, δηλαδή

$$\langle Tx, y\rangle = \phi(x, y) \quad \text{για κάθε } \ x \in \mathcal{H}_1 \text{ και } y \in \mathcal{H}_2.$$

Αλλά

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tx\|_2 : \|x\|_1 = 1\} = \sup\{|\langle Tx, y\rangle| : \|x\|_1 = \|y\|_2 = 1\} \\ &= \sup\{|\phi(x, y)| : \|x\|_1 = \|y\|_2 = 1\} = \|\phi\|. \end{aligned}$$

Η μοναδικότητα αποδείχθηκε προηγουμένως. □

Πρόταση 3.2 *Για κάθε $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ υπάρχει μοναδικός $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ (ο συζυγής του T) ώστε*

$$\langle Tx, y\rangle_2 = \langle x, T^*y\rangle_1 \quad (x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2).$$

Απόδειξη Ορίζουμε $\psi : \mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_1 \to \mathbb{C}$ από την σχέση $\psi(y, x) = \langle y, Tx\rangle_2$. Η ψ είναι sesquilinear και φράσσεται από την $\|T\|$. Από την προηγούμενη Πρόταση, υπάρχει μοναδικός $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ ώστε $\langle T^*y, x\rangle_1 = \psi(y, x) = \langle y, Tx\rangle_2$ για κάθε $y \in \mathcal{H}_2$ και κάθε $x \in \mathcal{H}_1$. □

Παράδειγμα 3.3 ***(i)*** *Αν (X,μ) είναι χώρος μέτρου και $f \in L^\infty(X,\mu)$, ο συζυγής του πολλαπλασιαστικού τελεστή $M_f \in \mathcal{B}(L^2(X,\mu))$ είναι ο M_{f^*}, όπου $f^*(t) = \overline{f(t)}$.*

(ii) *Ο συζυγής του shift $S \in \mathcal{B}(\ell^2)$ δίδεται από τον τύπο $S^*((x_1, x_2, \ldots)) = (x_2, x_3, \ldots)$.*

Έπεται ότι ο χώρος $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ των τελεστών σ'έναν χώρο Hilbert, εκτός από την δομή άλγεβρας Banach που έχει (όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο) εφοδιάζεται με την απεικόνιση $A \to A^*$ που έχει τις ιδιότητες

1. $A^{**} = A$
2. $(A + \lambda B)^* = A^* + \bar{\lambda} B^*$
3. $(AB)^* = B^* A^*$
4. $\|A^* A\| = \|A\|^2$

Οι ιδιότητες (1),(2),(3) είναι άμεσες από τον ορισμό. Αποδεικνύουμε την (4): Για κάθε $x \in \mathcal{H}$, έχουμε

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle A^*Ax, x \rangle \leq \|A^*Ax\|.\|x\| \leq \|A^*A\|.\|x\|^2$$

πράγμα που δείχνει ότι $\|A\|^2 \leq \|A^*A\|$. Από την άλλη μεριά όμως $\|A^*A\| \leq \|A^*\|\|A\|$ άρα $\|A\|^2 \leq \|A^*\|\|A\|$, οπότε $\|A\| \leq \|A^*\|$. Αν εφαρμόσουμε την ανισότητα αυτή στον A^* προκύπτει ότι $\|A^*\| \leq \|A^{**}\| = \|A\|$ άρα $\|A\| = \|A^*\|$ (η ισότητα αυτή είναι άλλωστε φανερή από τον ορισμό του A^*). Τότε όμως

$$\|A\|^2 \leq \|A^*A\| \leq \|A^*\|\|A\| = \|A\|^2$$

και η (4) αποδείχθηκε.

Ορισμός 3.2 ***C^*-άλγεβρα*** *είναι μια άλγεβρα Banach $\mathcal{A}$ εφοδιασμένη με μια απεικόνιση $\mathcal{A} \to \mathcal{A} : A \to A^*$, που έχει τις ιδιότητες (1)-(3) (μια τέτοια απεικόνιση λέγεται* ***ενέλιξη (involution)****), που η νόρμα της ικανοποιεί την λεγόμενη* ***ιδιότητα C^*****:*

$$\|A^*A\| = \|A\|^2.$$

Επομένως, αν $\mathcal{H}$ είναι χώρος Hilbert, η $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι C*-άλγεβρα. Εξάλλου, μια κλειστή υπάλγεβρα $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι C*-άλγεβρα αν και μόνον αν είναι **αυτοσυζυγής (selfadjoint)**, δηλαδή αν ικανοποιεί $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^* \in \mathcal{A}$.

Θεώρημα 3.4 (Gelfand-Naimark) *Κάθε C*-άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι ισομορφική, ως C*-άλγεβρα, με μία κλειστή αυτοσυζυγή υπάλγεβρα κάποιου $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Ακριβέστερα, υπάρχει χώρος Hilbert $\mathcal{H}$ και απεικόνιση $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ που διατηρεί την αλγεβρική δομή (άθροισμα, γινόμενο, ενέλιξη) και την νόρμα.*

Άλλα παραδείγματα C*-αλγεβρών είναι ο $C_o(X)$, ο χώρος όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{C}$ σ'έναν τοπικά συμπαγή χώρο X (π.χ. $X = \mathbb{R}$) που *μηδενίζονται στο άπειρο*[3], εφοδιασμένος με τις πράξεις κατά σημείο, την ενέλιξη $f^*(t) = \overline{f(t)}$ και την νόρμα supremum. Ειδικότερα, αν ο X είναι συμπαγής, η $C(X)$ είναι C*-άλγεβρα. Οι άλγεβρες αυτές είναι μεταθετικές. Ισχύει το

Θεώρημα 3.5 (Gelfand-Naimark) *Κάθε μεταθετική C*-άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι ισομορφική, ώς C*-άλγεβρα, με την $C_o(X)$ για κατάλληλο τοπικά συμπαγή χώρο X.*

Παρατήρηση 3.6 Ένα άλλο παράδειγμα μεταθετικής C*-άλγεβρας είναι ο $L^\infty(X, \mu)$, με τις πράξεις και την ενέλιξη κατά σημείο και την νόρμα που ορίζεται από το ουσιώδες supremum. Από τις σχέσεις $\|M_f\| = \|f\|_\infty$, $M_{(f+\lambda g)} = M_f + \lambda M_g$, $M_{fg} = M_f M_g$ και $M_f^* = M_{\bar{f}}$ προκύπτει ότι η απεικόνιση $f \to M_f$ είναι ισομετρικός *-μορφισμός από την C*-άλγεβρα $L^\infty(X, \mu)$ στην C*-άλγεβρα $\mathcal{B}(L^2(X, \mu))$. Το σύνολο

$$\mathcal{M}_\mu = \{M_f : f \in L^\infty(X, \mu)\}$$

είναι επομένως μία C*-υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(L^2(X, \mu))$, και ονομάζεται ***η πολλαπλασιαστική άλγεβρα*** του $L^\infty(X, \mu)$.

3.2 Κατηγορίες τελεστών

Ένας τελεστής $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ λέγεται **φυσιολογικός (normal)** αν $AA^* = A^*A$, **αυτοσυζυγής (selfadjoint)** αν $A = A^*$, **ορθομοναδιαίος (unitary)** αν $A^* = A^{-1}$, **θετικός (positive)** αν $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$.

[3] μια συνεχής συνάρτηση f *μηδενίζεται στο άπειρο* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει συμπαγές υποσύνολο $K_f \subseteq X$ ώστε $|f(t)| < \varepsilon$ για κάθε $t \notin K_f$

Κάθε τελεστής $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ μπορεί να γραφεί

$$T = T_1 + iT_2, \quad \text{όπου οι } T_1 = \frac{T + T^*}{2} \text{ και } T_2 = \frac{T - T^*}{2i}$$

είναι αυτοσυζυγείς. Παρατηρείστε ότι ο T είναι φυσιολογικός αν και μόνον αν οι T_1 και T_2 μετατίθενται.

Λήμμα 3.7 *Ένας φραγμένος τελεστής T είναι φυσιολογικός αν και μόνον αν $\|Tx\| = \|T^*x\|$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$.*

Απόδειξη Έχουμε

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle \\ \|T^*x\|^2 &= \langle T^*x, T^*x \rangle = \langle TT^*x, x \rangle. \end{aligned}$$

Επομένως από την ταυτότητα πολικότητας έπεται ότι $\|Tx\| = \|T^*x\|$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$ αν και μόνον αν $T^*T = TT^*$. $\square$

Λήμμα 3.8 *Ένας φραγμένος τελεστής A είναι αυτοσυζυγής αν και μόνον αν $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$.*

Απόδειξη Εφόσον $\langle A^*x, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle}$, αν $A = A^*$ τότε $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$. Αν αντίστροφα $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$, τότε $\langle (A - A^*)x, x \rangle = 0$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$, άρα $A = A^*$ από την ταυτότητα πολικότητας. $\square$

Έπεται ότι οι θετικοί τελεστές είναι κατ'ανάγκην αυτοσυζυγείς.

Αν $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι ένας οποιοσδήποτε τελεστής, τότε ο T^*T είναι θετικός. (Ειδικότερα το τετράγωνο ενός αυτοσυζυγούς τελεστή είναι θετικός τελεστής.) Θα δείξουμε αργότερα ότι όλοι οι θετικοί τελεστές B είναι της μορφής $B = T^*T$.

Υπενθυμίζω ότι ένας τελεστής $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι *ταυτοδύναμος* (δηλ. $P = P^2$) αν και μόνον αν το σύνολο τιμών του $P(\mathcal{H})$ και ο πυρήνας του $\ker P$ είναι *συμπληρωματικοί*, δηλαδή ικανοποιούν $P(\mathcal{H}) \cap \ker P = \{0\}$ και $P(\mathcal{H}) + \ker P = \mathcal{H}$, ισοδύναμα $\ker P = (I - P)(\mathcal{H})$. Επομένως ένας ταυτοδύναμος τελεστής είναι ορθή προβολή αν και μόνον αν το σύνολο τιμών και ο πυρήνας του είναι κάθετοι.

Λήμμα 3.9 *Ένας ταυτοδύναμος τελεστής $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι ορθή προβολή αν και μόνον αν είναι αυτοσυζυγής. Επομένως οι ορθές προβολές χαρακτηρίζονται αλγεβρικά από τις σχέσεις $P = P^2 = P^*$.*

Απόδειξη Έστω ότι η P είναι ορθή προβολή. Τότε

$$\langle Px, x\rangle = \langle Px, Px + (I - P)x\rangle = \langle Px, Px\rangle$$

για κάθε $x \in \mathcal{H}$, γιατί τα Px και $(I - P)x$ είναι κάθετα. Έπεται ότι ο αριθμός $\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2$ είναι πραγματικός (μάλιστα μη αρνητικός) και συνεπώς ο P είναι αυτοσυζυγής (μάλιστα θετικός).

Έστω αντίστροφα ότι $P = P^2 = P^*$. Τότε ο πυρήνας και το σύνολο τιμών του P είναι κάθετοι γιατί

$$\langle Px, (I - P)y\rangle = \langle x, P^*(I - P)y\rangle = \langle x, P(I - P)y\rangle = 0. \qquad \square$$

Λήμμα 3.10 *Ένας τελεστής $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι ορθομοναδιαίος (δηλαδή είναι αντιστρέψιμος και $U^{-1} = U^*$, ισοδύναμα $UU^* = U^*U = I$) αν και μόνον αν είναι ισομετρία και επί.*

Απόδειξη Ο τελεστής U είναι ισομετρία αν και μόνον αν

$$\langle Ix, x\rangle = \|x\|^2 = \|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux\rangle = \langle U^*Ux, x\rangle$$

για κάθε $x \in \mathcal{H}$. Από την ταυτότητα πολικότητας συμπεραίνουμε ότι,

$$\text{Ο } U \text{ είναι ισομετρία} \quad \Leftrightarrow \quad U^*U = I.$$

Επομένως μια ισομετρία U έχει πάντα αριστερά αντίστροφο, τον U^*. Αν μια ισομετρία U είναι αντιστρέψιμος τελεστής, τότε ο U^{-1} θα είναι ίσος με τον αριστερά αντίστροφο του U, δηλαδή τον U^*. Αν αντίστροφα ο U είναι αντιστρέψιμος και $U^{-1} = U^*$, τότε είναι βέβαια επί και ισχύει $U^*U = I$, άρα ο U είναι ισομετρία. $\square$

Παράδειγμα 3.11 Ο τελεστής της μετατόπισης (shift) είναι ισομετρία, αλλά δεν είναι επί. Μάλιστα ο SS^* είναι η ορθή προβολή επί του υποχώρου $[e_0]^\perp$. Γενικότερα:

Ορισμός 3.3 *Έστω $E \subseteq \mathcal{H}_1$ κλειστός υπόχωρος.* ***Μερική ισομετρία*** *με* ***αρχικό χώρο*** *E είναι ένας τελεστής $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ ώστε ο $V|_E$ να είναι ισομετρία και ο $V|_{E^\perp}$ να μηδενίζεται.*

Παρατήρησε ότι αν $F = V(E) = V(\mathcal{H}_1)$, τότε ο F είναι κλειστός υπόχωρος, γιατί ο E είναι πλήρης και ο $V|_E$ είναι ισομετρικός. Ο F ονομάζεται ο **τελικός χώρος** της V. Παρατήρησε επίσης ότι κάθε ορθή προβολή P είναι μερική ισομετρία με αρχικό και τελικό χώρο $P(\mathcal{H})$.

Πρόταση 3.12 *Αν V είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο E και τελικό χώρο F, τότε η V^* είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο F και τελικό χώρο E, η V^*V είναι η προβολή στον E (η* **αρχική προβολή** *του V) και η VV^* είναι η προβολή στον F (η* **τελική προβολή** *του V).*

Αντίστροφα, αν $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ και ο τελεστής V^*V είναι προβολή, τότε ο VV^* είναι επίσης προβολή και η V είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο $V^*V(\mathcal{H}_1)$ και τελικό χώρο $VV^*(\mathcal{H}_2)$.

Απόδειξη Έστω ότι η V είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο E. Δείχνουμε ότι $V^*V = P_E$: Παρατήρησε ότι για κάθε $x \in \mathcal{H}_1$ έχουμε $Vx = VP_Ex + VP_E^\perp x = VP_Ex$ γιατί ο V μηδενίζεται στον $E^\perp$. Επομένως, αν $x, y \in \mathcal{H}_1$ έχουμε

$$\langle V^*Vx, y\rangle = \langle Vx, Vy\rangle = \langle VP_Ex, VP_Ey\rangle = \langle P_Ex, P_Ey\rangle$$

γιατί η V είναι ισομετρία στον E. Άρα

$$\langle V^*Vx, y\rangle = \langle P_Ex, P_Ey\rangle = \langle P_Ex, y\rangle$$

για κάθε x, y, πράγμα που δείχνει ότι $V^*V = P_E$.

Έστω ότι, αντίστροφα, ο τελεστής $P = V^*V$ είναι προβολή. Θα δείξω ότι ο V είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο $E = P(\mathcal{H}_1)$. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathcal{H}_1$ έχουμε

$$\|Vx\|^2 = \langle Vx, Vx\rangle = \langle V^*Vx, x\rangle = \langle Px, x\rangle = \|Px\|^2,$$

άρα αν $x \in P(\mathcal{H}_1)$ τότε $\|Vx\| = \|x\|$ και αν $x \perp P(\mathcal{H}_1)$ τότε $\|Vx\| = 0$. Δηλαδή ο V είναι ισομετρικός στον $P(\mathcal{H}_1)$ και μηδενίζεται στον $P(\mathcal{H}_1)^\perp$.

Έστω $F = V(\mathcal{H}_1)$. Επειδή $F = V(E)$ και η $V|_E$ είναι ισομετρία, ο F είναι κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}_2$. Θα δείξω ότι ο V^* είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο F και τελικό χώρο E. Πράγματι, για κάθε $y = Vx \in F$,

$$\begin{aligned}\|V^*y\|^2 &= \|V^*(Vx)\|^2 = \langle V^*Vx, V^*Vx\rangle = \langle (V^*V)^2x, x\rangle = \langle V^*Vx, x\rangle \\ &= \langle Vx, Vx\rangle = \|Vx\|^2 = \|y\|^2\end{aligned}$$

επειδή $(V^*V)^2 = P^2 = V^*V$. Άρα, η $V^*|_F$ είναι ισομετρία. Επίσης, απεικονίζει τον F επί του E γιατί για κάθε $x \in E$ έχουμε $Vx \in F$ και $V^*Vx = P_E x = x$.

Μένει να δειχθεί ότι η V^* μηδενίζεται στον $F^\perp$. Πράγματι, αν $z \in F^\perp$, για κάθε $x \in \mathcal{H}_1$ έχουμε

$$\langle V^*z, x\rangle = \langle z, Vx\rangle = 0$$

γιατί $Vx \in F$, άρα $V^*z = 0$. Δείξαμε ότι η V^* είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο F. Εφαρμόζοντας την πρώτη παράγραφο στην V^*, συμπεραίνουμε ότι η VV^* είναι η ορθή προβολή στον F.

Παρατήρηση 3.13 Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι η έννοια της μερικής ισομετρίας μπορεί να ορισθεί αλγεβρικά (χωρίς αναφορά δηλαδή στην δράση πάνω σ'έναν χώρο Hilbert) και μάλιστα σε κάθε C*-άλγεβρα $\mathcal{A}$: ένα στοιχείο $V \in \mathcal{A}$ είναι μερική ισομετρία αν το $V^*V = P$ είναι ορθή προβολή δηλ. $P = P^2 = P^*$. Μάλιστα

Αν $V \in \mathcal{A}$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(a) *Το στοιχείο $P = V^*V$ είναι προβολή.*
(b) *$VV^*V = V$.*
(c) *$V^*VV^* = V^*$.*
(d) *Το στοιχείο $Q = VV^*$ είναι προβολή.*

Απόδειξη ***(a)⇒(b)*** *Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα C^*, έχουμε*

$$\begin{aligned}\|V - VV^*V\|^2 = \|V - VP\|^2 &= \|(V^* - PV^*)(V - VP)\| \\ &= \|V^*V - V^*VP - PV^*V + PV^*VP\| \\ &= \|P - P^2 - P^2 + P^3\| = 0\end{aligned}$$

(b)⇒(a) *Το VV^* είναι προφανώς αυτοσυζυγές και*

$$(VV^*)^2 = VV^*VV^* = (VV^*V)V^* = VV^*.$$

*Οι σχέσεις **(b)**$\Leftrightarrow$**(c)** είναι προφανώς ισοδύναμες (η μία είναι συζυγής της άλλης. Τέλος, η ισοδυναμία **(d)**$\Leftrightarrow$**(c)** προκύπτει από την **(a)**$\Leftrightarrow$**(b)** θεωρώντας το V^* στη θέση του V.*

Χρησιμοποιώντας μερικές ισομετρίες, μπορεί να ορισθεί μια ιδιαίτερα γόνιμη σχέση ισοδυναμίας προβολών σε μια C*-άλγεβρα $\mathcal{A}$. Δύο προβολές $P, Q \in \mathcal{A}$ λέγονται *ισοδύναμες ως προς την* $\mathcal{A}$ (γράφουμε $P \underset{\mathcal{A}}{\sim} Q$) αν υπάρχει $V \in \mathcal{A}$ ώστε $V^*V = P$ και $VV^* = Q$. Αν $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, τότε η ισοδυναμία αυτή σημαίνει απλώς ότι οι υπόχωροι $P(\mathcal{H})$ και $Q(\mathcal{H})$ έχουν την ίδια διάσταση (δηλαδή έχουν ισοπληθικές ορθοκανονικές βάσεις). Αν η $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική (για παράδειγμα αν $\mathcal{A} = C(K)$), τότε η ισοδυναμία ως προς $\mathcal{A}$ είναι απλώς ισότητα.

Η ισοδυναμία ως προς $\mathcal{A}$ είναι σχέση ισοδυναμίας: Πράγματι,

(α) μια προβολή P είναι ισοδύναμη με τον εαυτό της μέσω της μερικής ισομετρίας P.

(β) Αν $P \underset{\mathcal{A}}{\sim} Q$ μέσω της V τότε $Q \underset{\mathcal{A}}{\sim} P$ μέσω της V^*.

(γ) Αν $P \underset{\mathcal{A}}{\sim} Q$ μέσω της V και $Q \underset{\mathcal{A}}{\sim} R$ μέσω της U τότε ο τελεστής UV είναι μερική ισομετρία[4] και $P \underset{\mathcal{A}}{\sim} R$ μέσω της UV, γιατί $P = V^*V$, $Q = VV^* = U^*U$ και $R = UU^*$ επομένως

$$(UV)^*UV = V^*(U^*U)V = V^*QV = V^*(VV^*)V = (V^*V)^2 = P$$

και

$$UV(UV)^* = U(VV^*)U^* = UQU^* = U(U^*U)U^* = (UU^*)^2 = R.$$

Αυτή η σχέση ισοδυναμίας (σε άλγεβρες von Neumann, που, όπως θα δούμε, διαθέτουν αφθονία προβολών) αποτελεί κρίσιμη έννοια για την ταξινόμηση των factors (αλγεβρών von Neumann με τετριμμένο κέντρο) από τους Murray και von Neumann.

[4] Σημείωσε ότι το γινόμενο δύο μερικών ισομετριών δεν είναι εν γένει μερική ισομετρία

4 Αναλλοίωτοι υπόχωροι

Ένας υπόχωρος $E \subseteq \mathcal{H}$ είναι **αναλλοίωτος** από έναν φραγμένο τελεστή $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ αν $Ax \in E$ για κάθε $x \in E$. Τότε ο *κλειστός* υπόχωρος $\overline{E}$ είναι και αυτός A-αναλλοίωτος, εφόσον ο A είναι συνεχής[5]. Θα λέμε ότι ο υπόχωρος E **ανάγει τον** A όταν και ο E και ο $E^\perp$ είναι A-αναλλοίωτοι.

Παραδείγματος χάριν ο πυρήνας ($\ker A$) ενός τελεστή A, και γενικότερα ένας ιδιόχωρός του ($\ker(A - \lambda I)$), είναι A-αναλλοίωτοι. Αυτό δείχνει ότι κάθε τελεστής σε (μιγαδικό!) χώρο πεπερασμένης διάστασης έχει μη τετριμμένο αναλλοίωτο υπόχωρο (και μάλιστα μονοδιάστατο).

Ένας κλειστός υπόχωρος $E \subseteq \mathcal{H}$ λέγεται **κυκλικός** για τον A αν είναι της μορφής

$$E = \overline{[x, Ax, A^2x, \ldots]}$$

για κάποιο $x \in \mathcal{H}$. Ένας A-κυκλικός υπόχωρος είναι βέβαια A-αναλλοίωτος. Έπεται ότι κάθε τελεστής σε μη διαχωρίσιμο χώρο έχει μη τετριμμένο αναλλοίωτο υπόχωρο (πράγματι, πάρε ένα οποιοδήποτε μη μηδενικό $x \in \mathcal{H}$ και θεώρησε τον A-κυκλικό υπόχωρο E_x που παράγει. Ο E_x είναι διαχωρίσιμος, άρα γνήσιος, και είναι μη μηδενικός γιατί περιέχει το x).

Ένα από τα πιο βασικά ανοικτά προβλήματα στην Θεωρία Τελεστών είναι

> **Το πρόβλημα του αναλλοίωτου υπόχωρου:** *Είναι αλήθεια ότι κάθε φραγμένος τελεστής σε έναν (διαχωρίσιμο, απειροδιάστατο) χώρο Hilbert*[6] *έχει μη τετριμμένο αναλλοίωτο υπόχωρο;*

Έστω $E \subseteq \mathcal{H}$ κλειστός υπόχωρος και $P = P_E$. Κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ γράφεται ως 2×2 πίνακας τελεστών ως προς την διάσπαση του $\mathcal{H}$ στο άθροισμα $E \oplus E^\perp$:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

[5] Αν $x \in \overline{E}$ και $x_n \in E$ με $x_n \to x$, τότε $Ax_n \in E$ και $Ax_n \to Ax$ άρα $Ax \in \overline{E}$.

[6] Είναι σήμερα γνωστό ότι η απάντηση είναι αρνητική για τελεστές σε χώρους Banach, αλλά το πρόβλημα είναι ανοικτό για *αυτοπαθείς* χώρους Banach. Βλέπε
P. Enflo, On the invariant subspace problem in Banach spaces, *Acta Math.*, 158, 1987.
C.J. Read, A solution to the invariant subspace problem on the space ℓ_1, *Bull. London Math. Soc.* 17, 1985.

Εδώ ο $A_{11} \in \mathcal{B}(E)$ ορίζεται από την σχέση $A_{11}x = PAx$ ($x \in E$), ο $A_{12} \in \mathcal{B}(E^{\perp}, E)$ από την σχέση $A_{12}y = PAy$ ($y \in E^{\perp}$) και ούτω καθεξής. Έπεται ότι $A(E) \subseteq E$ αν και μόνον αν $A_{21} = 0$, και ότι ο A ανάγεται από τον E αν και μόνον αν $A_{12} = A_{21} = 0$.

Λήμμα 4.1 *Ένας κλειστός υπόχωρος E είναι A-αναλλοίωτος αν και μόνον αν $AP = PAP$. Ο E ανάγει τον A αν και μόνον αν $A(E) \subseteq E$ και $A^*(E) \subseteq E$, ισοδύναμα αν και μόνον αν $AP = PA$.*

Απόδειξη Εύκολη.

Παρατήρησε ότι αν $A(E) \subseteq E$ και $A = A^*$, τότε αναγκαστικά ο E ανάγει τον A. Αυτό δεν ισχύει για μη αυτοσυζυγείς, ούτε καν για φυσιολογικούς τελεστές. Για παράδειγμα αν U είναι ο τελεστής της αμφίπλευρης μετατόπισης στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ (που ορίζεται από τη σχέση $Ue_n = e_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$), τότε ο U είναι φυσιολογικός (μάλιστα ορθομοναδιαίος) και ο υπόχωρος $E = \overline{[e_0, e_1, \ldots]}$ είναι U-αναλλοίωτος (μάλιστα είναι κυκλικός με κυκλικό διάνυσμα e_0), αλλά το ορθογώνιο συμπλήρωμά του δεν είναι αναλλοίωτο, γιατί $e_{-1} \in E^{\perp}$ ενώ $U(e_{-1}) = e_0 \notin E^{\perp}$.

Λήμμα 4.2 *Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ φυσιολογικός τελεστής. Αν $x \in \mathcal{H}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του T με ιδιοτιμή λ, τότε $T^*x = \bar{\lambda}x$. Έπεται ότι οι ιδιόχωροι ενός φυσιολογικού τελεστή (αν υπάρχουν) τον ανάγουν, και είναι κάθετοι μεταξύ τους.*

Απόδειξη Εφόσον $(T - \lambda I)x = 0$ και ο τελεστής $T - \lambda I$ είναι φυσιολογικός, το Λήμμα 3.7 δείχνει ότι

$$\|(T^* - \bar{\lambda}I)x\| = \|(T - \lambda I)x\| = 0.$$

Επομένως αν $M_\lambda = \{x \in \mathcal{H} : Tx = \lambda x\}$, τότε για κάθε $x \in M_\lambda$ έχουμε $T^*x = \bar{\lambda}x \in M_\lambda$. Έπεται ότι $T^*(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$, άρα ο M_λ ανάγει τον T.

Τέλος αν $\lambda \neq \mu$ είναι ιδιοτιμές του T, τότε για κάθε $x \in M_\lambda$ και $y \in M_\mu$ έχουμε

$$\begin{aligned} \lambda\langle x, y\rangle &= \langle \lambda x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \\ &= \langle x, \bar{\mu}y\rangle = \mu\langle x, y\rangle, \end{aligned}$$

άρα $\langle x, y\rangle = 0$. Επομένως $M_\lambda \perp M_\mu$. $\square$

5 Το Φασματικό Θεώρημα: Εισαγωγή

5.1 Σε χώρους πεπερασμένης διάστασης

Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert με $\dim\mathcal{H} = n < +\infty$. Κάθε ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}$ ορίζει ισομετρικό ισομορφισμό $U : \mathcal{H} \to \mathbb{C}^n$. Έστω D_a ο διαγώνιος τελεστής με διαγώνια στοιχεία $a_1, \ldots, a_n$. Τότε ο $D_a^* = D_{a^*}$ είναι επίσης διαγώνιος, άρα μετατίθεται με τον D_a. Επομένως κάθε D_a είναι φυσιολογικός τελεστής. Γενικότερα, αν ο $T \in B(\mathcal{H})$ είναι *διαγωνοποιήσιμος*, δηλαδή υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{e_k : k = 1, \ldots, n\}$ του $\mathcal{H}$ ώστε ο τελεστής UTU^{-1} να είναι διαγώνιος, τότε ο T είναι φυσιολογικός[7].

Αντίστροφα,

Θεώρημα 5.1 *Κάθε φυσιολογικός τελεστής T σ'έναν (μιγαδικό) χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ διάστασης $n < \infty$ είναι* διαγωνοποιήσιμος, *δηλαδή υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{e_k : k = 1, \ldots, n\}$ του $\mathcal{H}$ και $a_k \in \mathbb{C}$ ώστε $Te_k = a_k e_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Ισοδύναμα, ο T είναι* ορθομοναδιαία ισοδύναμος (unitarily equivalent) *με έναν διαγώνιο τελεστή, δηλαδή υπάρχει ορθομοναδιαίος τελεστής $U : \mathcal{H} \to \mathbb{C}^n$ ώστε ο UTU^{-1} να είναι διαγώνιος.*

Απόδειξη Παρατήρησε πρώτα ότι, αφού ο $\mathcal{H}$ έχει πεπερασμένη διάσταση, κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ έχει ιδιοτιμές: είναι οι ρίζες του μιγαδικού πολυωνύμου $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

Αν λ_i είναι οι ιδιοτιμές του T, ονομάζουμε M_i τους αντίστοιχους ιδιόχωρους. Από το Λήμμα 4.2, οι ιδιόχωροι του T είναι ανά δύο κάθετοι. Έστω $M = \oplus_i M_i$ το ευθύ τους άθροισμα.

Ισχυρίζομαι ότι $M = \mathcal{H}$. Παρατήρησε ότι κάθε M_i ανάγει τον T (Λήμμα 4.2), επομένως και ο M τον ανάγει. Άρα ο $M^\perp$ είναι T-αναλλοίωτος. Αν $M^\perp \neq \{0\}$, τότε ο τελεστής $S = T|_{M^\perp} : M^\perp \to M^\perp$ δεν έχει ιδιοτιμές (γιατί αν $x \in M^\perp \backslash \{0\}$ και $Sx = \lambda x$, τότε $Tx = \lambda x$ άρα το x ανήκει σε κάποιον ιδιόχωρο του T, άρα είναι κάθετο στον $M^\perp$). Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι η $\dim M^\perp$ είναι πεπερασμένη. Άρα $M^\perp = \{0\}$, δηλαδή $\oplus_i M_i = \mathcal{H}$.

[7] Αν $UTU^{-1} = D$ τότε $T = U^*DU$ και $T^* = U^*D^*U$, άρα οι $T^*T = U^*D^*UU^*DU = U^*D^*DU$ και $TT^* = U^*DD^*U$ μετατίθενται.

Επειδή για κάθε i ο τελεστής $T|_{M_i}$ είναι ένα πολλαπλάσιο του ταυτοτικού, άρα είναι διαγωνοποιήσιμος, έπεται τώρα ότι και ο T θα είναι διαγωνοποιήσιμος (είναι διαγώνιος ως προς κάθε ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}$ που είναι ένωση ορθοκανονικών βάσεων των M_i). $\square$

5.2 Επέκταση σε απειροδιάστατους χώρους

Ένας φυσιολογικός τελεστής T σ'έναν απειροδιάστατο χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ δεν έχει κατ'ανάγκην ιδιοτιμές. Παράδειγμα: Ο τελεστής $M_f \in \mathcal{B}(L^2([0,1]))$ όπου $f(t) = t$ (γιατί;). Ένας τέτοιος τελεστής δεν μπορεί να είναι διαγωνοποιήσιμος (δηλαδή ορθομοναδιαία ισοδύναμος με έναν διαγώνιο τελεστή). Όμως, οι πολλαπλασιαστικοί τελεστές είναι γενίκευση των διαγωνίων τελεστών (βλ. Παράδειγμα 2.5). Μια μορφή του Φασματικού Θεωρήματος είναι

Θεώρημα 5.2 (Φασματικό Θεώρημα - Πρώτη μορφή)
Ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι φυσιολογικός αν και μόνον αν είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με έναν πολλαπλασιαστικό τελεστή, δηλαδή αν υπάρχουν: χώρος μέτρου (X, μ), ορθομοναδιαίος τελεστής $U : L^2(X,\mu) \to \mathcal{H}$ και συνάρτηση $f \in L^\infty(X,\mu)$ ώστε

$$T = UM_fU^{-1}.$$

Παρατήρηση 5.3 Ένας πολλαπλασιαστικός τελεστής δεν είναι κατάνάγκη διαγωνοποιήσιμος, όπως είδαμε, άρα δεν μπορεί εν γένει να γραφεί ως πεπερασμένο άθροισμα $M_f = \sum \lambda_i P_i$, όπου οι P_i είναι ορθές προβολές. Μπορεί όμως να προσεγγισθεί από τέτοια αθροίσματα:

Για κάθε $f \in L^\infty(X,\mu)$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $\{P_i : i = 1,\dots,n\}$ καθέτων ανά δύο προβολών του $\mathcal{B}(L^2(X,\mu))$ με $\sum P_i = I$ και $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ώστε

$$\|M_f - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\| \leq \varepsilon.$$

Απόδειξη Αφού η f είναι (ουσιωδώς) φραγμένη και μετρήσιμη, υπάρχει απλή συνάρτηση[8] $f_\varepsilon = \sum \lambda_i \chi_i$ (όπου οι χ_i είναι χαρακτηριστικές συναρτήσεις ξένων ανά δύο (μετρήσιμων) υποσυνόλων) ώστε $\|f - f_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$. Έπεται ότι

[8] *Απόδειξη:* Αλλάζοντας, αν χρειασθεί, τις τιμές της f σ'ένα υποσύνολο μέτρου μηδέν του X, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f είναι φραγμένη. Τότε το σύνολο $f(X) \subseteq \mathbb{C}$ μπορεί να

$\|M_f - M_{f_\varepsilon}\| \leq \varepsilon$. Αλλά, αν θέσουμε $P_i = M_{\chi_i}$, παρατηρούμε ότι οι P_i είναι αυτοσυζυγείς (αφού οι χ_i παίρνουν πραγματικές τιμές) και ότι $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$ (αφού $\chi_i \chi_j = \delta_{ij}\chi_i$). Ειδικότερα, $P_i^2 = P_i$. Επομένως οι P_i είναι κάθετες ανά δύο προβολές. Αλλά $M_{f_\varepsilon} = \sum \lambda_i P_i$ και η απόδειξη συμπληρώθηκε. □

Παρατήρησε ότι η τελευταία απόδειξη στηρίχθηκε στο γεγονός ότι η απεικόνιση $f \to M_f$ διατηρεί την αλγεβρική δομή (συμπεριλαμβανόμενης και της ενέλιξης), καθώς και την νόρμα. Σημείωσε επίσης ότι οι προβολές P_i ανήκουν στην πολλαπλασιαστική άλγεβρα $\mathcal{M}_\mu$ του $L^\infty(X, \mu)$ (πρβλ. Παρατήρηση 3.6).

Παρατήρηση 5.4 Έστω Ω μετρήσιμο υποσύνολο του X και $P(\Omega) = M_{\chi_\Omega}$. Τότε η απεικόνιση $\Omega \to P(\Omega)$ είναι (όπως θα δούμε αργότερα) ένα «μέτρο με τιμές προβολές». Μία ερμηνεία της προηγούμενης παρατήρησης είναι ότι ένας πολλαπλασιαστικός τελεστής είναι το ολοκλήρωμα, με κάποια έννοια, μιας συνάρτησης ως προς αυτό το «μέτρο»:

$$\text{“}M_f = \int \lambda dP(\lambda)\text{”}.$$

Πράγματι, μια δεύτερη μορφή του Φασματικού Θεωρήματος είναι ότι κάθε φυσιολογικός τελεστής μπορεί να γραφεί ως ένα τέτοιο ολοκλήρωμα.

6 Το Φάσμα

Σε χώρους πεπερασμένης διάστασης, το σύνολο $\sigma_p(T)$ των ιδιοτιμών ενός τελεστή $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ συμπίπτει με το σύνολο $\sigma(T)$ όλων των μιγαδικών αριθμών $\lambda \in \mathbb{C}$ για τους οποίους ο τελεστής $T - \lambda I$ δεν έχει αντίστροφο. Το σύνολο των ιδιοτιμών είναι πάντα μη κενό, γιατί το σώμα $\mathbb{C}$ είναι *αλγεβρικά κλειστό*.

Το γεγονός αυτό έπαιξε κρίσιμο ρόλο στην απόδειξη του Φασματικού Θεωρήματος (Θεώρημα 5.1). Όμως, σε απειροδιάστατους χώρους υπάρχουν αυτοσυζυγείς τελεστές χωρίς ιδιοτιμές.

καλυφθεί από πεπερασμένο πλήθος ανοικτών δίσκων U_i, $i = 1, \ldots, n$ διαμέτρου το πολύ ε. Ορίζουμε ξένα ανά δύο Borel υποσύνολα $\Delta_i \subseteq \mathbb{C}$ θέτοντας $\Delta_i = U_i \backslash (\cup_{j<i} U_j)$. Παρατηρούμε ότι η διάμετρος του Δ_i είναι το πολύ ε. Έστω $X_i = f^{-1}(\Delta_i)$. Τα X_i είναι μετρήσιμα ξένα ανά δύο υποσύνολα του X και $\cup X_i = X$. Αν επιλέξουμε αυθαίρετα $\lambda_i \in \Delta_i$, παρατηρούμε ότι $t \in X_i \Rightarrow |f(t) - \lambda_i| \leq \varepsilon$. Άρα, αν θέσουμε $f_\varepsilon = \sum \lambda_i \chi_i$ (όπου χ_i είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του X_i), τότε για κάθε $t \in X$ υπάρχει i ώστε $t \in X_i$, άρα $f_\epsilon(t) = \lambda_i$ και επομένως $|f(t) - f_\varepsilon(t)| \leq \varepsilon$. Αυτό δείχνει ότι $\|f - f_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$.

Παράδειγμα 6.1 *Ο τελεστής M_f στον $L^2([0,1])$, όπου $f(t) = t$, δεν έχει ιδιοτιμές.*

Απόδειξη Άσκηση.

Ορισμός 6.1 *Το **φάσμα** ενός φραγμένου τελεστή T σ'έναν χώρο Banach $\mathcal{X}$ είναι το σύνολο*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ο } T - \lambda I \text{ δεν έχει αντίστροφο } \}.$$

Δεν είναι δύσκολο να δείξει κανείς ότι το φάσμα του τελεστή του τελευταίου παραδείγματος είναι ακριβώς το $[0,1]$.

6.0.1 Παράδειγμα: Πολλαπλασιαστικοί τελεστές

Υπενθύμιση: Αν (X,μ) είναι χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου, μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ λέγεται *ουσιωδώς φραγμένη* αν υπάρχει $A \in \mathbb{R}^+$ ώστε $\mu(\{x \in X : |f(x)| > A\}) = 0$.
Αν $|f(x)| \leq A$ μ-σχεδόν για κάθε $x \in X$ τότε για κάθε $g \in L^2(X,\mu)$,

$$\int |fg|^2 d\mu \leq A^2 \int |g|^2 d\mu$$

άρα $fg \in L^2(X,\mu)$ και μάλιστα η γραμμική απεικόνιση

$$M_f : L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu) : \ g \to fg$$

ορίζεται και είναι φραγμένη με $\|M_f\| \leq A$. Επομένως αν θέσουμε

$$\|f\|_\infty = \inf\{A : A \text{ ουσιώδες φράγμα της } f\}$$

τότε έχουμε $\|M_f\| \leq \|f\|_\infty$.
Αντίστροφα, ισχυρίζομαι ότι

$$|f(x)| \leq \|M_f\| \quad \mu\text{-σχεδόν για κάθε } x \in X. \tag{1}$$

Πράγματι, αρκεί να δείξω ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο

$$X_n = \{x \in X : |f(x)| > \|M_f\| + \frac{1}{n}\}$$

έχει μέτρο μηδέν (γιατί $\{x \in X : |f(x)| > \|M_f\|\} = \cup_n X_n$).

Όμως αν κάποιο X_n είχε θετικό μέτρο τότε (αφού το μέτρο είναι σ-πεπερασμένο) θα περιείχε ένα υποσύνολο Y_n με μη μηδενικό θετικό μέτρο. Τότε ονομάζοτας ξ_n την χαρακτηριστική συνάρτηση του Y_n έχουμε $\xi_n \in L^2(X, \mu)$ και

$$|(f\xi_n)(x)| \geq \left(\|M_f\| + \frac{1}{n}\right) \xi_n(x)$$

για κάθε $x \in X$ άρα

$$\left(\|M_f\| + \frac{1}{n}\right) \|\xi_n\|_2 \leq \|f\xi_n\|_2 \leq \|M_f\| \|\xi_n\|_2$$

άτοπο.

Παρατηρούμε ότι $M_f = M_{f'}$ αν και μόνον αν $f = f'$ μ-σχεδόν παντού. Επομένως ο τελεστής M_f εξαρτάται μόνον από την κλάση της f ως προς ισότητα μ-σχεδόν παντού. Δείξαμε δηλαδή ότι

Λήμμα 6.2 *Κάθε $f \in L^\infty(X, \mu)$ ορίζει έναν φραγμένο τελεστή $M_f \in \mathcal{B}(L^2(X, \mu))$ από την σχέση $M_f(g) = fg$ και ισχύει*

$$\|M_f\| = \|f\|_\infty.$$

Παρατήρηση 6.3 *Έστω $f : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $fg \in L^2(X, \mu)$ για κάθε $g \in L^2(X, \mu)$, τότε η f είναι ουσιωδώς φραγμένη.*

Απόδειξη Η υπόθεση σημαίνει ότι η γραμμική απεικόνιση $M_f : g \to fg$ ορίζεται σ'όλον τον $L^2(X, \mu)$. Παρατηρούμε ότι η M_f έχει κλειστό γράφημα: πράγματι αν $g_n \to 0$ και $M_f g_n \to g_o$ τότε ισχύει $g_o = 0$ γιατί για κάθε $h \in L^2(X, \mu)$ έχουμε

$$\langle g_o, h\rangle = \lim_n \langle M_f g_n, h\rangle = \lim_n \int f g_n \bar{h} d\mu = \lim_n \int g_n(f\bar{h}) d\mu = \lim_n \langle g_n, \bar{f} h\rangle = 0.$$

Επειδή ο $L^2(X, \mu)$ είναι χώρος Banach, έπεται από το Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος ότι ο τελεστής M_f είναι φραγμένος και συνεπώς η f είναι ουσιωδώς φραγμένη από το Λήμμα. $\square$

Θα εξετάσουμε το φάσμα ενός πολλαπλασιαστικού τελεστή M_f.

Συμβολίζουμε

$$\mathcal{M}_\mu = \{M_f \in \mathcal{B}(L^2(X,\mu)) : f \in L^\infty(X,\mu)\}$$

την πολλαπλασιαστική άλγεβρα του χώρου (X, μ). Ελέγχεται άμεσα ότι η απεικόνιση

$$f \to M_f : L^\infty(X,\mu) \to \mathcal{M}_\mu \subseteq \mathcal{B}(L^2(X,\mu))$$

είναι μορφισμός αλγεβρών, δηλαδή

$$M_{f+g} = M_f + M_g, \quad M_{fg} = M_f M_g,$$

που διατηρεί την ενέλιξη ($M_f^* = M_{\bar{f}}$) και τη μονάδα ($M_{\mathbf{1}} = I$). Συνεπώς, αν η f είναι αντιστρέψιμο στοιχείο της άλγεβρας $L^\infty(X,\mu)$, τότε ο M_f είναι αντιστρέψιμο στοιχείο[9] της άλγεβρας $\mathcal{M}_\mu$, άρα και της $\mathcal{B}(L^2(X,\mu))$.

Αν αντίστροφα ο τελεστής M_f είναι αντιστρέψιμος, είναι αλήθεια ότι ο αντίστροφός του, έστω T, είναι και αυτός πολλαπλασιαστικός τελεστής; Η απάντηση είναι θετική. Πράγματι, παρατήρησε κατ'αρχήν ότι η f είναι μ-σχεδόν παντού διάφορη του μηδενός. Γιατί αν υπήρχε $Y \subseteq X$ θετικού μέτρου ώστε $f|_Y = 0$, τότε, θεωρώντας την χαρακτηριστική συνάρτηση χ ενός υποσυνόλου του Y με πεπερασμένο μη μηδενικό μέτρο, θα είχαμε $\chi \in L^2(X,\mu)$, $\chi \neq 0$ και $M_f\chi = f\chi = 0$, πράγμα που αποκλείεται, αφού ο M_f είναι 1-1. Επομένως η συνάρτηση $g = 1/f$ ορίζεται μ-σχεδόν παντού και είναι βεβαίως μετρήσιμη. Ισχυρίζομαι ότι είναι ουσιωδώς φραγμένη. Πράγματι, η σχέση $M_f Th = h$ για κάθε $h \in L^2(X,\mu)$ δίνει $Th = \frac{1}{f}h = gh$. Επομένως η απεικόνιση $h \to gh$ ορίζει φραγμένο τελεστή του $L^2(X,\mu)$ πράγμα που σημαίνει (όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει) ότι η g είναι ουσιωδώς φραγμένη. Συμπέρασμα:

Πρόταση 6.4 *Αν $f \in L^\infty(X,\mu)$, ο τελεστής M_f είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν η f είναι αντιστρέψιμο στοιχείο της άλγεβρας $L^\infty(X,\mu)$, αν δηλαδή η $1/f$ (ορίζεται μ-σχεδόν παντού και) είναι ουσιωδώς φραγμένη. Ο αντίστροφός του (αν υπάρχει) είναι ο $M_{f^{-1}} \in \mathcal{M}_\mu$.*

Έπεται ότι ένα $\lambda \in \mathbb{C}$ δεν ανήκει στο φάσμα του τελεστή M_f αν και μόνον αν (ο τελεστής $M_{f-\lambda}$ είναι αντιστρέψιμος, ισοδύναμα) η $\frac{1}{f-\lambda}$ (ορίζεται μ-σχεδόν παντού και) είναι ουσιωδώς φραγμένη. Αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν υπάρχει $C \in \mathbb{R}_+$ ώστε $\frac{1}{|f(t)-\lambda|} \leq C$ μ-σχεδόν παντού, ισοδύναμα αν υπάρχει $\delta > 0$ ($\delta = 1/C$) ώστε το μέτρο του συνόλου $\{t \in X : |f(t) - \lambda| < \delta\}$ να είναι μηδέν.

[9]Αν $fg = \mathbf{1}$ τότε $M_f M_g = M_g M_f = M_{fg} = M_{\mathbf{1}} = I$.

Επομένως, ένα $\lambda_o \in \mathbb{C}$ *ανήκει στο φάσμα* του τελεστή M_f αν και μόνον αν για κάθε $\delta > 0$ το σύνολο $\{t \in X : |f(t) - \lambda_o| < \delta\}$ έχει θετικό μέτρο. Δηλαδή το $\lambda_o \in \mathbb{C}$ ανήκει στο φάσμα του M_f αν και μόνον αν *κάθε περιοχή* $U_\delta = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_o| < \delta\}$ τέμνει το σύνολο τιμών $f(X)$ σε σύνολο «αρκετά μεγάλο»:[10] $\mu(f^{-1}(U_\delta)) > 0$.

Ας υποθέσουμε προς στιγμήν ότι $X = \mathbb{R}$, ότι το μ είναι το μέτρο Lebesgue και ότι η f είναι συνεχής (και φραγμένη) συνάρτηση. Τότε ισχυρίζομαι ότι το φάσμα του M_f είναι ακριβώς η κλειστή θήκη του συνόλου τιμών της f. Πράγματι αν για κάθε περιοχή U_δ του λ_o ισχύει ότι $\mu(f^{-1}(U_\delta)) > 0$, τότε ειδικότερα $U_\delta \cap f(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ και συνεπώς $\lambda_o \in \overline{f(\mathbb{R})}$. Αν αντίστροφα $\lambda_o \in \overline{f(\mathbb{R})}$ τότε (αφού η f είναι συνεχής) για κάθε $\delta > 0$ το σύνολο $\{t \in \mathbb{R} : |f(t) - \lambda_o| < \delta\}$ είναι μη κενό και ανοιχτό, συνεπώς έχει θετικό μέτρο.

Στην γενική περίπτωση όπου $f \in L^\infty(X, \mu)$ το σύνολο των $\lambda_o \in \mathbb{C}$ που έχουν την ιδιότητα κάθε περιοχή $U_\delta = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_o| < \delta\}$ να ικανοποιεί $\mu(f^{-1}(U_\delta)) > 0$ ονομάζεται το «ουσιώδες σύνολο τιμών της f». Ας παρατηρήσουμε ότι το «σύνολο τιμών της f» δεν έχει έννοια, γιατί στην πραγματικότητα η f δεν είναι μία συνάρτηση, αλλά μια κλάση ισοδυναμίας συναρτήσεων που ταυτίζονται μ-σχεδόν παντού. Το ουσιώδες σύνολο τιμών της f όμως δεν εξαρτάται από τον αντιπρόσωπο της κλάσης. Πράγματι, αν οι f_1 και f_2 ταυτίζονται μ-σχεδόν παντού, τότε το σύνολο $\{t \in X : |f_1(t) - \lambda| < \delta\}$ έχει θετικό μέτρο αν και μόνον αν το σύνολο $\{t \in X : |f_2(t) - \lambda| < \delta\}$ έχει θετικό μέτρο.

Δείξαμε λοιπόν ότι

Πρόταση 6.5 *Αν $f \in L^\infty(X, \mu)$, το φάσμα του τελεστή M_f είναι το ουσιώδες σύνολο τιμών της f, δηλαδή το σύνολο των $\lambda \in \mathbb{C}$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ το σύνολο $\{t \in X : |f(t) - \lambda| < \delta\}$ να έχει θετικό μέτρο.*

Δίνουμε μια δεύτερη απόδειξη:

Αν για κάθε $\delta > 0$ το σύνολο $\{t \in X : |f(t) - \lambda| < \delta\}$ έχει θετικό μέτρο, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει μετρήσιμο $X_n \subseteq X$ με $0 < \mu(X_n) < \infty$ ώστε $|(f - \lambda)|_{X_n}| \leq \frac{1}{n}$, οπότε αν θέσουμε $\xi_n = (\mu(X_n))^{-1/2}\chi_n$ (όπου χ_n η χαρακτηριστική συνάρτηση του X_n), έχουμε $\xi_n \in L^2(X, \mu)$, $\|\xi_n\|_2 = 1$ και

$$|(f(t) - \lambda)\xi_n(t)| \leq \frac{1}{n}\xi_n(t)$$

για κάθε $t \in X$ άρα

[10] ισοδύναμα, $(\mu \circ f^{-1})(U_\delta \cap f(X)) > 0$

$$\|(M_f - \lambda I)\xi_n\|_2 \leq \frac{1}{n} \to 0$$

πράγμα που σημαίνει ότι ο τελεστής $M_f - \lambda I$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

Μάλιστα παρατήρησε ότι η (ξ_n) είναι ακολουθία «προσεγγιστικών ιδιοδιανυσμάτων» του M_f που αντιστοιχούν στο λ (ενώ ο M_f μπορεί, όπως είδαμε, να μην έχει ιδιοδιανύσματα).

Το αντίστροφο αποδεικνύεται όπως πριν. $\square$

Άσκηση 6.6 *Έστω $f : X \to \mathbb{C}$ ουσιωδώς φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση στον (X, μ).*
(**i**) *Ορίζουμε ένα μέτρο Borel μ_f στο $\mathbb{C}$ από τη σχέση*

$$\mu_f(A) = (\mu \circ f^{-1})(A) = \mu\{x \in X : f(x) \in A\} \quad (A \subseteq \mathbb{C}, \textit{Borel}).$$

Το μέτρο αυτό εξαρτάται μόνον από την κλάση της f στον $L^\infty(X, \mu)$. Το ουσιώδες σύνολο τιμών είναι ο «φορέας» $\mathrm{supp}\mu_f$ του μ_f, δηλαδή το συμπλήρωμα της ένωσης όλων των ανοικτών $U \subseteq \mathbb{C}$ με $\mu_f(U) = 0$.

$$(\textbf{ii}) \qquad \|f\|_\infty = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \mathrm{supp}\mu_f\}.$$

(**iii**) $\quad \mathrm{supp}\mu_f = \bigcap\{\overline{g(X)} : g \sim f\}$, *η τομή της κλειστής θήκης του συνόλου τιμών όλων των φραγμένων μετρήσιμων συναρτήσεων g που ταυτίζονται με την f μ-σχεδόν παντού.*

6.1 Το Φάσμα σε Άλγεβρες Banach

Ορισμός 6.2 *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα I. Ένα στοιχείο $A \in \mathcal{A}$ λέγεται **αντιστρέψιμο** αν υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ ώστε $AB = BA = I$. Το σύνολο των αντιστρεψίμων στοιχείων του $\mathcal{A}$ συμβολίζεται $Inv(\mathcal{A})$ ή $\mathcal{A}^{-1}$. Το **φάσμα** ενός στοιχείου $A \in \mathcal{A}$ είναι το σύνολο*

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \notin Inv(\mathcal{A})\}.$$

Αποδεικνύεται (δες π.χ. [2], Θεώρημα VII.3.6) ότι

> *Το φάσμα $\sigma(A)$ ενός στοιχείου A μιας άλγεβρας Banach με μονάδα είναι συμπαγές μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.*

Προς το παρόν, θα μας χρειασθεί μόνον το γεγονός ότι το $\sigma(A)$ είναι συμπαγές.

Θεώρημα 6.7 *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα I. Κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\|I - A\| < 1$, είναι αντιστρέψιμο και μάλιστα*

$$A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (I - A)^n.$$

Απόδειξη Εφόσον

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|(I - A)^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|I - A\|^n = \frac{1}{1 - \|I - A\|} < \infty,$$

η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (I - A)^n$ συγκλίνει απόλυτα, άρα (από την πληρότητα[11] της $\mathcal{A}$) συγκλίνει. Έστω $S = \lim S_n$ το όριό της. Εύκολα ελέγχεται ότι

$$S_n A = A S_n = I - (I - A)^{n+1} \to 0\,,$$

άρα $AS = SA = I$. $\square$

Πόρισμα 6.8 *Αν $A \in \mathcal{A}$, το σύνολο $\sigma(A)$ είναι φραγμένο. Μάλιστα, αν*

$$\rho(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$$

*είναι η **φασματική ακτίνα (spectral radius)** του A, τότε $\rho(A) \leq \|A\|$.*

Απόδειξη Αν $|\lambda| > \|A\|$, τότε $\|\frac{A}{\lambda}\| < 1$ οπότε από το Θεώρημα έχουμε $I - \frac{A}{\lambda} \in Inv(\mathcal{A})$ άρα $\lambda I - A \in Inv(\mathcal{A})$. $\square$

Πόρισμα 6.9 *Αν $A \in \mathcal{A}$, το σύνολο $\sigma(A)$ είναι κλειστό.*

Απόδειξη Δείχνουμε ότι το $\mathbb{C} \backslash \sigma(A)$ είναι ανοικτό. Έστω $\lambda_o \notin \sigma(A)$. Τότε το $A - \lambda_o I$ είναι αντιστρέψιμο, και για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \|I - (A - \lambda_o I)^{-1}(A - \lambda I)\| &= \|(A - \lambda_o I)^{-1}((A - \lambda_o I) - (A - \lambda I))\| \\ &\leq |\lambda - \lambda_o| \|(A - \lambda_o I)^{-1}\|. \end{aligned}$$

Επομένως αν το $|\lambda - \lambda_o|$ είναι αρκετά μικρό, τότε $\|I - (A - \lambda_o I)^{-1}(A - \lambda I)\| < 1$ οπότε το $(A - \lambda_o I)^{-1}(A - \lambda I)$ είναι αντιστρέψιμο, άρα και το $A - \lambda I$. $\square$

[11] Σ'έναν χώρο Banach, αν μια σειρά συγκλίνει απόλυτα, τότε (τα μερικά της αθροίσματα αποτελούν ακολουθία Cauchy, άρα) συγκλίνει.

6.2 Το φάσμα ενός τελεστή

Αν $\mathcal{X}$ είναι χώρος *Banach*, ένα στοιχείο T της άλγεβρας Banach $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ είναι αντιστρέψιμο αν και μόνον αν είναι 1-1 και επί (γιατί ο αντίστροφός του είναι αυτομάτως φραγμένος από το Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης).

Παρατήρηση 6.10 *Ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν είναι κάτω φραγμένος (δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\|Tx\| \geq \delta\|x\|$ για κάθε $x \in \mathcal{X}$) και έχει πυκνό σύνολο τιμών.*

Απόδειξη Είναι σαφές ότι ένας αντιστρέψιμος τελεστής ικανοποιεί τις δύο αυτές συνθήκες (με $\delta = \|T^{-1}\|^{-1}$).

Αντίστροφα, αν $\mathcal{Y} = T(\mathcal{X})$, η ανισότητα $\|Tx\| \geq \delta\|x\|$ δείχνει ότι η απεικόνιση $S_o : \mathcal{Y} \to \mathcal{X} : Tx \to x$ είναι καλά ορισμένη (γιατί ο T είναι 1-1) και φραγμένη (από $1/\delta$). Συνεπώς, ο S_o επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $S : \overline{\mathcal{Y}} \to \mathcal{X}$ με $STx = x$ για κάθε $x \in \mathcal{X}$ και $TSy = y$ για κάθε $y \in Y$, άρα και κάθε $y \in \overline{\mathcal{Y}}$, αφού ο TS είναι συνεχής. Επομένως, αν $\overline{\mathcal{Y}} = \mathcal{X}$, τότε ο T είναι αντιστρέψιμος και $S = T^{-1}$. $\square$

Από την Παρατήρηση αυτή προκύπτει ότι το φάσμα ενός τελεστή A μπορεί να αναλυθεί σε περισσότερα κομμάτια (που δεν έχουν έννοια για ένα στοιχείο μιας αυθαίρετης άλγεβρας Banach): Αν $\lambda \in \sigma(A)$, μπορεί ο $A - \lambda I$ να μην είναι κάτω φραγμένος (ειδικότερα, να μην είναι 1-1) ή να μην έχει πυκνό σύνολο τιμών (ή και τα δύο). Αυτό οδηγεί στους ακόλουθους ορισμούς:

Ορισμός 6.3 *Έστω $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Το* ***σημειακό φάσμα (point spectrum)*** *$\sigma_p(A)$ του A είναι το σύνολο των ιδιοτιμών:*

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(A - \lambda I) \neq \{0\}\}.$$

Το ***προσεγγιστικά σημειακό φάσμα (approximate point spectrum)*** *$\sigma_a(A)$ του A είναι το σύνολο των* ***προσεγγιστικών ιδιοτιμών (approximate eigenvalues)****, δηλαδή το σύνολο των λ ώστε ο $A - \lambda I$ να μην είναι κάτω φραγμένος:*

$$\sigma_a(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0 \; \exists x_\varepsilon \in \mathcal{X} \; : \|(A - \lambda I)x_\varepsilon\| < \varepsilon\|x_\varepsilon\|\}.$$

*Το **φάσμα συμπίεσης (compression spectrum)** $\sigma_c(A)$ του A είναι το σύνολο*

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{(A - \lambda I)(\mathcal{X})} \neq \mathcal{X}\}.$$

Ένα $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι προσεγγιστική ιδιοτιμή του A αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία $(x_n) \subseteq \mathcal{X}$ με $\|x_n\| = 1$ ώστε $\|(A - \lambda I)x_n\| \to 0$.

Τα σύνολα $\sigma_a(A)$ και $\sigma_c(A)$ δεν είναι ξένα εν γένει. Σε χώρους πεπερασμένης διάστασης είναι ίσα και ταυτίζονται με το (σημειακό) φάσμα. Σε απειροδιάστατους χώρους μπορεί να μην ταυτίζονται[12]. Πάντοτε όμως, όπως προκύπτει από την παρατήρηση 6.10,

Πρόταση 6.11 *Η ένωση $\sigma_a(A) \cup \sigma_c(A)$ ισούται με $\sigma(A)$.*

Πρόταση 6.12 *Το σύνορο $\partial\sigma(A)$ περιέχεται στο $\sigma_a(A)$.*

Απόδειξη Έστω $\lambda \in \partial\sigma(A)$. Υπάρχει ακολουθία $(\lambda_n) \in \mathbb{C}\backslash\sigma(A)$ που συγκλίνει στο λ.

Έστω $B = A - \lambda I$ και $B_n = A - \lambda_n I$. Επίσης, οι B_n είναι αντιστρέψιμοι και φυσικά $B_n \to B$.

Υποθέτω ότι $\lambda \notin \sigma_a(A)$. Τότε ο B είναι κάτω φραγμένος, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\|Bx\| \geq 2\delta$ για κάθε $x \in \mathcal{X}$ με $\|x\| = 1$. Αλλά $B_n x \to Bx$ ομοιόμορφα στην μοναδιαία σφαίρα του $\mathcal{X}$, άρα υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε $\|B_n x\| > \delta$ για κάθε $x \in \mathcal{X}$ με $\|x\| = 1$. Επομένως έχουμε $\|B_n x\| > \delta\|x\|$ για κάθε $x \in \mathcal{X}$, και κάθε $n \geq n_o$.

Έστω $x \in \mathcal{X}$. Θα δείξουμε ότι $x \in \overline{B(\mathcal{X})}$. Κάθε B_n είναι επί του $\mathcal{X}$, άρα υπάρχει $y_n \in \mathcal{X}$ με $B_n y_n = x$.

Όμως $\|x\| = \|B_n y_n\| > \delta\|y_n\|$ για κάθε $n \geq n_o$ οπότε

$$\|By_n - x\| \leq \|B_n y_n - x\| + \|(B - B_n)y_n\| = 0 + |\lambda_n - \lambda|\|y_n\| < |\lambda_n - \lambda|\frac{\|x\|}{\delta}$$

άρα $By_n \to x$. Δείξαμε ότι $\overline{B(\mathcal{X})} = \mathcal{X}$, πράγμα που σημαίνει ότι $\lambda \notin \sigma_c(A)$. Αλλά έχουμε υποθέσει ότι $\lambda \notin \sigma_a(A)$. Επομένως $\lambda \notin \sigma(A)$, πράγμα που

[12] Για παράδειγμα, όπως θα δούμε στο Παράδειγμα 6.16, για τον τελεστή της μετατόπισης S, το $\sigma_a(S)$ είναι η μοναδιαία περιφέρεια $\mathbb{T}$, ενώ το $\sigma_c(S)$ είναι ο ανοικτός μοναδιαίος δίσκος $\mathbb{D}$, οπότε $\sigma_c(S) \cap \sigma_a(S) = \emptyset$.

έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι $\lambda \in \partial\sigma(A) \subseteq \sigma(A)$ (το $\sigma(A)$ είναι κλειστό). $\square$

Παρατήρηση 6.13 Μια πιο άμεση απόδειξη για την περίπτωση που ο $\mathcal{X}$ είναι χώρος Hilbert είναι η ακόλουθη:

Αν το $B(\mathcal{X})$ δεν είναι πυκνό στον $\mathcal{X}$, υπάρχει μη μηδενικό y κάθετο στο $B(\mathcal{X})$. Θέτουμε $y_n = \frac{B_n^{-1}y}{\|B_n^{-1}y\|}$. Τότε $By_n \in B(\mathcal{X})$ και $y \perp B(\mathcal{X})$. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε λοιπόν

$$\|By_n - B_n y_n\|^2 = \|By_n - \frac{y}{\|B_n^{-1}y\|}\|^2 = \|By_n\|^2 + \frac{\|y\|^2}{\|B_n^{-1}y\|^2} \geq \|By_n\|^2$$

Επομένως $\|By_n\| \leq \|By_n - B_n y_n\| \leq \|B - B_n\|\|y_n\| \to 0$ αφού $\|y_n\| = 1$. Έπεται ότι $\|By_n\| \to 0$, άρα ο B δεν είναι κάτω φραγμένος, και συνεπώς $\lambda \in \sigma_a(A)$.

Το φάσμα συμπίεσης είναι κατά κάποιον τρόπο δυϊκό προς το σημειακό φάσμα. Αυτό φαίνεται πιο εύκολα σε χώρους Hilbert. Θα χρειασθεί ένα Λήμμα:

Λήμμα 6.14 *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Τότε*

$$\ker T = (T^*(\mathcal{H}))^{\perp} \qquad \textit{ισοδύναμα} \qquad \overline{T(\mathcal{H})} = (\ker T^*)^{\perp}.$$

Επομένως ο T είναι 1-1 αν και μόνον αν το σύνολο τιμών του T^* είναι πυκνό.

Απόδειξη Έχουμε $Tx = 0$ αν και μόνον αν $\langle Tx, y\rangle = 0$ για κάθε $y \in \mathcal{H}$, αν και μόνον αν $\langle x, T^*y\rangle = 0$ για κάθε $y \in \mathcal{H}$, αν και μόνον αν το x είναι κάθετο στο σύνολο τιμών του T^*. Για την δεύτερη ισότητα, εφαρμόζοντας την πρώτη στον T^* έχουμε $(\ker T^*)^{\perp} = (T(\mathcal{H}))^{\perp\perp} = \overline{T(\mathcal{H})}$. $\square$

Λήμμα 6.15 *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Τότε*

(i) $\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}$

(ii) $\sigma_p(T) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_c(T^*)\}$ *και* $\sigma_c(T) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma_p(T^*)\}$.

Απόδειξη Οι σχέσεις $AB = I = BA$ και $B^*A^* = I = A^*B^*$ είναι ισοδύναμες. Επομένως ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν ο A^* είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. Η (i) έπεται θέτοντας $A = T - \lambda I$.

Για την (ii), εφαρμόζουμε το προηγούμενο Λήμμα: έχουμε $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$ αν και μόνον αν το $(T^* - \bar{\lambda} I)(\mathcal{H})$ δεν είναι πυκνό. $\square$

Παράδειγμα 6.16 *Αν $S \in \mathcal{B}(\ell^2)$ είναι ο τελεστής της μετατόπισης $Se_n = e_{n+1}$, τότε*

$$\sigma_p(S) = \emptyset, \quad \sigma_a(S) = \partial\mathbb{D}, \quad \sigma_c(S) = \mathbb{D} \text{ και άρα } \sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}.$$

Απόδειξη **(i)** Η σχέση $\|Sx\| = \|x\|$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$ δείχνει ότι $\|S\| = 1$, άρα $\sigma(S) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$.

(ii) Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ και $x = (x_n) \in \mathcal{H}$ ώστε $Sx = \lambda x$, δηλαδή

$$(0, x_1, x_2, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots).$$

Αν $\lambda = 0$ τότε η σχέση αυτή δείχνει ότι $x = 0$. Αν $\lambda \neq 0$ τότε από την σχέση $\lambda x_1 = 0$ έχουμε $x_1 = 0$, από την σχέση $\lambda x_2 = x_1$ έχουμε $x_2 = 0$ και ούτω καθεξής, άρα πάλι $x = 0$. Επομένως $\sigma_p(S) = \emptyset$.

(iii) Ισχυρίζομαι ότι $\sigma_p(S^*) = \mathbb{D}$. Τότε (από το Λήμμα 6.15) θα έχουμε $\sigma_c(S) = \mathbb{D}$, οπότε $\mathbb{D} \subseteq \sigma(S)$, άρα $\sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}$ εφόσον το $\sigma(S)$ είναι κλειστό.

Πράγματι, έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ και $x = (x_n) \in \mathcal{H}$ τέτοιο ώστε $S^*x = \lambda x$, δηλαδή

$$(x_2, x_3, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots).$$

Τότε $x_2 = \lambda x_1,\ x_3 = \lambda x_2 = \lambda^2 x_1$ και γενικά $x_{n+1} = \lambda^n x_1$. Επειδή $x \in \ell^2$, έπεται ότι $\sum_n |\lambda|^{2n} < \infty$ άρα $|\lambda| < 1$.

Αντίστροφα αν $\lambda \in \mathbb{D}$ τότε το διάνυσμα $x = (1, \lambda, \lambda^2, \ldots)$ ανήκει στον ℓ^2 και ικανοποιεί $S^*x = \lambda x$.

(iv) Μένει να δειχθεί ότι αν $\lambda \in \mathbb{D}$ τότε $\lambda \notin \sigma_a(S)$, δηλαδή ότι ο $S - \lambda I$ είναι κάτω φραγμένος. Πράγματι για κάθε $x \in \mathcal{H}$ έχουμε

$$\|(S - \lambda I)x\| \geq |\|Sx\| - \|\lambda x\|| = |\|x\| - \|\lambda x\|| = (1 - |\lambda|)\|x\|.$$

Παράδειγμα 6.17 *Ορίζουμε την απεικόνιση $T : c_{oo} \to c_{oo}$*[13] *από την σχέση $Te_n = \frac{1}{n} e_{n+1}$ (και επεκτείνουμε γραμμικά). Ελέγχεται εύκολα ότι ο T είναι φραγμένος ως προς την νόρμα του ℓ^2, άρα επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή από τον ℓ^2 στον εαυτό του (που συμβολίζουμε επίσης με T). Σημείωσε ότι $T = SD$ όπου S είναι ο τελεστής της μετατόπισης και $De_n = \frac{1}{n} e_n$.*

[13] Ο χώρος c_{oo} είναι ο χώρος των (μιγαδικών) ακολουθιών με πεπερασμένο φορέα, δηλαδή των (x_n) ώστε $x_n = 0$ έξω από ένα πεπερασμένο σύνολο δεικτών (που εξαρτάται βέβαια από το x).

Τότε $\sigma(T) = \{0\}$. *Μάλιστα* $\sigma_p(T) = \emptyset$ *και* $\sigma_a(T) = \sigma_c(T) = \{0\}$.

Εφόσον $\sigma(D) = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ *και* $\sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}$, *το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι το* σ *δεν συμπεριφέρεται καλά ως προς την σύνθεση τελεστών.*

Απόδειξη (i) Κατ'αρχήν ισχύει ότι $0 \in \sigma_a(T)$ γιατί $\|(T-0)e_n\| = \frac{1}{n} \to 0$. Όμως $0 \notin \sigma_p(T)$ διότι ο $T = SD$ είναι 1-1. Επίσης $0 \in \sigma_c(T)$ διότι $\langle Te_n, e_1\rangle = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $e_1 \perp (T-0)(\mathcal{H})$.

(ii) Έστω $\lambda \neq 0$. Θα δείξουμε ότι ο $S_\lambda = \lambda I - T = \lambda(I - \frac{T}{\lambda})$ είναι αντιστρέψιμος, οπότε θα έχουμε $\sigma(T) = \{0\}$ και $\sigma_p(T) = \emptyset$.

Παρατηρούμε ότι $\|T^k\| \leq \dfrac{1}{k!}$ γιατί

$$T^k\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n(n+1)\dots(n+k-1)} e_{n+k}$$

άρα

$$\|T^k\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{(n(n+1)\dots(n+k-1))^2} \leq \frac{1}{(k!)^2}\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 .$$

Επομένως

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\|\left(\frac{T}{\lambda}\right)^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{1}{|\lambda|^k} = \exp\frac{1}{|\lambda|}$$

πράγμα που δείχνει ότι αν $S_n = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n}(\frac{T}{\lambda})^k$ τότε η (S_n) συγκλίνει, έστω στον T_λ. Εφόσον

$$S_\lambda S_n = S_n S_\lambda = I - \left(\frac{T}{\lambda}\right)^{n+1} \to I$$

έπεται ότι $S_\lambda T_\lambda = T_\lambda S_\lambda = I$. $\square$

Άσκηση 6.18 *Έστω* $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$. *Ορίζουμε την απεικόνιση* $A : c_{oo} \to c_{oo}$ *από την σχέση* $Ae_n = a_n e_{n+1}$. *Πότε η σχέση αυτή ορίζει τελεστή από τον* ℓ^2 *στον εαυτό του; Πότε ισχύει* $\sigma(A) = \{0\}$;

6.3 Το φάσμα αυτοσυζυγούς τελεστή

Πρόταση 6.19 *Έστω $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ φυσιολογικός τελεστής. Τότε $\sigma(A) = \sigma_a(A)$.*

Απόδειξη Έστω $\lambda \notin \sigma_a(A)$. Αρκεί να δειχθεί ότι $\lambda \notin \sigma_c(A)$, δηλαδή ότι το $(A-\lambda I)\mathcal{H}$ είναι πυκνό στον $\mathcal{H}$. Αν $x \perp (A-\lambda I)\mathcal{H}$, τότε $(A^* - \bar{\lambda} I)x = 0$. Αλλά ο $A - \lambda I$ είναι κάτω φραγμένος, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\|(A-\lambda I)x\| \geq \delta \|x\|$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$. Επειδή ο $A - \lambda I$ είναι φυσιολογικός, έχουμε $\|(A^* - \bar{\lambda} I)x\| = \|(A-\lambda I)x\| \geq \delta\|x\|$, και συνεπώς $x = 0$. Επομένως $\lambda \notin \sigma_c(A)$. □

Πρόταση 6.20 *Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Τότε $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.*

Απόδειξη Αν $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, τότε, για κάθε $x \in \mathcal{H} \backslash \{0\}$,

$$\begin{aligned} 0 < |\lambda - \bar{\lambda}|.\|x\|^2 &= |\langle (A-\lambda I)x, x\rangle - \langle (A-\bar{\lambda} I)x, x\rangle| \\ &= |\langle (A-\lambda I)x, x\rangle - \langle x, (A-\lambda I)x\rangle| \leq 2\|(A-\lambda I)x\|\|x\| \end{aligned}$$

οπότε
$$\|(A-\lambda I)x\| \geq \frac{|\lambda - \bar{\lambda}|}{2}\|x\|.$$

Επομένως $\lambda \notin \sigma_a(A)$. Αλλά $\sigma_a(A) = \sigma(A)$ διότι ο A είναι φυσιολογικός. □

Πρόταση 6.21 *Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Τότε ένας από τους αριθμούς $\|A\|$ ή $-\|A\|$ ανήκει στο $\sigma(A)$. Ειδικότερα,*[14]

(α) $\sigma(A) \neq \emptyset$ και

(β) $\rho(A) = \|A\|$ (όπου $\rho(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$).

Απόδειξη Θα δείξουμε ότι ο αριθμός $\|A\|^2$ ανήκει στο $\sigma(A^2)$. Τότε το γινόμενο $(A - \|A\|I)(A + \|A\|I) = (A^2 - \|A\|^2 I)$ δεν θα είναι αντιστρέψιμο, οπότε οι τελεστές $(A - \|A\|I)$ και $(A + \|A\|I)$ δεν μπορεί και οι δύο να είναι αντιστρέψιμοι.

Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \in \mathcal{H}$ έχουμε (εφόσον $\langle A^2x, \lambda^2 x\rangle \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} \|A^2x - \lambda^2 x\|^2 &= \langle A^2x - \lambda^2 x, A^2 x - \lambda^2 x\rangle = \|A^2 x\|^2 - 2\langle A^2 x, \lambda^2 x\rangle + \|\lambda^2 x\|^2 \\ &= \|A^2x\|^2 - 2\lambda^2\|Ax\|^2 + \lambda^4\|x\|^2. \end{aligned}$$

[14] Υπενθυμίζω ότι (όπως αποδεικνύεται με μεθόδους Μιγαδικής Ανάλυσης) το φάσμα οποιουδήποτε τελεστή είναι μη κενό. Η ισότητα $\rho(A) = \|A\|$ δεν ισχύει όμως εν γένει για μη φυσιολογικούς τελεστές (παράδειγμα $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$).

Επειδή όμως $\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1\}$, υπάρχει ακολουθία (x_n) με $\|x_n\| = 1$ και $\|Ax_n\| \to \|A\|$. Θέτοντας $\lambda = \|A\|$ στην προηγούμενη ταυτότητα, έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}\|A^2x_n - \lambda^2 x_n\|^2 &= \|A^2x_n\|^2 - 2\lambda^2\|Ax_n\|^2 + \lambda^4 \\ &\leq (\|A\|\|Ax_n\|)^2 - 2\lambda^2\|Ax_n\|^2 + \lambda^4 = \lambda^4 - \lambda^2\|Ax_n\|^2 \to 0.\end{aligned}$$

Επομένως ο αριθμός $\lambda^2 = \|A\|^2$ είναι προσεγγιστική ιδιοτιμή του A^2. □

7 Συνεχείς συναρτήσεις ενός αυτοσυζυγούς τελεστή

7.1 Ο συναρτησιακός λογισμός για πολυώνυμα

Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach με μονάδα. Σταθεροποιούμε ένα $A \in \mathcal{A}$. Για κάθε πολυώνυμο p της μορφής $p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$, θέτουμε $p(A) = \sum_{k=0}^n a_k A^k$. Θεωρούμε το $p(A) \in \mathcal{A}$ ως συνάρτηση, όχι του A, αλλά του πολυωνύμου p: Ο **συναρτησιακός λογισμός για πολυώνυμα** είναι η απεικόνιση

$$\Phi_o : p \to p(A)$$

από την άλγεβρα $\mathcal{P}$ των πολυωνύμων με τιμές στην $\mathcal{A}$. Η απεικόνιση Φ_o είναι μορφισμός αλγεβρών και καθορίζεται μοναδικά από τις σχέσεις $\mathbf{1} \to A$ και $p_1 \to A$ (όπου $p_1(t) = t$).

Ειδικότερα αν $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ και $A = A^*$ τότε $(p(A))^* = \bar{p}(A)$, δηλαδή ο συναρτησιακός λογισμός είναι $*$-μορφισμός.

Πρόταση 7.1 (Θεώρημα Φασματικής Απεικόνισης I) *Αν $A \in \mathcal{A}$ και p είναι πολυώνυμο, τότε*

$$\sigma(p(A)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Απόδειξη Αν $\mu \in \mathbb{C}$, το πολυώνυμο $q(z) \equiv p(z) - \mu$ παραγοντοποιείται: $q(z) = c(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \dots (z - \lambda_n)$. Τότε

$$p(A) - \mu I = c(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \dots (A - \lambda_n I).$$

Αν κάθε $A - \lambda_k I$ είναι αντιστρέψιμος, τότε βέβαια το γινόμενό τους $p(A) - \mu I$ είναι αντιστρέψιμο. Αντίστροφα αν το $p(A) - \mu I$ είναι αντιστρέψιμο, επειδή οι $A - \lambda_k I$ μετατίθενται, θα είναι όλοι αντιστρέψιμοι[15]. Επομένως $\mu \in \sigma(p(A))$ αν και μόνον αν $\lambda_k \in \sigma(A)$ για κάποιο $k = 1, \ldots, n$. Αλλά τα λ_k είναι οι ρίζες του q, δηλαδή είναι ακριβώς οι μιγαδικοί αριθμοί λ που ικανοποιούν $p(\lambda) = \mu$. Δείξαμε λοιπόν ότι $\mu \in \sigma(p(A))$ αν και μόνον αν $p(\lambda) = \mu$ για κάποιο $\lambda \in \sigma(A)$, δηλαδή αν και μόνον αν $\mu \in \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$. $\square$

7.2 Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις

Έστω $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ αυτοσυζυγής τελεστής. Ο στόχος αυτής της παραγράφου είναι να επεκτείνουμε τον συναρτησιακό λογισμό $\Phi_o : p \to p(A)$ από τα πολυώνυμα στις συνεχείς συναρτήσεις που είναι ορισμένες στο $\sigma(A)$. Θα στηριχθούμε στο γεγονός ότι η απεικόνιση $p \to p(A)$ είναι συνεχής με την ακόλουθη έννοια:

Θεώρημα 7.2 *Αν $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ και $A = A^*$ τότε*

$$\|p(A)\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} \equiv \|p\|_{\sigma(A)}.$$

Απόδειξη Ας υποθέσουμε πρώτα ότι το p έχει πραγματικούς συντελεστές. Τότε ο τελεστής $p(A)$ είναι αυτοσυζυγής, άρα από την Πρόταση 6.21 η νόρμα του ισούται με την φασματική ακτίνα, επομένως

$$\|p(A)\| = \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(p(A))\}.$$

Αλλά $\sigma(p(A)) = p(\sigma(A))$ από την Πρόταση 7.1, και η ζητούμενη ισότητα έπεται. Για την γενική περίπτωση, παρατήρησε ότι αν $p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$, τότε

$$p(A)^* p(A) = (\sum_{k=0}^n a_k A^k)^* (\sum_{r=0}^n a_r A^r) = (\sum_{k=0}^n \bar{a}_k A^k)(\sum_{r=0}^n a_r A^r) = q(A)$$

(εφόσον $A = A^*$) όπου q είναι το πολυώνυμο $q(t) = \bar{p}(t)p(t)$ που έχει πραγματικούς συντελεστές. Από την προηγούμενη παράγραφο λοιπόν έχουμε

$$\|q(A)\| = \sup\{|q(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

[15] Το $q(A)$ μπορεί να γραφεί $q(A) = (A - \lambda_k I)B = B(A - \lambda_k I)$. Πολλαπλασιάζοντας δεξιά και αριστερά με $(q(A))^{-1}$, συμπεραίνουμε ότι το $A - \lambda_k I$ έχει αριστερό και δεξί αντίστροφο, άρα είναι αντιστρέψιμο.

Όμως $\|p(A)\|^2 = \|p(A)^* p(A)\| = \|q(A)\|$ από την ιδιότητα C* και επομένως

$$\begin{aligned}\|p(A)\|^2 &= \|q(A)\| = \sup\{|q(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} \\ &= \sup\{|\bar{p}(\lambda)p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} = (\sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\})^2.\end{aligned}$$

Η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

Από το Θεώρημα έπεται ότι αν δύο πολυώνυμα p, q ταυτίζονται στο $\sigma(A)$, τότε $p(A) = q(A)$ (πράγματι $\|p(A) - q(A)\| = \sup\{|p(\lambda) - q(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} = 0$).

Επομένως το $\Phi_o(p)$ εξαρτάται μόνον από τις τιμές του p στο $\sigma(A)$. Αν λοιπόν περιορίσουμε τον Φ_o στην άλγεβρα $\mathcal{P}(\sigma(A))$ των *πολυωνυμικών συναρτήσεων που είναι ορισμένες στο συμπαγές υποσύνολο* $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$, τότε ο συναρτησιακός λογισμός

$$\Phi_o : (\mathcal{P}(\sigma(A)), \|.\|_{\sigma(A)}) \to (\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|.\|)$$

είναι όχι μόνο *-μορφισμός *-αλγεβρών, αλλά και ισομετρία χώρων με νόρμα. Έπεται ότι η απεικόνιση αυτή έχει μοναδική συνεχή επέκταση (η οποία θα είναι ισομετρική) ορισμένη στην πλήρωση του χώρου των πολυωνυμικών συναρτήσεων στο $\sigma(A)$, ως προς την νόρμα supremum. Από το Θεώρημα Stone - Weierstrass, η πλήρωση αυτή είναι η C^*-άλγεβρα των συνεχών συναρτήσεων $C(\sigma(A))$.

Ορισμός 7.1 *Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Ο* ***συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις*** *είναι η μοναδική συνεχής επέκταση*

$$\Phi_c : (C(\sigma(A)), \|.\|_{\sigma(A)}) \to (\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|.\|) : f \to f(A)$$

της απεικόνισης $\Phi_o : p \to p(A)$. Δηλαδή αν η f είναι συνεχής στο $\sigma(A)$, ο τελεστής $f(A) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ορίζεται μοναδικά από το όριο

$$f(A) = \lim p_n(A) \text{ όπου } \|p_n - f\|_{\sigma(A)} \to 0.$$

Παρατηρήσεις 7.3 (i) Ο συναρτησιακός λογισμός για πολυώνυμα Φ_o ορίζεται κατά εντελώς αλγεβρικό τρόπο, και επομένως ορίζεται για οποιονδήποτε τελεστή A (μάλιστα για οποιοδήποτε στοιχείο οποιασδήποτε (μιγαδικής) άλγεβρας). Αντίθετα, ο ορισμός του συναρτησιακού λογισμού για συνεχείς συναρτήσεις Φ_c είναι αλγεβρο-τοπολογικός και στηρίζεται στο Θεώρημα 7.2. Επομένως ο Φ_c δεν ορίζεται για οποιονδήποτε τελεστή A, αλλά μόνον για αυτοσυζυγή (ή για φυσιολογικό, όπως θα δούμε αργότερα).

Παραδείγματος χάριν, αν $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, τότε $\sigma(A) = \{0\}$ (ο A είναι μηδενοδύναμος) αλλά, παρόλο που η συνάρτηση $f(t) = \sqrt{t}$ είναι συνεχής στο $\sigma(A)$, δεν ορίζεται τελεστής $f(A)$. Μάλιστα, δεν υπάρχει τελεστής B ώστε $B^2 = A$ (απόδειξη: Άσκηση!).

(ii) Από την συνέχεια των αλγεβρικών πράξεων και της ενέλιξης στον $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ έπεται άμεσα ότι ο επεκτεταμένος συναρτησιακός λογισμός είναι και αυτός *-μορφισμός.

(iii) Είναι φανερό ότι για κάθε πολυώνυμο p ο τελεστής $p(A)$ μετατίθεται με τον A. Το ίδιο επομένως ισχύει και για τον $f(A)$, αν $f \in C(\sigma(A))$.

Πιο ενδιαφέρον όμως, όπως θα δούμε, είναι ότι *ο $f(A)$ μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον A.* Πράγματι, αν $AT = TA$ τότε $A^2T = ATA = TA^2$ και επαγωγικά $A^nT = TA^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως $p(A)T = Tp(A)$ για κάθε πολυώνυμο p, άρα και $f(A)T = Tf(A)$ για κάθε $f \in C(\sigma(A))$, λόγω συνέχειας. Δείξαμε λοιπόν ότι

Παρατήρηση 7.4 *Αν $f \in C(\sigma(A))$, ο $f(A)$ μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον A. Δηλαδή ο συναρτησιακός λογισμός παίρνει τιμές στον δεύτερο μεταθέτη $\{A\}''$ του A, όπου*

*Ο **μεταθέτης (commutant)** $\mathcal{S}'$ ενός υποσυνόλου $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι το σύνολο των τελεστών που μετατίθενται με κάθε στοιχείο του $\mathcal{S}$:*

$$\mathcal{S}' = \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : TS = ST \text{ για κάθε } S \in \mathcal{S}\}.$$

Θεώρημα 7.5 (Θεώρημα Φασματικής Απεικόνισης II) *Αν $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι αυτοσυζυγής τελεστής και $f \in C(\sigma(A))$,*

$$\sigma(f(A)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Απόδειξη Αν $\mu \notin \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$ τότε η συνάρτηση $g(\lambda) = f(\lambda) - \mu$ δεν μηδενίζεται πουθενά στο $\sigma(A)$, άρα υπάρχει $h \in C(\sigma(A))$ ώστε $hg = \mathbf{1}$ ($h(t) = (f(t) - \mu)^{-1}$). Τότε όμως $h(A)g(A) = I = g(A)h(A)$, άρα ο $f(A) - \mu I$ έχει αντίστροφο, τον αντίστροφο $h(A)$. Συνεπώς $\mu \notin \sigma(f(A))$.

[Παρατήρησε ότι αυτό το μέρος της απόδειξης είναι καθαρά αλγεβρικό: εξαρτάται μόνον από το γεγονός ότι η απεικόνιση $f \to f(A)$ είναι μορφισμός αλγεβρών που διατηρεί την μονάδα, άρα απεικονίζει αντιστρέψιμα στοιχεία σε αντιστρέψιμα στοιχεία.]

Αντίστροφα έστω $\mu \in \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$, οπότε $\mu = f(\lambda_o)$ για κάποιο $\lambda_o \in \sigma(A)$. Θα δείξω ότι ο τελεστής $f(A) - \mu I$ δεν είναι αντιστρέψιμος. Ισχυρίζομαι ότι

$$f(A) - \mu I = \lim_n q_n(A),$$

όπου (q_n) ακολουθία πολυωνύμων με $q_n(\lambda_o) = 0$ για κάθε n. Πράγματι, έστω (p_n) μια ακολουθία πολυωνύμων ώστε $p_n(t) \to f(t) - \mu = g(t)$ ομοιόμορφα στο $\sigma(A)$, άρα και $p_n(\lambda_o) \to g(\lambda_o) = 0$. Αν θέσουμε $q_n(t) = p_n(t) - p_n(\lambda_o)$ (δηλαδή $q_n = p_n - p_n(\lambda_o)\mathbf{1}$), έχουμε $q_n(\lambda_o) = 0$ και $\|q_n - g\|_{\sigma(A)} \to 0$, άρα $q_n(A) \to g(A) = f(A) - \mu I$ (Θεώρημα 7.2).

Εφόσον $\lambda_o \in \sigma(A)$, έπεται ότι $0 = q_n(\lambda_o) \in q_n(\sigma(A))$. Αλλά $q_n(\sigma(A)) = \sigma(q_n(A))$ από το Θεώρημα Φασματικής Απεικόνισης για πολυώνυμα (Πρόταση 7.1), άρα οι τελεστές $q_n(A)$ δεν είναι αντιστρέψιμοι. Εφόσον το σύνολο των αντιστρέψιμων στοιχείων του $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι ανοικτό, έπεται[16] ότι ο $f(A) - \mu I = \lim q_n(A)$ δεν είναι αντιστρέψιμος. □

7.3 Η τετραγωνική ρίζα αυτοσυζυγούς τελεστή

Ως εφαρμογή του συναρτησιακού λογισμού για συνεχείς συναρτήσεις, θα δείξουμε ότι ένας θετικός τελεστής έχει (μοναδική θετική) τετραγωνική ρίζα. Θυμίζουμε ότι ένας $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ λέγεται θετικός αν $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$, και ότι ένας θετικός τελεστής είναι πάντα αυτοσυζυγής.

Πρόταση 7.6 *Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Αν $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$ τότε υπάρχει μοναδικός αυτοσυζυγής $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ με $\sigma(B) \subseteq \mathbb{R}^+$ ώστε $B^2 = A$. Γράφουμε $B = A^{1/2}$.*

Απόδειξη Η συνάρτηση $f(t) = \sqrt{t}$ είναι καλά ορισμένη (πραγματική) και συνεχής στο $\sigma(A)$. Επομένως αν θέσουμε $B = f(A)$, έχουμε $B = B^*$, $\sigma(B) = f(\sigma(A)) \subseteq \mathbb{R}^+$ και $B^2 = A$.

Η μοναδικότητα αφήνεται ως (ενδιαφέρουσα!) άσκηση για τον αναγνώστη. □

---

[16] *Άλλη απόδειξη:* Αν ο $g(A) = f(A) - \mu I$ ήταν αντιστρέψιμος, τότε για αρκετά μεγάλο $n \in \mathbb{N}$ η νόρμα

$$\|I - (g(A)^{-1}q_n(A))\| \leq \|g(A)^{-1}\|\|g(A) - q_n(A))\|$$

θα ήταν μικρότερη από 1 και άρα ο $g(A)^{-1}q_n(A)$ θα ήταν αντιστρέψιμος από το Θεώρημα 6.7, ενώ ο $q_n(A)$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

Λήμμα 7.7 *Ένας αυτοσυζυγής τελεστής A στον $\mathcal{H}$ είναι θετικός αν και μόνον αν $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$.*

Απόδειξη Έστω ότι $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$. Τότε ορίζεται ο $B = A^{1/2}$. Για κάθε $x \in \mathcal{H}$,

$$\langle Ax, x\rangle = \langle B^2 x, x\rangle = \langle Bx, Bx\rangle = \|Bx\|^2 \geq 0$$

άρα ο A είναι θετικός.

Αντίστροφα έστω ότι υπάρχει $\lambda \in \sigma(A)\setminus\mathbb{R}^+$. Τότε $\lambda < 0$ (υπενθυμίζω ότι $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ διότι $A = A^*$). Εφόσον $A = A^*$, έχουμε $\lambda \in \sigma_a(A)$ (Πρόταση 6.19), άρα υπάρχει ακολουθία (x_n) στον $\mathcal{H}$ με $\|x_n\| = 1$ και $\|(A-\lambda I)x_n\| \to 0$. Τότε όμως

$$|\langle Ax_n, x_n\rangle - \lambda| = |\langle (A-\lambda I)x_n, x_n\rangle| \leq \|(A-\lambda I)x_n\|.\|x_n\| \to 0$$

οπότε $\langle Ax_n, x_n\rangle < 0$ για αρκετά μεγάλο n. $\square$

Σημείωσε ότι η υπόθεση $A = A^*$ δεν μπορεί να παραλειφθεί. Για παράδειγμα, ο $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ έχει μη αρνητικό φάσμα ($\sigma(A) = \{0\}$) αλλά δεν είναι θετικός: $\langle Ax, x\rangle = -1$ για $x = (-1, 1)$.

Συνοψίζουμε:

Θεώρημα 7.8 (Τετραγωνική ρίζα) *Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) Ο T είναι θετικός.

(β) Υπάρχει $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ θετικός ώστε $T = B^2$.

(γ) Υπάρχει $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ώστε $T = S^*S$.

(δ) $T = T^*$ και $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}^+$.

Απόδειξη (γ)⇒(α) Για κάθε $x \in \mathcal{H}$, $\langle Tx, x\rangle = \langle S^*Sx, x\rangle = \|Sx\|^2 \geq 0$.

(α)⇒(δ) Αν ο T είναι θετικός, τότε $T = T^*$, οπότε $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}^+$ από το Λήμμα 7.7.

(δ)⇒(β) Πρόταση 7.6.

(β)⇒(γ) Προφανές (πάρε $S = B$). $\square$

Παρατήρηση 7.9 Έπεται ειδικότερα ότι για κάθε $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ισχύει $\sigma(S^*S) \subseteq \mathbb{R}^+$. Αυτό είναι στοιχειώδες. Το αντίστοιχο αποτέλεσμα για στοιχεία μιας αυθαίρετης (μη μεταθετικής) C*-άλγεβρας είναι αληθές, αλλά όχι τόσο στοιχειώδες. Μάλιστα, συμπεριλαμβανόταν στον αρχικό ορισμό μιας C*-άλγεβρας, και μόνον αργότερα αποδείχθηκε ότι ήταν συνέπεια των άλλων ιδιοτήτων (ουσιαστικά της πληρότητας και της ιδιότητας C*).

Πόρισμα 7.10 *Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Ονομάζουμε $C^*(A)$ την μικρότερη C^*-υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ που περιέχει τον A και τον I. Η $C^*(A)$ είναι μεταθετική C^*-άλγεβρα και ισχύουν οι σχέσεις*

$$C^*(A) = \overline{[A^n : n = 0, 1, \ldots]} = \{f(A) : f \in C(\sigma(A))\}.$$

Επομένως για κάθε $f \in C(\sigma(A))$, ο τελεστής $f(A)$ είναι φυσιολογικός. Είναι αυτοσυζυγής αν και μόνον αν η f παίρνει πραγματικές τιμές στο $\sigma(A)$. Επίσης, $f(A) \geq 0$ αν και μόνον αν $f(\sigma(A)) \subseteq \mathbb{R}^+$.

Απόδειξη Κάθε C*-υπάλγεβρα της $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ που περιέχει τον A και τον I περιέχει την γραμμική θήκη

$$[A^n : n = 0, 1, \ldots] = \{p(A) : p \in \mathcal{P}\} \equiv \mathcal{B}_o.$$

Άρα $\{I, A\} \subseteq \mathcal{B}_o \subseteq C^*(A)$. Αλλά η $\mathcal{B}_o$ είναι (μεταθετική) άλγεβρα και είναι αυτοσυζυγής γιατί ο A είναι αυτοσυζυγής. Επομένως η κλειστή της θήκη, έστω $\mathcal{B}$, είναι C*-άλγεβρα, άρα περιέχει την $C^*(A)$. Συνεπώς $\mathcal{B} = C^*(A)$. Εξάλλου το σύνολο $\{f(A) : f \in C(\sigma(A))\}$ ισούται, όπως είδαμε, με την κλειστή θήκη του $\{p(A) : p \in \mathcal{P}\}$, δηλαδή με την $\mathcal{B}$.

Εφόσον η $C^*(A)$ είναι μεταθετική, κάθε $f(A)$ είναι φυσιολογικό. Επίσης $f(A)^* = \bar{f}(A)$, άρα έχουμε $f(A) = f(A)^*$ αν και μόνον αν η f είναι πραγματική συνάρτηση. Αν η f είναι μη αρνητική στο $\sigma(A)$ τότε θέτοντας $g(t) = \sqrt{f(t)}$ $(t \in \sigma(A))$ έχουμε $g(A)^* = g(A)$ και άρα $f(A) = g(A)^*g(A) \geq 0$. Αντίστροφα αν $f(A) \geq 0$ τότε $\sigma(f(A)) \subseteq \mathbb{R}^+$ και συνεπώς $f(\sigma(A)) \subseteq \mathbb{R}^+$ (Θεώρημα 7.5). $\square$

Πόρισμα 7.11 *Κάθε αυτοσυζυγής $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ γράφεται ως διαφορά δύο θετικών τελεστών $A = A_+ - A_-$ με $A_+A_- = A_-A_+ = 0$. Επομένως κάθε $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι γραμμικός συνδυασμός (το πολύ) τεσσάρων θετικών τελεστών.*

Απόδειξη Θέτουμε $A_+ = f_+(A)$ και $A_- = f_-(A)$ όπου $f_+(t) = \max\{t, 0\}$ και $f_-(t) = -\min\{t, 0\}$ $(t \in \sigma(A) \subseteq \mathbb{R})$.

7.4 Η πολική αναπαράσταση

Ορισμός 7.2 *Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ τυχαίος τελεστής. Η μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα του θετικού τελεστή T^*T συμβολίζεται $|T|$.*

Σημειώνουμε ότι ο $|T|$ δεν έχει όλες τις αναμενόμενες ιδιότητες της «απόλυτης τιμής».

Άσκηση 7.12 *Να βρεθούν δύο 2×2 πίνακες A, B ώστε να μην ισχύει η ανισότητα $|A + B| \leq |A| + |B|$.*

Κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός γράφεται σε πολική μορφή $z = u|z|$, όπου $|z| > 0$ και $|u| = 1$. Αντίστοιχη γραφή υπάρχει και για τελεστές:

Θεώρημα 7.13 *Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ τυχαίος τελεστής. Υπάρχει μερική ισομετρία V με αρχικό χώρο $\overline{|T|(\mathcal{H})}$ και τελικό χώρο $\overline{T(\mathcal{H})}$ ώστε*

$$T = V|T|.$$

Επιπλέον, αν $T = UX$ όπου $X \geq 0$ και U μερική ισομετρία με αρχικό χώρο $\overline{X(\mathcal{H})}$ τότε $U = V$ και $X = |T|$.

Απόδειξη Για κάθε $x \in \mathcal{H}$,

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle |T|^2x, x\rangle = \langle |T|x, |T|x\rangle = \||T|x\|^2.$$

Αυτό δείχνει ότι η απεικόνιση

$$V_o : |T|(\mathcal{H}) \to T(\mathcal{H}) : |T|x \to Tx$$

είναι καλά ορισμένη, γραμμική, ισομετρική και επί. Επομένως επεκτείνεται σε ισομετρία V_1 από τον $\overline{|T|(\mathcal{H})}$ επί του $\overline{T(\mathcal{H})}$. Επεκτείνουμε τον V_1 σε τελεστή $V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ θέτοντας $Vx = 0$ για x κάθετο στον $|T|(\mathcal{H})$. Προκύπτει μια μερική ισομετρία με αρχικό χώρο $\overline{|T|(\mathcal{H})}$ και τελικό χώρο $\overline{T(\mathcal{H})}$. Για κάθε $x \in \mathcal{H}$ έχουμε $V|T|x = V_o|T|x = Tx$, άρα $V|T| = T$.

Αποδεικνύουμε την 'μοναδικότητα'. Η αρχική προβολή U^*U της μερικής ισομετρίας U είναι η ταυτοτική απεικόνιση στον αρχικό χώρο $\overline{X(\mathcal{H})}$, άρα $U^*UX = X$. Η σχέση $T = UX$ δίνει $T^*T = XU^*UX = X^2$, άρα $X = (T^*T)^{1/2} = |T|$ από την μοναδικότητα της τετραγωνικής ρίζας. Συνεπώς $U|T| = T = V|T|$. Αυτό δείχνει ότι οι U και V έχουν τον ίδιο αρχικό χώρο και ταυτίζονται στον πυκνό υπόχωρο $|T|(\mathcal{H})$ του αρχικού τους χώρου, άρα $U = V$. $\square$

Παρατήρηση 7.14 Ο πυρήνας της V είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του αρχικού της χώρου, δηλαδή ο $(|T|(\mathcal{H}))^\perp = \ker|T|$. Έχουμε όμως $\ker|T| = \ker T$ διότι $\|Tx\| = \||T|x\|$ για κάθε x. Εφόσον $(T^*(\mathcal{H}))^\perp = \ker T$, έπεται ότι $\overline{|T|(\mathcal{H})} = \overline{T^*(\mathcal{H})}$. Επομένως η V είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο $\overline{T^*(\mathcal{H})}$ και τελικό χώρο $\overline{T(\mathcal{H})}$.

Εφόσον ο V^*V είναι η προβολή στον $\overline{|T|(\mathcal{H})}$, η σχέση $T = V|T|$ δίνει

$$V^*T = V^*V|T| = |T|.$$

Σημειώνουμε επίσης ότι η V είναι ισομετρία αν και μόνον αν ο T είναι 1-1 , ενώ η V^* είναι ισομετρία αν και μόνον αν το σύνολο τιμών του T είναι πυκνό. Επομένως η V είναι ορθομοναδιαίος τελεστής αν και μόνον αν ο T είναι 1-1 και έχει πυκνό σύνολο τιμών. Αυτό συμβαίνει ειδικότερα όταν ο T είναι αντιστρέψιμος.

8 Το φασματικό θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές

Σταθεροποιούμε έναν αυτοσυζυγή τελεστή $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ και στοχεύουμε να 'αναπαραστήσουμε' τον A ως πολλαπλασιαστικό τελεστή σ'έναν κατάλληλο χώρο L^2. Ακριβέστερα, θα κατασκευάσουμε ένα χώρο μέτρου (X, μ) και μια $f \in L^\infty(X, \mu)$ ώστε ο A να είναι *ορθομοναδιαία ισοδύναμος* με τον πολλαπλασιαστικό τελεστή M_f, δηλαδή να υπάρχει ορθομοναδιαίος τελεστής $U : L^2(X, \mu) \to \mathcal{H}$ ώστε $A = UM_fU^{-1}$.

Το κρίσιμο βήμα εμπεριέχεται στο

Λήμμα 8.1 *Για κάθε μη μηδενικό $x \in \mathcal{H}$ υπάρχει θετικό κανονικό πεπερασμένο μέτρο Borel μ_x στο $\sigma(A)$ και ισομετρία $U_x : L^2(\sigma(A), \mu_x) \to \mathcal{H}$ ώστε $U_xM_f = f(A)U_x$ για κάθε $f \in C(\sigma(A))$ (και ειδικότερα $AU_x = U_xM_{f_o}$ όπου $f_o(\lambda) = \lambda$).*

Απόδειξη Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις ορίζει μια απεικόνιση

$$\Phi_c : C(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}) : f \to f(A)$$

που είναι ισομετρικός *-μορφισμός.

Σταθεροποιούμε ένα μη μηδενικό $x \in \mathcal{H}$ και θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση

$$\phi_x : C(\sigma(A)) \to \mathbb{C} : f \to \langle f(A)x, x\rangle.$$

Παρατηρούμε ότι η ϕ_x είναι *θετική* γραμμική μορφή, δηλαδή $\phi_x(f) \geq 0$ για κάθε $f \geq 0$. Πράγματι, αν $f \geq 0$ τότε $f(A) \geq 0$ (Πόρισμα 7.10) επομένως $\phi_x(f) = \langle f(A)x, x\rangle \geq 0$.

Από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz (βλέπε π.χ. [14], Θεώρημα 12.26) υπάρχει (μοναδικό) θετικό πεπερασμένο κανονικό μέτρο Borel μ_x στο $\sigma(A)$ ώστε

$$\int f d\mu_x = \phi_x(f) = \langle f(A)x, x\rangle \quad \text{για κάθε } f \in C(\sigma(A)).$$

Θεωρώντας τον χώρο $C(\sigma(A))$ ως υπόχωρο του $L^2(\sigma(A), \mu_x)$, ορίζουμε την απεικόνιση

$$U_{ox} : (C(\sigma(A)), \|.\|_2) \to (\mathcal{H}, \|.\|_{\mathcal{H}}) : f \to f(A)x$$

που είναι προφανώς γραμμική. Ισχυρίζομαι ότι είναι ισομετρία. Πράγματι, για κάθε $f \in C(\sigma(A))$,

$$\begin{aligned}\|f(A)x\|_{\mathcal{H}}^2 &= \langle f(A)x, f(A)x\rangle = \langle f(A)^*f(A)x, x\rangle = \langle (\bar{f}f)(A)x, x\rangle \\ &= \int \bar{f}f d\mu_x = \|f\|_2^2\end{aligned}$$

(χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η $\Phi_c : f \to f(A)$ είναι *-μορφισμός). Δείξαμε λοιπόν ότι $\|U_{ox}(f)\|_{\mathcal{H}} = \|f\|_2$, δηλαδή ότι η U_{ox} είναι ισομετρική. Επομένως επεκτείνεται σε ισομετρία U_x ορισμένη στην κλειστή θήκη του $C(\sigma(A))$ ως προς την νόρμα $\|.\|_2$. Αλλά αυτή η κλειστή θήκη είναι ακριβώς[17] ο $L^2(\sigma(A), \mu_x)$. Έχουμε λοιπόν μια ισομετρία

$$U_x : L^2(\sigma(A), \mu_x) \to \mathcal{H}$$

που ικανοποιεί $U_x(f) = f(A)x$ όταν η f είναι συνεχής.

Μένει να δειχθεί ότι $U_x M_f = f(A)U_x$ για κάθε $f \in C(\sigma(A))$.

Πράγματι, για κάθε $g \in C(\sigma(A))$ έχουμε

$$(U_x M_f)(g) = U_x(fg) = (fg)(A)x = f(A)(g(A)x) = (f(A)U_x)(g).$$

Επομένως οι *φραγμένοι* τελεστές $U_x M_f$ και $f(A)U_x$ ταυτίζονται στον πυκνό υπόχωρο $C(\sigma(A))$ του $L^2(\sigma(A), \mu_x)$, άρα είναι ίσοι. □

[17] βλέπε π.χ. [14], Πρόταση 12.24

Παρατηρήσεις 8.2 **(i)** Αξίζει ίσως να σχολιάσει κανείς τον *διπλό ρόλο του χώρου* $C(\sigma(A))$ στην προηγούμενη απόδειξη: Αφενός μεν χρησιμοποιήθηκε (μέσω του συναρτησιακού λογισμού) ως χώρος τελεστών $f(A)$ στον $\mathcal{H}$, αφετέρου ως χώρος διανυσμάτων στον $L^2(\sigma(A), \mu_x)$.

(ii) Το σύνολο τιμών $\mathrm{im}(U_x)$ της ισομετρίας U_x του Λήμματος είναι ακριβώς ο **κυκλικός υπόχωρος**

$$\mathcal{H}_x = \overline{[A^n x : n = 0, 1, \dots]}$$

του x για τον A.

Πράγματι, το σύνολο τιμών του U_x είναι κλειστό (διότι ο U_x είναι ισομετρία) και περιέχει το $f(A)x$ για κάθε $f \in C(\sigma(A))$. Ειδικότερα περιέχει όλα τα διανύσματα της μορφής $A^n x$ για $n = 0, 1, \dots$, άρα περιέχει τον $\mathcal{H}_x$. Από την άλλη μεριά κάθε $f \in C(\sigma(A))$ προσεγγίζεται από μια ακολουθία (p_n) από πολυώνυμα, ομοιόμορφα στο $\sigma(A)$, και συνεπώς $\|p_n(A) - f(A)\| \to 0$, άρα και $\|p_n(A)x - f(A)x\| \to 0$. Αλλά κάθε $p_n(A)x$ ανήκει στον $\mathcal{H}_x$, συνεπώς το ίδιο ισχύει για το $f(A)x$.

(iii) Αν μπορούσαμε να επιλέξουμε το $x \in \mathcal{H}$ ώστε ο U_x να είναι αντιστρέψιμος, τότε το προηγούμενο Λήμμα θα έδινε $f(A) = U_x M_f U_x^{-1}$ για κάθε $f \in C(\sigma(A))$, και ειδικότερα $A = U_x M_{f_o} U_x^{-1}$, οπότε θα είχαμε δείξει ότι ο A είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με έναν πολλαπλασιαστικό τελεστή.

Παρατήρησε ότι ο U_x είναι ισομετρία, άρα είναι αντιστρέψιμος ακριβώς όταν είναι επί του $\mathcal{H}$. Από την προηγούμενη παρατήρηση, αυτό συμβαίνει ακριβώς όταν ο κυκλικός υπόχωρος $\mathcal{H}_x$ είναι όλος ο χώρος $\mathcal{H}$.

Ορισμός 8.1 *Ένα διάνυσμα $x \in \mathcal{H}$ λέγεται **κυκλικό** για τον τελεστή $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ αν ο κυκλικός υπόχωρος που ορίζει είναι όλος ο $\mathcal{H}$, ισοδύναμα αν ο γραμμικός χώρος $[A^n x : n = 0, 1, \dots]$ είναι πυκνός στον $\mathcal{H}$.*

Το Λήμμα και οι παρατηρήσεις που προηγήθηκαν αποδεικνύουν την

Πρόταση 8.3 *Αν ένας αυτοσυζυγής τελεστής $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ έχει κυκλικό διάνυσμα, υπάρχει πεπερασμένο θετικό κανονικό μέτρο Borel μ στο $\sigma(A)$ ώστε ο A να είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με τον τελεστή $M_{f_o} \in \mathcal{B}(L^2(\sigma(A), \mu))$ του πολλαπλασιασμού επί την ανεξάρτητη μεταβλητή.*

Όμως, δεν έχουν όλοι οι αυτοσυζυγείς τελεστές κυκλικά διανύσματα. Παραδείγματος χάριν, αν ο ταυτοτικός τελεστής έχει κυκλικό διάνυσμα, τότε ο χώρος στον οποίο δρα είναι μονοδιάστατος! Ένα λιγότερο τετριμμένο παράδειγμα είναι το εξής:

Παράδειγμα 8.4 *Έστω $\mathcal{H} = L^2([0,1]) \oplus L^2([0,1])$ (με το μέτρο Lebesgue και το εσωτερικό γινόμενο $\langle (f_1 \oplus f_2), (g_1 \oplus g_2)\rangle = \langle f_1, g_1\rangle + \langle f_2, g_2\rangle$) και έστω $A = M_{f_o} \oplus M_{f_o}$ όπου $f_o(\lambda) = \lambda$ ($\lambda \in [0,1]$). Τότε ο A είναι αυτοσυζυγής τελεστής χωρίς κυκλικό διάνυσμα.*

Απόδειξη Ότι ο A είναι αυτοσυζυγής έπεται από το γεγονός ότι η f_o είναι πραγματική. Ισχυρίζομαι ότι κανένα διάνυσμα $f \oplus g$ δεν είναι κυκλικό για τον A. Πράγματι, το διάνυσμα $\bar{g} \oplus (-\bar{f})$ είναι κάθετο σε κάθε $A^n(f \oplus g)$:

$$\begin{aligned}\langle A^n(f \oplus g), \bar{g} \oplus (-\bar{f})\rangle &= \langle (M^n_{f_o} f \oplus M^n_{f_o} g), \bar{g} \oplus (-\bar{f})\rangle = \langle M^n_{f_o} f, \bar{g}\rangle - \langle M^n_{f_o} g, \bar{f}\rangle \\ &= \int t^n f(t) g(t) dt - \int t^n g(t) f(t) dt = 0.\end{aligned}$$

Έπεται ότι η γραμμική θήκη του συνόλου $\{A^n(f \oplus g) : n = 0, 1, \ldots\}$ δεν μπορεί να είναι πυκνή στον $\mathcal{H}$.

Παρατήρησε ότι αν ταυτίσουμε τον χώρο $\mathcal{H}$ στο παράδειγμα αυτό με τον $L^2([0,1] \cup [1,2])$, τότε ο τελεστής A ταυτίζεται με τον M_f, όπου $f(t) = t$ για $t \in [0,1]$ και $f(t) = t - 1$ για $t \in (1,2]$.

Με κάπως ανάλογο τρόπο, η γενική περίπτωση ανάγεται στην περίπτωση της Πρότασης 8.3 τοποθετώντας κατάλληλους χώρους μέτρου «τον ένα δίπλα στον άλλο»:

Ονομάζουμε δύο μη μηδενικά διανύσματα $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$ **πολύ κάθετα** (ως προς τον A) αν $A^n x_1 \perp A^m x_2$ για κάθε $n, m = 0, 1, \ldots$, με άλλα λόγια αν οι κυκλικοί υπόχωροι $\mathcal{H}_1$ και $\mathcal{H}_2$ που παράγονται από τα x_1 και x_2 είναι κάθετοι.

Έστω $\{x_i : i \in I\}$ μια μεγιστική[18] οικογένεια από πολύ κάθετα μη μηδενικά διανύσματα, και για κάθε i έστω $\mathcal{H}_i = \overline{[A^n x_i : n = 0, 1, \ldots]}$ ο αντίστοιχος κυκλικός υπόχωρος.

[18] Η ύπαρξη τέτοιας οικογένειας είναι απλή συνέπεια του Λήμματος Zorn. Εξάλλου, αν ο $\mathcal{H}$ υποτεθεί διαχωρίσιμος, τότε η οικογένεια αυτή είναι αριθμήσιμη.

Ισχυρισμός 8.5 *Το (εσωτερικό) ευθύ άθροισμα $\vee_i \mathcal{H}_i$ (δηλαδή ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}$ που περιέχει κάθε $\mathcal{H}_i$) είναι όλος ο $\mathcal{H}$.*

Πράγματι αν ένα μη μηδενικό διάνυσμα $x \in \mathcal{H}$ είναι κάθετο στον $\vee_i \mathcal{H}_i$ τότε για κάθε $i \in I$ και κάθε $n, m = 0, 1, \ldots$ έχουμε $\langle A^n x, A^m x_i \rangle = \langle x, A^{n+m} x_i \rangle = 0$, πράγμα που δείχνει ότι ο κυκλικός υπόχωρος $\mathcal{H}_x$ που παράγεται από το x είναι κάθετος στον $\mathcal{H}_i$. Αυτό αντιβαίνει στην μεγιστικότητα της οικογένειας $\{x_i : i \in I\}$. $\square$

Από το Λήμμα 8.1, για κάθε $i \in I$ υπάρχει πεπερασμένο θετικό μέτρο Borel μ_i στον $\sigma(A)$ και ισομετρία

$$U_i : L^2(\sigma(A), \mu_i) \to \mathcal{H} \text{ ώστε } AU_i = U_i M_{f_i} \tag{*}$$

όπου $f_i(\lambda) = \lambda$ ($\lambda \in \sigma(A)$), και το σύνολο τιμών της U_i είναι $\mathcal{H}_i$. Δηλαδή, αν θέσουμε $A_i = A|_{\mathcal{H}_i}$, κάθε A_i είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με τον πολλαπλασιαστικό τελεστή M_{f_i} που δρα στον χώρο $L^2(\sigma(A), \mu_i)$.

Θα δείξουμε ότι ο A είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με έναν κατάλληλο πολλαπλασιαστικό τελεστή M_f στον $L^2(X, \mu)$, όπου ο (X, μ) είναι η *ξένη ένωση* των χώρων μέτρου $(X_i, \mu_i) = (\sigma(A), \mu_i)$. Η απόδειξη θα γίνει σε δύο βήματα: πρώτα θα δείξουμε ότι ο A είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με το *ευθύ άθροισμα* $B = \oplus M_{f_i}$ των πολλαπλασιαστικών τελεστών M_{f_i}, και μετά θα δείξουμε ότι ο B είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με έναν πολλαπλασιαστικό τελεστή.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{H} = \vee \mathcal{H}_i & \xrightarrow{A} & \mathcal{H} = \vee \mathcal{H}_i \\
\oplus U_i \uparrow & & \uparrow \oplus U_i \\
\oplus L^2(X_i, \mu_i) & \xrightarrow{\oplus M_{f_i}} & \oplus L^2(X_i, \mu_i) \\
V \uparrow & & \uparrow V \\
L^2(X, \mu) & \xrightarrow{M_f} & L^2(X, \mu)
\end{array}$$

Ορισμός 8.2 ***(α)*** *Αν $\{\mathcal{K}_i\}$ είναι μια οικογένεια χώρων Hilbert, ονομάζουμε **(εξωτερικό) ευθύ άθροισμα** $\oplus_i \mathcal{K}_i$ το σύνολο $\mathcal{K}$ όλων των οικογενειών (x_i)*

με $x_i \in \mathcal{K}_i$ *για κάθε* i *που είναι τετραγωνικά αθροίσιμες*[19], *δηλαδή* $\sum_i \|x_i\|_i^2 < \infty$. *Συμβολίζουμε τα στοιχεία* $x \in \mathcal{K}$ *με* $x = \oplus x_i$ *και θέτουμε*[20]

$$\langle x, y\rangle_{\mathcal{K}} = \sum_{i\in I} \langle x_i, y_i\rangle_i.$$

(β) *Αν* $T_i : \mathcal{H}_i \to \mathcal{K}_i$ *είναι φραγμένοι τελεστές για κάθε* i *και* $\sup_i \|T_i\| < \infty$, *τότε για κάθε* $\oplus x_i \in \mathcal{K}$ *η οικογένεια* $(T_i(x_i))$ *είναι τετραγωνικά αθροίσιμη. Ορίζουμε το* ***ευθύ άθροισμα*** T *των τελεστών* T_i *από την σχέση*

$$\begin{aligned} T : \oplus\mathcal{H}_i &\longrightarrow \oplus\mathcal{K}_i \\ \oplus x_i &\longrightarrow \oplus_i T_i(x_i). \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις 8.6 (α) Η T είναι καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση διότι για κάθε $x \in \oplus\mathcal{H}_i$ έχουμε

$$\sum_{i\in I} \|T_i(x_i)\|_{\mathcal{K}_i}^2 \leq \sup_i \|T_i\|^2 \sum_{i\in I} \|x_i\|_{\mathcal{H}_i}^2 .$$

Επομένως πράγματι $\oplus_i T_i(x_i) \in \oplus_i \mathcal{K}_i$, και ο T είναι φραγμένος τελεστής με $\|T\| \leq \sup_i \|T_i\|$. Μάλιστα είναι εύκολη άσκηση να δείξει κανείς ότι $\|T\| = \sup_i \|T_i\|$. Ειδικότερα, αν κάθε T_i είναι ισομετρία, τότε και ο T είναι ισομετρικός.

(β) Αν $\mathcal{H}_n, n \in \mathbb{N}$ είναι *κάθετοι ανά δύο* υπόχωροι ενός χώρου Hilbert $\mathcal{H}$, τότε το εσωτερικό ευθύ άθροισμά τους $\vee\mathcal{H}_n$ είναι ίσο με το σύνολο

$$\mathcal{H}_0 = \{\sum_n x_n : x_n \in \mathcal{H}_n, \sum \|x_n\|^2 < \infty\}$$

και η απεικόνιση

$$W : \oplus_n\mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_0 : \oplus x_n \to \sum_n x_n$$

είναι ισομετρικός ισομορφισμός. Για τον λόγο αυτό ταυτίζουμε το εξωτερικό με το εσωτερικό ευθύ άθροισμα καθέτων ανά δύο υποχώρων[21] ενός χώρου Hilbert.

[19] Αποδεικνύεται, ακριβώς όπως στην περίπτωση του ℓ^2, ότι το ευθύ άθροισμα χώρων Hilbert είναι χώρος Hilbert.

[20] Το άθροισμα της σειράς είναι εξ ορισμού το όριο του δικτύου των αθροισμάτων σε πεπερασμένα υποσύνολα του I, και η σειρά συγκλίνει διότι συγκλίνει απόλυτα, εφόσον $\left(\sum_{i\in F} |\langle x_i, y_i\rangle_i|\right)^2 \leq \left(\sum_{i\in F} \|x_i\|^2\right)\left(\sum_{i\in F} \|y_i\|^2\right)$ για κάθε $F \subset I$ πεπερασμένο.

[21] Η παρατήρηση αυτή αληθεύει και για υπεραριθμίσιμες οικογένειες υποχώρων, αρκεί να θεωρήσουμε το άθροισμα $\sum_i x_i$ ως το όριο του *δικτύου* $\{s_F\}$ των αθροισμάτων $s_F = \sum_{i\in F} x_i$ όπου $F \subseteq I$ πεπερασμένο.

Απόδειξη του (β) Κατ'αρχήν παρατηρούμε ότι το σύνολο $\mathcal{H}_0$ είναι καλά ορισμένο, γιατί αν $\sum \|x_n\|^2 < \infty$ τότε τα μερικά αθροίσματα $s_N = \sum_{n=1}^N x_n$ της σειράς $\sum_n x_n$ αποτελούν βασική ακολουθία: πράγματι αν $m > n$ τότε $\|s_m - s_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^m \|x_k\|^2$ (αφού τα x_k είναι ανά δύο κάθετα). Επίσης έχουμε

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right\|^2 = \lim_n \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|^2 = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2.$$

Είναι τώρα φανερό ότι η W είναι καλά ορισμένη, γραμμική και ισομετρική απεικόνιση από τον $\oplus H_n$ στον $\mathcal{H}$ και η εικόνα της είναι ακριβώς ο $\mathcal{H}_0$. Συνεπώς ο $\mathcal{H}_0$ είναι (πλήρης, άρα) κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}$ και βεβαίως περιέχει κάθε $\mathcal{H}_n$, άρα και τη γραμμική τους θήκη. Αφού ο $\mathcal{H}_0$ είναι κλειστός, έπεται ότι $\vee\mathcal{H}_n \subseteq \mathcal{H}_0$. Αν όμως κάποιο $y \in \mathcal{H}$ είναι κάθετο σε κάθε $\mathcal{H}_n$, τότε είναι κάθετο και στον $\mathcal{H}_0$, γιατί για κάθε $x = \sum x_n \in \mathcal{H}_0$ έχουμε $\langle y, \sum_n x_n\rangle = \sum_n \langle y, x_n\rangle = 0$. Άρα τελικά ισχύει ισότητα: $\vee\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_0$. $\square$

Επανερχόμαστε τώρα στη μελέτη του αυτοσυζυγούς τελεστή $A \in B(\mathcal{H})$.

Ισχυρισμός 8.7 *Έστω $\mathcal{K}$ το (εξωτερικό) ευθύ άθροισμα $\oplus_i L^2(\sigma(A), \mu_i)$. Αν*

$$U = \oplus_i U_i : \mathcal{K} = \oplus_i L^2(\sigma(A), \mu_i) \to \mathcal{H} = \vee\mathcal{H}_i$$

και $B \equiv \oplus M_{f_i} : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ τότε ο τελεστής A είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος (μέσω της απεικόνισης U) με τον τελεστή B:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} = \vee\mathcal{H}_i & \xrightarrow{A} & \mathcal{H} = \vee\mathcal{H}_i \\ \oplus U_i \uparrow & & \uparrow \oplus U_i \\ \oplus L^2(X_i, \mu_i) & \xrightarrow{\oplus M_{f_i}} & \oplus L^2(X_i, \mu_i) \end{array}$$

Απόδειξη Ο B είναι καλά ορισμένος και φραγμένος[22], με $\|B\| \leq \sup_i \|M_{f_i}\| = \sup_i \|f_i\|_\infty = \|A\|$.

Για κάθε $g = \oplus g_i \in \mathcal{K}$ έχουμε $B(\oplus g_i) = \oplus M_{f_i} g_i$, άρα

$$\begin{aligned} UB(\oplus g_i) &= \sum U_i M_{f_i} g_i = \sum A U_i g_i && \text{(από την (*))} \\ &= A(\sum U_i g_i) = AU(\oplus g_i). \end{aligned}$$

[22] Παρατήρησε ότι εφόσον $f_i(\lambda) = \lambda$ $(\lambda \in \sigma(A))$ έχουμε $\|f_i\|_\infty = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \|A\|$ διότι ο A είναι αυτοσυζυγής.

Δείξαμε λοιπόν ότι $UB = AU$. Εφόσον η U είναι ισομετρία επί του $\mathcal{H}$, άρα αντιστρέψιμη, έπεται ότι $A = UBU^{-1}$. $\square$

Συνεπώς ο A είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με ένα ευθύ άθροισμα πολλαπλασιαστικών τελεστών. Μένει να αποδειχθεί ότι ο τελεστής $B = \oplus M_{f_i}$ είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με έναν πολλαπλασιαστικό τελεστή σ'έναν κατάλληλο χώρο $L^2(X, \mu)$. Ο χώρος (X, μ) είναι η «ξένη ένωση» των χώρων $(\sigma(A), \mu_i)$ που ορίζεται αναλυτικά ως εξής:

Ορισμός 8.3 *Θέτουμε $X_i = \sigma(A) \times \{i\}$ και ονομάζουμε $\mathcal{S}_i$ την σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του X_i. Έστω $X = \cup_{i\in I} X_i$. Ορίζουμε την οικογένεια $\mathcal{S}$ και την απεικόνιση μ από τις σχέσεις*

$$\mathcal{S} = \{Y \subseteq X : Y \cap X_i \in \mathcal{S}_i \text{ για κάθε } i \in I\}$$
$$\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty] : Y \to \sum_i \mu_i(Y \cap X_i).$$

Ισχυρισμός 8.8 *Η οικογένεια $\mathcal{S}$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X και το μ είναι σ-προσθετικό (θετικό) μέτρο στην $\mathcal{S}$.*

Απόδειξη Είναι άμεσο ότι η $\mathcal{S}$ είναι άλγεβρα υποσυνόλων του X και ότι το μ είναι πεπερασμένα προσθετικό. Επομένως αρκεί να αποδειχθεί ότι, αν (Y_n) είναι αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{S}$ και $Y = \cup_n Y_n$, τότε $Y \in \mathcal{S}$ και $\mu(Y) = \lim_n \mu(Y_n)$.

Για κάθε $i \in I$, εφόσον κάθε Y_n ανήκει στην $\mathcal{S}$, κάθε $Y_n \cap X_i$ ανήκει στην $\mathcal{S}_i$. Άρα $\cup_n(Y_n \cap X_i) \in \mathcal{S}_i$ για κάθε i. Αλλά $\cup_n(Y_n \cap X_i) = Y \cap X_i$, άρα $Y \in \mathcal{S}$.

Για να δείξουμε ότι $\mu(Y) = \lim_n \mu(Y_n)$, παρατηρούμε ότι η $(\mu(Y_n))$ είναι αύξουσα ακολουθία στο $[0, +\infty]$ και $\mu(Y_n) \leq \mu(Y)$ για κάθε n. Άρα αν $\mu \equiv \sup_n \mu(Y_n)$ έχουμε $\mu \leq \mu(Y)$. Για την αντίστροφη ανισότητα αρκεί, από τον ορισμό του $\mu(Y)$, να δείξουμε ότι $\sum_{i\in F} \mu_i(Y \cap X_i) \leq \mu$ για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο F του I. Παρατήρησε ότι για κάθε i, έχουμε $\sup_n \mu_i(Y_n \cap X_i) = \mu_i(Y \cap X_i)$ διότι το μ_i είναι σ-προσθετικό. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\sum_{i\in F} \mu_i(Y \cap X_i) &= \sum_{i\in F} \sup_n \mu_i(Y_n \cap X_i) = \sup_n \sum_{i\in F} \mu_i(Y_n \cap X_i) \\ &\leq \sup_n \sum_{i\in I} \mu_i(Y_n \cap X_i) = \sup_n \mu(Y_n) = \mu,\end{aligned}$$

άρα $\mu(Y) \leq \mu$. $\square$

Για κάθε $i \in I$ έχουμε ονομάσει $f_i \in L^\infty(\sigma(A), \mu_i)$ την συνάρτηση $f_i(\lambda) = \lambda\,(\lambda \in \sigma(A))$. Ορίζουμε τώρα την συνάρτηση

$$f : X = \cup_i(\sigma(A) \times \{i\}) \to \mathbb{C} : \; (\lambda, i) \to f_i(\lambda).$$

Είναι φανερό ότι $f \in L^\infty(X, \mu)$ (μάλιστα $\|f\|_\infty = \sup_i \|f_i\|_\infty = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \|A\|$).

Ισχυρισμός 8.9 *Η απεικόνιση $V : h \to \oplus_i(h|_{X_i})$ απεικονίζει τον $L^2(X, \mu)$ ισομετρικά επί του $\mathcal{K} = \oplus_i L^2(\sigma(A), \mu_i)$ και $B = VM_fV^{-1}$.*

Απόδειξη (i) *Δείχνουμε πρώτα ότι η V είναι καλά ορισμένος ορθομοναδιαίος τελεστής.* Έστω πρώτα $Y \in \mathcal{S}$ και $\chi = \chi_Y$. Έπεται από τον ορισμό του μέτρου μ ότι

$$\int_X \chi d\mu = \mu(Y) = \sum_i \mu_i(Y \cap X_i) = \sum_i \int_{X_i} \chi_{Y \cap X_i} d\mu_i = \sum_i \int_{X_i} \chi|_{X_i} d\mu_i.$$

Λόγω γραμμικότητας, η ίδια ισότητα ισχύει αν χ είναι μια απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Εφόσον οι απλές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις είναι πυκνές στον $L^1(X, \mu)$, για κάθε $g \in L^1(X, \mu)$, $g \geq 0$ έχουμε

$$\int_X g d\mu = \sum_i \int_{X_i} g|_{X_i} d\mu_i.$$

Επομένως αν $h \in L^2(X, \mu)$ τότε $h|_{X_i} \in L^2(X_i, \mu_i) = L^2(\sigma(A), \mu_i)$ για κάθε i και μάλιστα

$$\|h\|_2^2 = \int_X |h|^2 d\mu = \sum_i \int_{X_i} |h|_{X_i}|^2 d\mu_i,$$

δηλαδή η οικογένεια $\oplus_i h_i$ όπου $h_i = h|_{X_i}$ ανήκει στον $\oplus_i L^2(\sigma(A), \mu_i) = \mathcal{K}$ και $\|h\|_2 = \| \oplus h_i\|_{\mathcal{K}}$. Συνεπώς η απεικόνιση

$$V : L^2(X, \mu) \to \mathcal{K} : h \to \oplus_i h_i$$

είναι καλά ορισμένη ισομετρία. Η V είναι επί γιατί ο $\operatorname{im} V$ περιέχει το πυκνό υποσύνολο όλων των $g = \oplus g_i \in \mathcal{K}$ όπου $g_i = 0$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος δεικτών i. Πράγματι, για κάθε τέτοιο g, ορίζουμε την h στον X από τις σχέσεις $h(\lambda, i) = g_i(\lambda)\,(\lambda \in \sigma(A), i \in I)$ και παρατηρούμε ότι $h \in L^2(X, \mu)$ και $h|_{X_i} = g_i$ για κάθε i, άρα $Vh = \oplus g_i = g$.

(ii) *Δείχνουμε ότι* $B = VM_fV^{-1}$. Έστω $g \in L^2(X,\mu)$ και $g_i = g|_{X_i} \in L^2(X_i,\mu_i) = L^2(\sigma(A),\mu_i)$. Τότε $V(g) = \oplus_i g_i$ και

$$\begin{aligned} B(Vg) &= B(\oplus_i g_i) = \oplus_i M_{f_i} g_i = \oplus_i f_i g_i, \\ V(M_f g) &= V(fg) = \oplus_i f_i g_i. \end{aligned}$$

Έπεται ότι $BV = VM_f$, άρα $B = VM_fV^{-1}$ διότι ο V είναι αντιστρέψιμος. $\square$

Αν ονομάσουμε $W : L^2(X,\mu) \to \mathcal{H}$ την σύνθεση

$$W = U \circ V : L^2(X,\mu) \to \mathcal{K} \to \mathcal{H},$$

τότε $A = UBU^{-1} = U(VM_fV^{-1})U^{-1}$, δηλαδή $A = WM_fW^{-1}$. Έχουμε λοιπόν αποδείξει το

Θεώρημα 8.10 ***(Φασματικό Θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές)***
Έστω $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ αυτοσυζυγής τελεστής. Υπάρχει χώρος μέτρου (X,μ), συνάρτηση $f \in L^\infty(X,\mu)$ και ορθομοναδιαίος τελεστής $W : L^2(X,\mu) \to \mathcal{H}$ ώστε $A = WM_fW^{-1}$.

9 Το φασματικό Θεώρημα: Δεύτερη μορφή

9.1 Εισαγωγή

Το Φασματικό Θεώρημα, που είναι ίσως το βασικότερο αποτέλεσμα στην Θεωρία Τελεστών, αποτελεί γενίκευση του αντίστοιχου θεωρήματος από την Γραμμική Άλγεβρα. Όπως φαίνεται και από την απόδειξη του Θεωρήματος 5.2, το Θεώρημα αυτό αναδιατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 9.1 *Έστω H χώρος Hilbert πεπερασμένης διάστασης και $T \in \mathcal{B}(H)$ φυσιολογικός. Για κάθε $\lambda \in \sigma(T)$, ονομάζουμε E_λ την ορθή προβολή στον ιδιόχωρο που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Τότε*

$$I = \sum_{\lambda \in \sigma(T)} E_\lambda \quad \textit{και} \quad T = \sum_{\lambda \in \sigma(T)} \lambda E_\lambda .$$

Θα δείξουμε ότι, όταν ο H είναι απειροδιάστατος, το άθροισμα αντικαθίσταται με ένα ολοκλήρωμα $T = \int \lambda dE_\lambda$ όπου η ολοκλήρωση γίνεται πάνω στο συμπαγές υποσύνολο $\sigma(T)$ του $\mathbb{C}$, ως προς ένα 'μέτρο' ορισμένο στα Borel υποσύνολα του $\sigma(T)$, με τιμές (όχι αριθμούς αλλά) προβολές στον H.

Στην προηγούμενη παράγραφο δώσαμε την απόδειξη (για την ειδική περίπτωση αυτοσυζυγούς τελεστή) μιας ισοδύναμης μορφής του Φασματικού Θεωρήματος: *Κάθε φυσιολογικός τελεστής T σ'έναν χώρο Hilbert είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με έναν πολλαπλασιαστικό τελεστή στον L^2 ενός κατάλληλου χώρου μέτρου.* Παρατηρούμε ότι ο χώρος μέτρου που κατασκευάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο εξαρτάται, όχι μόνον από τον τελεστή, αλλά και από την επιλογή μιας οικογένειας 'πολύ κάθετων' διανυσμάτων. Αντίθετα, το 'μέτρο' που θα ορίσουμε στη συνέχεια καθορίζεται μονοσήμαντα από τον τελεστή T. Επιπλέον, η αναπαράσταση του τελεστή με την μορφή ολοκληρώματος επιτυγχάνεται στον ίδιο χώρο Hilbert όπου ο T δρα, και όχι σε κάποιον άλλο χώρο (μέσω ορθομοναδιαίας ισοδυναμίας).

Το πρόγραμμά μας είναι το εξής: Θα ορίσουμε πρώτα την κατάλληλη έννοια «μέτρου», το *φασματικό μέτρο*, καθώς και την ολοκλήρωση, ως προς ένα τέτοιο μέτρο, συναρτήσεων με μιγαδικές τιμές. Θα δούμε ότι το ολοκλήρωμα ως προς ένα φασματικό μέτρο ορίζει μία αναπαράσταση μιας C^*-άλγεβρας συναρτήσεων. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι κάθε αναπαράσταση της C^*-άλγεβρας $C(K)$ (όπου K συμπαγής Hausdorff χώρος) που διατηρεί την ενέλιξη ορίζει ένα φασματικό μέτρο. Τέλος, αφού (όπως θα δούμε) κάθε φυσιολογικός τελεστής

$T \in \mathcal{B}(H)$ ορίζει μία αναπαράσταση $f \longrightarrow f(T)$ της $C(\sigma(T))$, θα οδηγηθούμε στην απόδειξη του Φασματικού Θεωρήματος.

9.2 Ολοκλήρωση ως προς φασματικό μέτρο

9.2.1 Φασματικά μέτρα

Ορισμός 9.1 *Έστω $(K, \mathcal{S})$ μετρήσιμος χώρος. Μια οικογένεια $\{E(\Omega) : \Omega \in \mathcal{S}\}$ τελεστών σ'έναν χώρο Hilbert H λέγεται* ***φασματικό μέτρο (spectral measure)*** *αν ικανοποιεί τις ιδιότητες*

1. $E(\Omega)^* = E(\Omega)$
2. $E(\Omega_1 \cap \Omega_2) = E(\Omega_1).E(\Omega_2)$
3. $E(\emptyset) = 0$ *και* $E(K) = I$
4. *Για κάθε $x, y \in H$, η απεικόνιση $\mu_{xy} : \Omega \longrightarrow \langle E(\Omega)x, y\rangle$ είναι μιγαδικό μέτρο ορισμένο στην $\mathcal{S}$.*

Παρατηρήσεις 9.2 (α) Από τις (1) και (2) έπεται ότι κάθε $E(\Omega)$ είναι ορθή προβολή, δηλαδή $E(\Omega)^* = E(\Omega)$ και $E(\Omega)^2 = E(\Omega)$. Εφόσον οι ορθές προβολές είναι θετικοί τελεστές[23], έπεται ότι για κάθε $x \in H$ το μέτρο μ_{xx} είναι θετικό (πεπερασμένο) μέτρο. Αντίστροφα, αν κάθε μ_{xx} είναι θετικό μέτρο, τότε κάθε μ_{xy} θα είναι μιγαδικό μέτρο, ως γραμμικός συνδυασμός τεσσάρων μ_{xx}. Πράγματι, για κάθε Ω η απεικόνιση $(x, y) \to \mu_{xy}(\Omega) = \langle E(\Omega)x, y\rangle$ είναι sesquilinear, άρα (από την ταυτότητα πολικότητας) έχουμε

$$4\mu_{xy}(\Omega) = \mu_{x+y,x+y}(\Omega) - \mu_{x-y,x-y}(\Omega) + i\mu_{x+iy,x+iy}(\Omega) - i\mu_{x-iy,x-iy}(\Omega).$$

Επομένως η ιδιότητα (4) μπορεί να αντικατασταθεί από την

4′ *Για κάθε $x \in H$, η απεικόνιση $\mu_{xx} : \Omega \longrightarrow \langle E(\Omega)x, x\rangle$ είναι (θετικό) μέτρο ορισμένο στην $\mathcal{S}$.*

(β) Όταν ο K είναι (τοπικά) συμπαγής χώρος και $\mathcal{S}$ η σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του, συνήθως απαιτούμε ένα φασματικό μέτρο να είναι *κανονικό*, δηλαδή όλα τα μ_{xx} να είναι κανονικά μέτρα.

[23] Αν E είναι ορθή προβολή τότε $\langle Ex, x\rangle = \langle E^2x, x\rangle = \langle Ex, E^*x\rangle = \langle Ex, Ex\rangle = \|Ex\|^2$.

Παρατήρηση 9.3 Κάθε φασματικό μέτρο είναι βεβαίως πεπερασμένα προσθετικό (αφού κάθε μ_{xy} $(x, y \in H)$ είναι πεπερασμένα προσθετικό), δηλαδή $E(\Omega_1 \cup \Omega_2) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$ όταν τα $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{S}$ είναι ξένα. Δεν είναι όμως (πλην τετριμμένων περιπτώσεων) σ-προσθετικό στην τοπολογία της νόρμας του $\mathcal{B}(H)$. Δηλαδή αν $\{\Omega_n\} \in \mathcal{S}$ είναι ακολουθία ξένων ανά δύο υποσυνόλων και Ω είναι η ένωσή τους, η σειρά $\sum_n E(\Omega_n)$ δεν συγκλίνει, γιατί τα μερικά της αθροίσματα, όταν δεν είναι ίσα, έχουν διαφορά νόρμας 1 (γιατί είναι ορθές προβολές[24]).

Ισχύει όμως μια ασθενέστερη μορφή σ-προσθετικότητας:

Για κάθε $x \in H$ η σειρά $\sum E(\Omega_n)x$ συγκλίνει στο $E(\Omega)x$ (ως προς την νόρμα του H).

Απόδειξη Επειδή η απεικόνιση $\Omega \to E(\Omega)$ είναι πεπερασμένα προσθετική, αν θέσουμε $V_n = \cup\{\Omega_k : k \leq n\}$ τότε

$$E(\Omega) = E(V_n) + E(\Omega \setminus V_n) = \sum_{k=1}^{n} E(\Omega_k) + E(\Omega \setminus V_n).$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\lim_n \|E(\Omega \setminus V_n)x\| = 0$ για κάθε $x \in H$. Αλλά η $E(\Omega \setminus V_n)$ είναι ορθή προβολή, άρα $\|E(\Omega \setminus V_n)x\|^2 = \langle E(\Omega \setminus V_n)x, x\rangle = \mu_{x,x}(\Omega \setminus V_n)$ που τείνει στο 0 αφού το $\mu_{x,x}$ είναι σ-προσθετικό μέτρο.

Παραδείγματα (a) Αν T είναι φυσιολογικός τελεστής σ'έναν χώρο Hilbert H πεπερασμένης διάστασης, θέτουμε $K = \sigma(T)$ και $E(\{\lambda\}) = E_\lambda$, όπου E_λ η προβολή στον ιδιοχώρο που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Ελέγχεται άμεσα ότι το $E(.)$ είναι φασματικό μέτρο ορισμένο στο δυναμοσύνολο του (πεπερασμένου) συνόλου $\sigma(T)$.

(b) Έστω $(K, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος μέτρου και $H = L^2(K, \mu)$. Για κάθε $\Omega \in \mathcal{S}$ ορίζω τον τελεστή $E(\Omega) \in \mathcal{B}(H)$ από την σχέση

$$E(\Omega)g = \chi_\Omega g, \quad g \in H.$$

Ελέγχω ότι ικανοποιούνται οι απαιτήσεις του ορισμού:

(1) Αν $g, h \in H$ έχουμε

$$\langle E(\Omega)g, h\rangle = \int_K \chi_\Omega g \bar{h} d\mu = \int_K g \overline{\chi_\Omega h} d\mu = \langle g, E(\Omega)h\rangle$$

[24]Πράγματι, $\sum_{k=n}^{m} E(\Omega_k) = E(\cup_{k=n}^{m} \Omega_k)$

άρα $E(\Omega)^* = E(\Omega)$.

(2) Επειδή $\chi_{\Omega_1\cap\Omega_2} = \chi_{\Omega_1}.\chi_{\Omega_2}$ έχουμε

$$E(\Omega_1 \cap \Omega_2)g = \chi_{\Omega_1\cap\Omega_2}g = \chi_{\Omega_1}.\chi_{\Omega_2}g = E(\Omega_1)(E(\Omega_2)g).$$

Η απόδειξη της (3) είναι τετριμμένη.

Για την (4), αρκεί, όπως είδαμε στην Παρατήρηση 9.2, να δείξω ότι για κάθε $f \in H$ η απεικόνιση $\Omega \longrightarrow \langle E(\Omega)f, f\rangle$ είναι (θετικό) μέτρο στον K. Πρώτα-πρώτα, αν τα $V, \Omega \in \mathcal{S}$ είναι ξένα, τότε $\chi_{\Omega\cup V} = \chi_\Omega + \chi_V$, επομένως

$$E(\Omega \cup V)f = \chi_{\Omega\cup V}f = \chi_\Omega f + \chi_V f = (E(\Omega) + E(V))f$$

οπότε το $\Omega \longrightarrow \langle E(\Omega)f, f\rangle$ είναι πεπερασμένα προσθετικό. Αν τώρα $(\Omega_n) \subseteq \mathcal{S}$ είναι μια φθίνουσα προς το $\emptyset$ ακολουθία, τότε η αντίστοιχη ακολουθία $(\chi_n)_n$ των χαρακτηριστικών τους φθίνει προς το μηδέν σε κάθε σημείο του K, άρα η ακολουθία $(\chi_n(t)|f(t)|^2)_n$ φθίνει προς το μηδέν (μ-σχεδόν) σε κάθε σημείο $t \in K$. Συνεπώς το *Θεώρημα μονότονης σύγκλισης* δείχνει ότι τα ολοκληρώματα φθίνουν προς το μηδέν, δηλαδή ότι

$$\langle E(\Omega_n)f, f\rangle = \int_K \chi_n(t)|f(t)|^2 d\mu(t) \longrightarrow 0.$$

Έπεται ότι το $\Omega \longrightarrow \langle E(\Omega)f, f\rangle$ είναι σ-προσθετικό.

9.2.2 Ολοκλήρωση

Προχωρούμε τώρα στον ορισμό ολοκληρώματος ως προς φασματικό μέτρο. Αν

$$f = \sum_i \lambda_i \chi_{\Omega_i}$$

είναι απλή μετρήσιμη συνάρτηση (όπου $\lambda_i \in \mathbb{C}$ και $\Omega_i \in \mathcal{S}$, τα οποία μπορώ να υποθέτω ξένα ανά δύο και $\cup\Omega_i = K$), ορίζω

$$\int_K f(\lambda)dE_\lambda = \sum_i \lambda_i E(\Omega_i) \in \mathcal{B}(H).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\langle(\int_K f(\lambda)dE_\lambda)x, y\rangle = \int_K f d\mu_{x,y}$$

για κάθε $x, y \in H$.

Είναι φανερό ότι η απεικόνιση θ που ορίζεται από την σχέση

$$\theta(f) = \int_K f(\lambda) dE_\lambda$$

είναι γραμμική από τον γραμμικό χώρο των απλών συναρτήσεων με τιμές στον $\mathcal{B}(H)$. Επιθυμούμε να την επεκτείνουμε σε μια απεικόνιση ορισμένη στον χώρο $\mathcal{L}^\infty(K)$ όλων των φραγμένων και μετρήσιμων συναρτήσεων $f : K \to \mathbb{C}$. Κάθε τέτοια συνάρτηση προσεγγίζεται ομοιόμορφα από απλές συναρτήσεις. Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι η θ είναι συνεχής ως προς την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης.

Ισχυρίζομαι ότι $\|\theta(f)\| \leq \sup|f|$. Πράγματι: Για κάθε $x \in H$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\int f dE\right)x\right\|^2 &= \left\|\sum_i \lambda_i E(\Omega_i)x\right\|^2 = \sum_i |\lambda_i|^2 \|E(\Omega_i)x\|^2 \\
&\leq (\max|\lambda_i|)^2 \sum_i \|E(\Omega_i)x\|^2 = (\sup|f|)^2 \|\sum_i E(\Omega_i)x\|^2 \\
&= (\sup|f|)^2 \|x\|^2
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποίησα (δύο φορές) το Πυθαγόρειο Θεώρημα, μια και οι $\{E(\Omega_i)\}$ είναι κάθετες ανά δύο και $\sum_i E(\Omega_i) = E(\cup\Omega_i) = E(K) = I$.

Έδειξα λοιπόν ότι

$$\left\|\int f dE\right\| \leq \sup|f|$$

δηλαδή $\|\theta(f)\| \leq \sup|f|$. Επομένως η θ επεκτείνεται *μοναδικά* σε μια συνεχή γραμμική απεικόνιση, που την συμβολίζω επίσης θ, από την C^*-άλγεβρα $\mathcal{L}^\infty(K)$ στον $\mathcal{B}(H)$.

Ισχυρίζομαι τώρα ότι η θ είναι $*$-μορφισμός. Αρκεί να αποδείξω ότι η θ είναι $*$-μορφισμός στις απλές συναρτήσεις, γιατί ο πολλαπλασιασμός και η ενέλιξη είναι συνεχείς στην $\mathcal{L}^\infty(K)$ και στον $\mathcal{B}(H)$).

Παρατήρησε λοιπόν ότι αν $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$, έχουμε

$$\theta(\chi_{\Omega_1}\chi_{\Omega_2}) = \theta(\chi_\Omega) = E(\Omega) = E(\Omega_1).E(\Omega_2) = \theta(\chi_{\Omega_1}).\theta(\chi_{\Omega_2})$$

επομένως, λόγω γραμμικότητας της θ, αν f_1, f_2 είναι απλές, έχουμε

$$\theta(f_1 f_2) = \theta(f_1)\theta(f_2).$$

Όμοια, από το γεγονός ότι $E(\Omega)^* = E(\Omega)$ βρίσκουμε ότι

$$\theta(\bar{f}) = (\theta(f))^*$$

όταν η f είναι απλή.

Έτσι έχω ορίσει το ολοκλήρωμα $\int f dE \in \mathcal{B}(H)$ για κάθε $f \in \mathcal{L}^\infty(K)$, και έχω δείξει ότι η απεικόνιση $f \longrightarrow \int f dE$ είναι συνεχής *-μορφισμός.

Παρατήρηση *Η απεικόνιση αυτή δεν είναι εν γένει 1-1 (επομένως δεν είναι ισομετρία). Πράγματι, αν το σύνολο $\Omega = \{t \in K : f(t) \neq 0\}$ έχει μέτρο μηδέν, αν δηλαδή $E(\Omega) = 0$, τότε $\int f dE = 0$.*

Συνοψίζουμε τα παραπάνω με την

Πρόταση 9.4 *Αν $\{E(\Omega) : \Omega \in \mathcal{S}\}$ είναι ένα φασματικό μέτρο ορισμένο σ'έναν μετρήσιμο χώρο $(K, \mathcal{S})$ με τιμές προβολές σ'έναν χώρο Hilbert H, τότε η απεικόνιση $\chi_\Omega \to E(\Omega)$ ορίζει έναν *-μορφισμό*

$$\mathcal{L}^\infty(K) \to \mathcal{B}(H) : \ f \to \int f dE$$

*από την *-άλγεβρα $\mathcal{L}^\infty(K)$ των φραγμένων μετρήσιμων συναρτήσεων $f : K \longrightarrow \mathbb{C}$ με τιμές στον $\mathcal{B}(H)$ που ικανοποιεί*

$$\left\| \int f dE \right\| \leq \sup |f|$$

και

$$\langle (\int f dE)x, y \rangle = \int f d\mu_{xy} \qquad (x, y \in H)$$

όπου $\mu_{xy}(\Omega) = \langle E(\Omega)x, y \rangle$.

(Η τελευταία ισότητα ισχύει, όπως παρατηρήσαμε, για απλές συναρτήσεις. Η γενική περίπτωση έπεται προσεγγίζοντας την $f \in \mathcal{L}^\infty(K)$ ομοιόμορφα από μια ακολουθία απλών συναρτήσεων.)

9.3 Μέτρα και Αναπαραστάσεις

Έστω K συμπαγής χώρος Hausdorff. Τότε η $C(K)$ είναι μία μεταθετική C*-άλγεβρα. Μια ***-αναπαράσταση (*-representation)** της $C(K)$ σ'έναν χώρο Hilbert H είναι ένας *-μορφισμός π της C*-άλγεβρας $C(K)$ στην $\mathcal{B}(H)$. Θα υποθέτουμε επίσης, όπως γίνεται συνήθως[25], ότι η εικόνα της σταθερής συνάρτησης $\mathbf{1} \in C(K)$ είναι ο ταυτοτικός τελεστής I.

Παραδείγματος χάριν, αν $T \in \mathcal{B}(H)$ είναι αυτοσυζυγής τελεστής, η απεικόνιση $f \longrightarrow f(T) : C(\sigma(T)) \longrightarrow \mathcal{B}(H)$ είναι μια αναπαράσταση της C*-άλγεβρας $C(\sigma(T))$ στον H. (Όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, το ίδιο ισχύει και όταν ο T είναι φυσιολογικός.)

Λήμμα 9.5 *Κάθε *-αναπαράσταση π της $C(K)$ είναι αυτομάτως συνεχής, μάλιστα $\|\pi(f)\| \leq \|f\|_\infty$ για κάθε $f \in C(K)$.*

Απόδειξη Παρατήρησε πρώτα ότι η π διατηρεί την διάταξη, δηλαδή αν μια $f \in C(K)$ είναι μη αρνητική, τότε ο $\pi(f)$ είναι θετικός τελεστής. Πράγματι, αν $g = \sqrt{f}$ τότε $\pi(g)^* = \pi(\bar{g}) = \pi(g)$ άρα $\pi(f) = \pi(g^2) = \pi(g)^2 = \pi(g)^*\pi(g) \geq 0$.

Έστω τώρα $f \in C(K)$ με $\|f\|_\infty \leq 1$. Τότε η συνάρτηση $\mathbf{1} - f^*f = \mathbf{1} - |f|^2$ είναι μη αρνητική, και συνεπώς $\pi(\mathbf{1} - f^*f) \geq 0$, άρα για κάθε $x \in H$ έχουμε $\langle (I - \pi(f^*f))x, x\rangle \geq 0$, οπότε

$$\|\pi(f)x\|^2 = \langle \pi(f)x, \pi(f)x\rangle = \langle \pi(f^*f)x, x\rangle \leq \|x\|^2,$$

πράγμα που δείχνει ότι $\|\pi(f)\| \leq 1$. $\square$

Από την Πρόταση 9.4 έπεται ότι κάθε φασματικό μέτρο $\{E(\Omega) : \Omega \subseteq K \text{ Borel}\} \subseteq \mathcal{B}(H)$ ορίζει έναν *μορφισμό $\pi : C(K) \to \mathcal{B}(H)$ από την σχέση

$$\pi(f) = \int_K f dE \qquad (f \in C(K)).$$

Αντίστροφα,

Θεώρημα 9.6 *Κάθε *-αναπαράσταση π της $C(K)$ σ'έναν χώρο Hilbert H ορίζει ένα μοναδικό κανονικό φασματικό μέτρο $E(.)$ ορισμένο στα Borel υποσύνολα του K ώστε*

$$\int_K f dE = \pi(f) \qquad (f \in C(K)).$$

[25] Εν γένει ο τελεστής $\pi(\mathbf{1})$ είναι ορθή προβολή. Αν H_o είναι το πεδίο τιμών της, τότε ο H_o ανάγει κάθε $\pi(f)$ $(f \in C(K))$ και ο $\pi(f)$ μηδενίζεται στον $H_o^\perp$. Επομένως, περιοριζόμενοι στον H_o, μπορούμε να υποθέτουμε ότι $\pi(\mathbf{1}) = I$.

Η απόδειξη στηρίζεται σε δύο θεμελιώδη θεωρήματα, που ονομάζονται και τα δύο 'Θεωρήματα Αναπαράστασης του Riesz':

Θεώρημα 9.7 *Για κάθε συνεχή γραμμική μορφή* $\phi : C(K) \longrightarrow \mathbb{C}$ *υπάρχει* μοναδικό *κανονικό μιγαδικό μέτρο Borel* μ *στο* K *ώστε*

$$\int_K f d\mu = \phi(f) \qquad (f \in C(K))$$

και $\|\phi\| = \|\mu\|$, *όπου* $\|\mu\| = |\mu|(K)$ *η ολική κύμανση του* μ.

Για την απόδειξη, βλέπε π.χ. [16], Θεώρημα 12.38.

Θεώρημα 9.8 (Πρόταση 3.1) *Για κάθε φραγμένη sesquilinear μορφή* $\psi : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ *υπάρχει* μοναδικός $T \in \mathcal{B}(H)$ *ώστε*

$$\psi(x, y) = \langle Tx, y\rangle \quad (x, y \in H)$$

και $\|T\| = \sup\{|\psi(x, y)| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 9.6

Μοναδικότητα Αν δύο *κανονικά* φασματικά μέτρα Borel $E(.)$ και $F(.)$ ικανοποιούν

$$\int_K f dE = \pi(f) = \int_K f dF$$

για κάθε $f \in C(K)$, τότε θέτοντας $\mu_{x,y}(\Omega) = \langle E(\Omega)x, y\rangle$ και $\nu_{x,y}(\Omega) = \langle F(\Omega)x, y\rangle$, έχουμε

$$\int_K f d\mu_{x,y} = \int_K f d\nu_{x,y}$$

για κάθε $f \in C(K)$. Από την μοναδικότητα στο Θεώρημα 9.7 έπεται ότι $\mu_{x,y}(\Omega) = \nu_{x,y}(\Omega)$, δηλαδή $\langle E(\Omega)x, y\rangle = \langle F(\Omega)x, y\rangle$ για κάθε Borel $\Omega \subseteq K$. Αφού η ισότητα αυτή ισχύει για κάθε $x, y \in H$, συμπεραίνουμε ότι $E(\Omega) = F(\Omega)$.

Ύπαρξη (i) Αν σταθεροποιήσουμε δύο διανύσματα $x, y \in H$, η απεικόνιση

$$C(K) \longrightarrow \mathbb{C} : \ f \longrightarrow \langle \pi(f)x, y\rangle$$

είναι γραμμική μορφή, και φράσσεται από $\|x\|.\|y\|$, διότι

$$|\langle \pi(f)x, y\rangle| \leq \|\pi(f)\|.\|x\|.\|y\| \leq \|f\|_\infty.\|x\|.\|y\|$$

από το Λήμμα 9.5. Από το Θεώρημα 9.7, υπάρχει **μοναδικό** κανονικό μιγαδικό μέτρο Borel $\mu_{x,y}$ στο K ώστε

$$\int_K f d\mu_{x,y} = \langle \pi(f)x, y\rangle \qquad \text{για κάθε } f \in C(K) \tag{2}$$

και τέτοιο ώστε

$$\|\mu_{x,y}\| \leq \|x\|.\|y\|.$$

(ii) Σταθεροποιούμε τώρα ένα Borel υποσύνολο $\Omega \subseteq K$ και θεωρούμε την απεικόνιση

$$H \times H \longrightarrow \mathbb{C} : \ (x, y) \longrightarrow \mu_{x,y}(\Omega).$$

Παρατηρούμε ότι είναι sesquilinear και φράσσεται από 1, δηλαδή

$$\begin{gathered}\mu_{x_1+\lambda x_2,y}(\Omega) = \mu_{x_1,y}(\Omega) + \lambda\mu_{x_2,y}(\Omega)\\ \mu_{x,y_1+\lambda y_2}(\Omega) = \mu_{x,y_1}(\Omega) + \overline{\lambda}\mu_{x,y_2}(\Omega)\\ |\mu_{x,y}(\Omega)| \leq \|\mu_{x,y}\| \leq \|x\|.\|y\|.\end{gathered}$$

Πράγματι: η ανισότητα $|\mu_{x,y}(\Omega)| \leq \|\mu_{x,y}\|$ έπεται από τον ορισμό της κύμανσης ([14], Ορισμός 10.21). Επίσης, για κάθε $f \in C(K)$,

$$\begin{aligned}\textstyle\int f d\mu_{x,y_1+\lambda y_2} &= \langle \pi(f)x, y_1 + \lambda y_2\rangle = \langle \pi(f)x, y_1\rangle + \overline{\lambda}\langle \pi(f)x, y_2\rangle\\ &= \textstyle\int f d\mu_{x,y_1} + \overline{\lambda} \int f d\mu_{x,y_2}\end{aligned}$$

συνεπώς τα μέτρα $\Omega \longrightarrow \mu_{x,y_1+\lambda y_2}(\Omega)$ και $\Omega \longrightarrow \mu_{x,y_1}(\Omega) + \overline{\lambda}\mu_{xy_2}(\Omega)$ ορίζουν την ίδια γραμμική μορφή στον $C(K)$ άρα, από την μοναδικότητα στον Θεώρημα 9.7, είναι ίσα. Ομοίως αποδεικνύεται η πρώτη ισότητα.

Από το Θεώρημα 9.8, υπάρχει **μοναδικός** τελεστής $E(\Omega) \in \mathcal{B}(H)$ ώστε

$$\langle E(\Omega)x, y\rangle = \mu_{x,y}(\Omega) \qquad \text{για κάθε } x, y \in H. \tag{3}$$

(iii) Πρέπει να δειχθεί ότι το $E(.)$ είναι φασματικό μέτρο. Είναι φανερό από τον ορισμό ότι $E(\emptyset) = 0, E(K) = I$ και, φυσικά, ότι το $\Omega \longrightarrow \langle E(\Omega)x, y\rangle$ $(= \mu_{x,y}(\Omega))$ είναι σ-προσθετικό μέτρο για κάθε x, y.

(a) Ισχυρισμός $E(\Omega)^* = E(\Omega)$.

Απόδειξη Για κάθε $f \in C(K)$ έχουμε $\pi(\bar{f}) = \pi(f)^*$, άρα, αν θέσουμε $\overline{\mu_{y,x}}(\Omega) = \overline{\mu_{y,x}(\Omega)}$,

$$\int f d\mu_{x,y} = \langle \pi(f)x, y\rangle = \overline{\langle \pi(f)^* y, x\rangle} = \overline{\int \bar{f} d\mu_{y,x}} = \int f d\overline{\mu_{y,x}},$$

πράγμα που δείχνει ότι τα μέτρα $\mu_{x,y}$ και $\overline{\mu_{y,x}}$ ταυτίζονται, δηλαδή ότι

$$\langle E(\Omega)x, y\rangle = \overline{\langle E(\Omega)y, x\rangle} = \langle x, E(\Omega)y\rangle. \quad \square$$

(b) Ισχυρισμός $E(\Omega_1 \cap \Omega_2) = E(\Omega_1).E(\Omega_2)$ για κάθε ζεύγος Borel υποσυνόλων Ω_1, Ω_2 του K.

Απόδειξη Για κάθε $f, g \in C(K)$ έχουμε

$$\langle \pi(fg)x, y\rangle = \langle \pi(f)\pi(g)x, y\rangle = \langle \pi(f)(\pi(g)x), y\rangle$$

και συνεπώς, χρησιμοποιώντας την (2) για τα διανύσματα $\pi(g)x$ και y,

$$\int fg d\mu_{x,y} = \int f d\mu_{\pi(g)x,y}\,.$$

Αφού η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $f \in C(K)$, τα αντίστοιχα μέτρα ταυτίζονται, δηλαδή

$$\int_{\Omega_1} g d\mu_{x,y} = \int_{\Omega_1} d\mu_{\pi(g)x,y} = \mu_{\pi(g)x,y}(\Omega_1)$$

για κάθε Borel $\Omega_1 \subseteq K$. Από την (3), η σχέση αυτή γράφεται

$$\int_{\Omega_1} g d\mu_{x,y} = \langle E(\Omega_1)\pi(g)x, y\rangle.$$

Αλλά

$$\langle E(\Omega_1)\pi(g)x, y\rangle = \langle \pi(g)x, E(\Omega_1)^* y\rangle$$

και από την (2) έχουμε

$$\langle \pi(g)x, E(\Omega_1)^* y\rangle = \int g d\mu_{x,E(\Omega_1)^* y}$$

οπότε

$$\int_{\Omega_1} g d\mu_{x,y} = \int g d\mu_{x,E(\Omega_1)^* y}.$$

Αφού η τελευταία ισότητα ισχύει για κάθε $g \in C(K)$, τα αντίστοιχα μέτρα ταυτίζονται, δηλαδή

$$\int_{\Omega_1} \chi_{\Omega_2} d\mu_{x,y} = \int \chi_{\Omega_2} d\mu_{x,E(\Omega_1)^* y}$$

για κάθε Borel $\Omega_2 \subseteq K$. Αλλά

$$\int_{\Omega_1} \chi_{\Omega_2} d\mu_{x,y} = \mu_{x,y}(\Omega_1 \cap \Omega_2) \quad \text{και} \quad \int \chi_{\Omega_2} d\mu_{x,E(\Omega_1)^* y} = \mu_{x,E(\Omega_1)^* y}(\Omega_2)$$

και συνεπώς από την (3)

$$\langle E(\Omega_1 \cap \Omega_2)x, y\rangle = \langle E(\Omega_2)x, E(\Omega_1)^* y\rangle = \langle E(\Omega_1)E(\Omega_2)x, y\rangle.$$

Αφού αυτή η σχέση ισχύει για κάθε $x, y \in H$, δείξαμε ότι $E(\Omega_1 \cap \Omega_2) = E((\Omega_1).E(\Omega_2)$, πράγμα που ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Παρατήρηση 9.9 Οι προβολές $E(\Omega)$ ($\Omega \subseteq K$ Borel) δεν ανήκουν εν γένει στην C*-άλγεβρα $\mathcal{B} = \{\pi(f) : f \in C(K)\}$. Ανήκουν όμως στην (εν γένει) μεγαλύτερη άλγεβρα $\mathcal{B}''$, τον *δεύτερο μεταθέτη* της $\mathcal{B}$, δηλαδή μετατίθενται με κάθε φραγμένο τελεστή που μετατίθεται με την $\mathcal{B}$.

Μάλιστα, ένας τελεστής $X \in \mathcal{B}(H)$ μετατίθεται με κάθε στοιχείο $\pi(f)$ της $\mathcal{B}$ αν και μόνον αν μετατίθεται με κάθε $E(\Omega)$. Πράγματι, η σχέση $X\pi(f) = \pi(f)X$ ισχύει αν και μόνον αν για κάθε $x, y \in H$ έχουμε

$$\begin{aligned} \langle X\pi(f)x, y\rangle = \langle \pi(f)Xx, y\rangle \quad &\iff \quad \langle \pi(f)x, X^* y\rangle = \langle \pi(f)Xx, y\rangle \\ &\iff \quad \int f d\mu_{x,X^* y} = \int f d\mu_{Xx,y}\,. \end{aligned}$$

Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $f \in C(K)$ αν και μόνον αν τα μέτρα $\mu_{x,X^* y}$ και $\mu_{Xx,y}$ είναι ίσα, δηλαδή αν και μόνον αν

$$\langle E(\Omega)x, X^* y\rangle = \langle E(\Omega)Xx, y\rangle$$

για κάθε $\Omega \subseteq K$ Borel δηλαδή

$$\langle XE(\Omega)x, y\rangle = \langle E(\Omega)Xx, y\rangle$$

για κάθε $\Omega \subseteq K$ Borel.

Δείξαμε λοιπόν ότι $X\pi(f) = \pi(f)X$ για κάθε $f \in C(K)$ αν και μόνον αν $XE(\Omega) = E(\Omega)X$ για κάθε $\Omega \subseteq K$ Borel. Δηλαδή οι μεταθέτες

$$\mathcal{B}' \text{ και } \{E(\Omega) : \Omega \subseteq K \text{ Borel }\}'$$

ταυτίζονται, άρα και οι δεύτεροι μεταθέτες ταυτίζονται:

$$\{\pi(f) : f \in C(K)\}'' = \{E(\Omega) : \Omega \subseteq K \text{ Borel }\}''.$$

Οι αυτοσυζυγείς άλγεβρες της μορφής $\mathcal{B}''$ ονομάζονται **άλγεβρες von Neumann**.

9.4 Το Φασματικό Θεώρημα

9.4.1 Συνεχείς συναρτήσεις ενός φυσιολογικού τελεστή

Θα χρησιμοποιήσουμε χωρίς απόδειξη δύο αποτελέσματα για φυσιολογικούς τελεστές, τα οποία έχουμε αποδείξει για την ειδική περίπτωση των αυτοσυζυγών τελεστών. Αποδείξεις των αποτελεσμάτων αυτών υπάρχουν σε όλα τα συγγράμματα που αναφέρονται σε C^*-άλγεβρες ή άλγεβρες τελεστών (βλ. π.χ. [2], [5], [10]).

Λήμμα 9.10 *(ι) Το φάσμα οποιουδήποτε τελεστή* [26] *είναι μη κενό και (όπως έχουμε αποδείξει) συμπαγές υποσύνολο του* $\mathbb{C}$.

(ιι) Η φασματική ακτίνα κάθε φυσιολογικού τελεστή ισούται με την νόρμα του.

Λήμμα 9.11 *Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$ φυσιολογικός τελεστής. Τότε, για κάθε πολυώνυμο δύο μεταβλητών* $p(t,s) = \sum_{n,m=0}^{N} c_{nm} t^n s^m$,

$$\sigma(p(T,T^*)) = \{p(z,\bar{z}) : z \in \sigma(T)\}.$$

Αν ο T είναι φυσιολογικός τελεστής, τότε και ο $p(T,T^*)$ είναι φυσιολογικός. Πράγματι, ο $p(T,T^*)$ ανήκει στην υπάλγεβρα $\mathcal{B}_o$ του $\mathcal{B}(H)$ που παράγεται από τον T, τον T^* και τον I, η οποία είναι *μεταθετική* $*$-άλγεβρα, αφού οι T και T^* μετατίθενται.

Επομένως από τα δύο προηγούμενα Λήμματα συμπεραίνουμε αμέσως το

[26] μάλιστα, οποιουδήποτε στοιχείου μιας άλγεβρας Banach

Πόρισμα 9.12 *Με τους συμβολισμούς του προηγουμένου Λήμματος,*

$$\|p(T,T^*)\| = \sup\{|p(z,\bar{z})| : z \in \sigma(T)\}.$$

Έστω $\mathcal{A}_o \subseteq C(\sigma(T))$ η *-υπάλγεβρα που παράγεται από τις συναρτήσεις f_o, $\overline{f}_o$ και $\mathbf{1}$, όπου $f_o(z) = z$. Τα στοιχεία της $\mathcal{A}_o$ είναι όλα της μορφής $p(f_o, \overline{f}_o)$, όπου p πολυώνυμο δύο μεταβλητών. Είναι φανερό ότι η απεικόνιση $\pi_o : p(f_o, \overline{f}_o) \to p(T,T^*)$ είναι *-μορφισμός από την $\mathcal{A}_o$ στον $\mathcal{B}(H)$. Το τελευταίο πόρισμα δείχνει ότι η απεικόνιση αυτή είναι ισομετρία (άρα και 1-1). Επομένως επεκτείνεται σε ισομετρικό *-μορφισμό π ορισμένο στην κλειστή θήκη της $\mathcal{A}_o$. Όμως από την μιγαδική μορφή του Θεωρήματος Stone - Weierstrass (βλ. π.χ. [2], Θεώρημα V.8.1) έπεται ότι η κλειστή αυτή θήκη ταυτίζεται με την $C(\sigma(T))$. Πράγματι, η $\mathcal{A}_o$ είναι εξ ορισμού αυτοσυζυγής άλγεβρα που περιέχει τις σταθερές, και χωρίζει τα σημεία του συμπαγούς συνόλου $\sigma(T)$ επειδή περιέχει την ταυτοτική συνάρτηση f_o. Αποδείξαμε λοιπόν το

Θεώρημα 9.13 (Συναρτησιακός λογισμός) *Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ είναι φυσιολογικός τελεστής, η απεικόνιση $\pi_o : p(f_o, \overline{f}_o) \to p(T,T^*)$ επεκτείνεται σε ισομετρικό *-μορφισμό $\pi : C(\sigma(T)) \to \mathcal{B}(H)$. Το σύνολο τιμών του π είναι η $C^*(T)$, η μικρότερη C^*-υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(H)$ που περιέχει τον T και τον ταυτοτικό τελεστή I.*

9.4.2 Το Φασματικό Θεώρημα για φυσιολογικούς τελεστές

Θεώρημα 9.14 (Το Φασματικό Θεώρημα) *Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ είναι φυσιολογικός τελεστής, τότε υπάρχει μοναδικό κανονικό φασματικό μέτρο $\{E(\Omega) : \Omega \subseteq \mathbb{C}$ Borel $\}$ που φέρεται από το $\sigma(T)$ ώστε*

$$T = \int \lambda dE_\lambda.$$

Τέλος, ένας $X \in \mathcal{B}(H)$ μετατίθεται με τον T αν και μόνον αν μετατίθεται με κάθε $E(\Omega)$.

Απόδειξη Αν $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}(H)$ είναι η C*-άλγεβρα $C^*(T)$ που παράγει ο T και ο I, η απεικόνιση

$$\pi : C(\sigma(T)) \longrightarrow \mathcal{B} : f \longrightarrow f(T)$$

είναι ισομετρικός $*$-ισομορφισμός (Θεώρημα 9.13). Εφαρμόζεται λοιπόν το Θεώρημα 9.6, σύμφωνα με το οποίο η π ορίζει μοναδικό κανονικό φασματικό μέτρο Borel E_o στο συμπαγές $\sigma(T)$. Επεκτείνω το μέτρο αυτό στα Borel υποσύνολα του $\mathbb{C}$ θέτοντας

$$E(\Omega) = E_o(\Omega \cap \sigma(T)) \quad (\Omega \subseteq \mathbb{C} \text{ Borel}).$$

Το μέτρο αυτό *φέρεται από το* $\sigma(T)$ με την έννοια ότι κάθε ανοικτό $U \subseteq \mathbb{C}$ με $U \cap \sigma(T) = \emptyset$ ικανοποιεί $E(U) = 0$.

Έχουμε

$$\pi(f) = \int f(\lambda) dE_\lambda$$

για κάθε $f \in C(\sigma(T))$ και επομένως

$$T = \pi(id) = \int \lambda dE_\lambda.$$

Μένει να αποδειχθεί ο τελευταίος ισχυρισμός.

Υποθέτουμε πρώτα ότι ο T είναι αυτοσυζυγής. Παρατήρησε ότι ένας τελεστής X μετατίθεται με τον T αν και μόνον αν μετατίθεται με κάθε T^n, επομένως αν και μόνον αν μετατίθεται με την κλειστή θήκη του συνόλου των πολυωνύμων του T. Αλλά *επειδή ο T είναι αυτοσυζυγής*, από το Πόρισμα 7.10 γνωρίζουμε ότι η θήκη αυτή είναι το σύνολο $\{f(T) : f \in C(\sigma(T))\}$, δηλαδή η $C^*(T)$. Έπεται από την Παρατήρηση 9.9 ότι

$$XT = TX \iff XE(\Omega) = E(\Omega)X \quad \text{για κάθε } \Omega \subset \mathbb{C} \text{ Borel}.$$

Στην γενική περίπτωση, που ο T είναι απλώς φυσιολογικός, η κλειστή θήκη των πολυωνύμων του T δεν περιέχει εν γένει όλους τους $f(T)$ όπου $f \in C(\sigma(T))$ (μπορεί να μην περιέχει τον T^* - δες την Άσκηση 9.16). Η προηγούμενη απόδειξη θα είναι πλήρης (από το Θεώρημα 9.13), αν δείξω ότι $XT = TX \Longrightarrow Xp(T, T^*) = p(T, T^*)X$ για κάθε πολυώνυμο $p(.,.)$ *δύο μεταβλητών*. Αρκεί γι'αυτό να αποδείξω το

Θεώρημα 9.15 (Fuglede) *Αν ο T είναι φυσιολογικός, τότε ο X μετατίθεται με τον T αν και μόνον αν μετατίθεται με τον T^*.*

Απόδειξη Έστω $XT = TX$. Τότε, για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$, η συνάρτηση $f(z) = \exp(\bar{\lambda}z)$ είναι συνεχής στο $\sigma(T)$, άρα ορίζεται ο φυσιολογικός τελεστής $f(T) = \exp(\bar{\lambda}T)$. Επειδή ο $f(T)$ είναι όριο πολυωνύμων του T (με τα οποία ο X μετατίθεται) έχουμε

$$X.\exp(\bar{\lambda}T) = \exp(\bar{\lambda}T).X$$

Αφού $(f(z))^{-1} = \exp(-\bar{\lambda}z)$, ο τελεστής $\exp(\bar{\lambda}T)$ είναι αντιστρέψιμος με αντίστροφο τον $\exp(-\bar{\lambda}T)$. Επομένως η προηγούμενη ισότητα γράφεται

$$X = \exp(-\bar{\lambda}T)X\exp(\bar{\lambda}T)$$

άρα

$$\exp(\lambda T^*)X\exp(-\lambda T^*) = \exp(\lambda T^*)\exp(-\bar{\lambda}T)X\exp(\bar{\lambda}T)\exp(-\lambda T^*). \quad (4)$$

Παρατηρώ ότι $f(T)^* = \bar{f}(T) = \exp(\lambda T^*)$. *Επειδή ο T είναι φυσιολογικός* έχουμε από τον συναρτησιακό λογισμό για συνεχείς συναρτήσεις (Θεώρημα 9.13)

$$\exp(\lambda T^*)\exp(-\bar{\lambda}T) = \bar{f}(T)\frac{1}{f}(T) = (\bar{f}\frac{1}{f})(T) = \exp(\lambda T^* - \bar{\lambda}T)$$

(διότι $(\bar{f}\frac{1}{f})(z) = \exp(\lambda\bar{z} - \bar{\lambda}z)$). Θέτω $S = \lambda T^* - \bar{\lambda}T$ και παρατηρώ ότι $S^* = -S$. Έπεται ότι $(\exp S)^* = \exp(S^*) = \exp(-S) = (\exp S)^{-1}$, άρα $\|\exp S\|^2 = \|(\exp S)^*(\exp S)\| = 1$. Τότε όμως, από την ισότητα (4) έχω ότι

$$\|\exp(\lambda T^*)X\exp(-\lambda T^*)\| = \|(\exp S)X(\exp S^*)\| \leq \|X\|$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$. Δηλαδή, για κάθε $x, y \in H$, η συνάρτηση

$$\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : \lambda \longrightarrow \langle \exp(\lambda T^*)X\exp(-\lambda T^*)x, y\rangle$$

που είναι προφανώς ακέραια, είναι φραγμένη. Επομένως, από το Θεώρημα Liouville, είναι σταθερή, άρα $\phi(\lambda) = \phi(0)$, δηλαδή

$$\langle \exp(\lambda T^*)X\exp(-\lambda T^*)x, y\rangle = \langle Xx, y\rangle$$

για κάθε $x, y \in H$ και $\lambda \in \mathbb{C}$. Έπεται ότι

$$\exp(\lambda T^*)X\exp(-\lambda T^*) = X\ , \text{ άρα } \exp(\lambda T^*)X = X\exp(\lambda T^*)$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$. Αναπτύσσοντας την τελευταία ισότητα σε δυναμοσειρές και εξισώνοντας τους συντελεστές του λ, βρίσκουμε $T^*X = XT^*$. $\square$

Άσκηση 9.16 *Αν U είναι ο τελεστής της αμφίπλευρης μετατόπισης ($Ue_n = e_{n+1}$) στον $\ell^2(\mathbb{Z})$, δείξτε ότι για κάθε πολυώνυμο p ισχύει $\|U^* - p(U)\| \geq 1$.*

9.5 Επέκταση του συναρτησιακού λογισμού

Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$ φυσιολογικός τελεστής και $\{E(\Omega) : \Omega \subseteq \mathbb{C} \text{ Borel}\}$ το φασματικό του μέτρο. Για κάθε $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ που ο περιορισμός της $f|\sigma(T)$ είναι φραγμένη και μετρήσιμη, ορίζουμε

$$f(T) = \int f(\lambda) dE_\lambda .$$

Ειδικότερα έχουμε $\chi_\Omega(T) = E(\Omega)$ για κάθε Borel $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.

Παρατήρησε ότι ο τελεστής $f(T)$ δεν ανήκει κατ'ανάγκη στην $C^*(T)$ (αν η $f|\sigma(T)$ δεν είναι συνεχής) αλλά $f(T) \in \{T\}''$. Πράγματι, αν ένας φραγμένος τελεστής X ανήκει στον μεταθέτη του T τότε μετατίθεται με το σύνολο $\{E(\Omega) : \Omega \subseteq \mathbb{C} \text{ Borel }\}$ (από το φασματικό θεώρημα) άρα και με τον $f(T)$, που είναι όριο γραμμικών συνδυασμών φασματικών προβολών.

Από την Πρόταση 9.4 συμπεραίνουμε ότι:

Πρόταση 9.17 *Η απεικόνιση $f \longrightarrow f(T)$ είναι *-μορφισμός από την $\mathcal{L}^\infty(\sigma(T))$ στον δεύτερο μεταθέτη $\{T\}''$ που επεκτείνει τον συναρτησιακό λογισμό για πολυώνυμα, και ισχύει*

$$\|f(T)\| \leq \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \sigma(T)\} \quad (f \in \mathcal{L}^\infty(\sigma(T))).$$

Πόρισμα 9.18 *Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ είναι φυσιολογικός τελεστής και $\{E(\Omega) : \Omega \subseteq \mathbb{C} \text{ Borel }\}$ το φασματικό του μέτρο, τότε*

- *(ι) $\lambda \in \sigma(T)$ αν και μόνον αν $E(U) \neq 0$ για κάθε ανοικτό $U \subseteq \mathbb{C}$ που περιέχει το λ.*
- *(ιι) το λ είναι ιδιοτιμή του T αν και μόνον αν $E(\{\lambda\}) \neq 0$. Ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι ο $E(\{\lambda\})(H)$.*
- *(ιιι) κάθε μεμονωμένο σημείο του $\sigma(T)$ είναι ιδιοτιμή του T.*

Απόδειξη (ι) Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$. Αν $\lambda \notin \sigma(T)$, τότε υπάρχει ανοικτή περιοχή U του λ ώστε $U \cap \sigma(T) = \emptyset$, οπότε $E(U) = 0$ αφού το E φέρεται από το $\sigma(T)$.

Αν αντίστροφα υπάρχει ανοικτή περιοχή U του λ ώστε $E(U) = 0$, τότε η συνάρτηση

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{z-\lambda} & z \notin U \\ 0 & z \in U \end{cases}$$

ορίζεται, είναι φραγμένη και μετρήσιμη, και για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ικανοποιεί $(z - \lambda)f(z) = 1 - \chi_U(z)$. Συνεπώς από τον συναρτησιακό λογισμό (Πρόταση 9.17) έχουμε
$$(T - \lambda I)f(T) = f(T)(T - \lambda I) = I - E(U) = I$$
(γιατί $\chi_U(T) = E(U)$) πράγμα που δείχνει ότι ο $T - \lambda I$ είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή ότι $\lambda \notin \sigma(T)$. $\square$

(ιι) Έστω $\Omega = \{\lambda\}$ και $g(z) = z - \lambda$. Τότε $g\chi_\Omega = 0$ άρα $g(T)E(\Omega) = 0$, δηλαδή $(T - \lambda I)E(\Omega) = 0$.

Αν λοιπόν θέσουμε $F = \ker(T - \lambda I)$ δηλαδή
$$F = \{x \in H : (T - \lambda I)x = 0\}$$
τότε $E(\Omega)(H) \subseteq F$.

Αντίστροφα, αν $x \in F$ θα δείξω ότι $x \in E(\Omega)(H)$. Πράγματι, αν V_n είναι ακολουθία ανοικτών συνόλων που φθίνει[27] προς το $\Omega = \{\lambda\}$, τότε, όπως δείξαμε στην Παρατήρηση 9.3, $\|E(V_n)x - E(\Omega)x\| \to 0$.

Αν θέσω $f_n(z) = (z - \lambda)^{-1}$ για $z \notin V_n$ και $f_n(z) = 0$ για $z \in V_n$ (όπως στο (ι)) τότε $f_n(z)(z - \lambda) = 1 - \chi_{V_n}$, άρα $f_n(T)(T - \lambda I) = I - E(V_n)$ και συνεπώς
$$x - E(V_n)x = f_n(T)(T - \lambda I)x = 0$$
(αφού $x \in F$) δηλαδή $E(V_n)x = x$ για κάθε n άρα $E(\Omega)x = x$.

Δείξαμε λοιπόν ότι $E(\{\lambda\})(H) = \ker(T - \lambda I)$.

Το (ιιι) είναι άμεση συνέπεια του (ιι), γιατί υπάρχει ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}$ ώστε $E(U) = E(U \cap \sigma(T)) = E(\{\lambda\})$. $\square$

Η **αριθμητική ακτίνα (numerical radius)** ενός τελεστή $T \in \mathcal{B}(H)$ είναι ο αριθμός
$$w(T) = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H, \|x\| = 1\}.$$
Δεν είναι δύσκολο να δειχθεί ότι $\|T\|/2 \leq w(T) \leq \|T\|$ και ότι οι ανισότητες αυτές είναι εν γένει οι καλύτερες δυνατές. Όταν ο T είναι φυσιολογικός, τα πράγματα είναι πολύ καλύτερα:

Πόρισμα 9.19 *Η αριθμητική ακτίνα ενός φυσιολογικού τελεστή $T \in \mathcal{B}(H)$ ισούται με την νόρμα του.*

[27] δηλαδή $V_n \supseteq V_{n+1}$ και $\cap_n V_n = \Omega$

Απόδειξη Εφόσον $\|T\| = \rho(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$ (Λήμμα 9.10 (ιι)) και το $\sigma(T)$ είναι κλειστό, υπάρχει $\lambda \in \sigma(T)$ ώστε $|\lambda| = \|T\|$. Έστω $\epsilon > 0$. Θα βρω $x \in H$ με $\|x\| = 1$ ώστε $|\langle Tx, x\rangle - \lambda| \leq \epsilon$. Αν $\Omega = \{z \in \sigma(T) : |z - \lambda| < \epsilon\}$ τότε $E(\Omega) \neq 0$ από το προηγούμενο Πόρισμα. Έστω $x \in E(\Omega)(H)$ με $\|x\| = 1$. Αν $f(z) = (z - \lambda)\chi_\Omega(z)$, τότε έχουμε $f(T) = (T - \lambda I)E(\Omega)$, άρα $f(T)x = Tx - \lambda x$, οπότε

$$|\langle Tx, x\rangle - \lambda| = |\langle Tx - \lambda x, x\rangle| = |\langle f(T)x, x\rangle| \leq \|f(T)\| .$$

Όμως $\|f(T)\| \leq \epsilon$ αφού $|f(z)| \leq \epsilon$ για κάθε $z \in \sigma(T)$. $\square$

10 Τοπολογίες στον $\mathcal{B}(H)$

Ο χώρος $\mathcal{B}(H)$, εφοδιασμένος με την νόρμα τελεστή, είναι βέβαια χώρος Banach. Όμως, επειδή αποτελείται από τελεστές που δρούν σ'έναν άλλον χώρο, εφοδιάζεται και με άλλες τοπολογίες, πιο στενά συνδεδεμένες με την δράση του στον χώρο H.

10.1 Η ισχυρή τοπολογία τελεστών (SOT)

Ορισμός 10.1 *Έστω H χώρος Hilbert. Η* ***ισχυρή τοπολογία τελεστών (strong operator topology, SOT)*** *στον $\mathcal{B}(H)$ είναι η τοπολογία της σύγκλισης κατά σημείο στον H. Δηλαδή ένα δίκτυο (T_i) από φραγμένους τελεστές συγκλίνει στον φραγμένο τελεστή T ως προς την SOT αν και μόνον αν $\|T_i x - Tx\| \to 0$ για κάθε $x \in H$.*

Μια βάση περιοχών του $A \in \mathcal{B}(H)$ για την SOT είναι η οικογένεια

$$\mathcal{V} \equiv \{V(A, \epsilon, x_1, x_2, \ldots, x_n) : \epsilon > 0,\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in H,\, n \in \mathbb{N}\}$$

όπου

$$V(A, \epsilon, x_1, \ldots, x_n) = \{T \in \mathcal{B}(H) : \|(T - A)x_k\| < \epsilon, k = 1, \ldots, n\}.$$

Για τεχνικούς λόγους, θα μας είναι επίσης χρήσιμη μια άλλη βάση περιοχών για την ίδια τοπολογία:

$$\mathcal{W} \equiv \{W(A, \epsilon, x_1, x_2, \ldots, x_n) : \epsilon > 0,\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in H,\, n \in \mathbb{N}\}$$

όπου

$$W(A, \epsilon, x_1, \ldots, x_n) = \{T \in \mathcal{B}(H) : \sum_{k=1}^{n} \|(T - A)x_k\|^2 < \epsilon^2\}.$$

Πράγματι, από τις ανισότητες

$$\max\{|a_k|^2 : k = 1, \ldots, n\} \le \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \le n \max\{|a_k|^2 : k = 1, \ldots, n\}$$

έπεται άμεσα ότι

$$W(A, \epsilon, x_1, \ldots, x_n) \subseteq V(A, \epsilon, x_1, \ldots, x_n) \subseteq W(A, n^{1/2}\epsilon, x_1, \ldots, x_n)$$

επομένως η τοπολογία που ορίζεται από την οικογένεια $\mathcal{V}$ ταυτίζεται με αυτήν που ορίζεται από την $\mathcal{W}$. Είναι προφανές ότι ένα δίκτυο (T_i) του $\mathcal{B}(H)$ συγκλίνει στον $A \in \mathcal{B}(H)$ ως προς την τοπολογία αυτή αν και μόνον αν $\|T_i x - Ax\| \to 0$ σε κάθε σημείο x του H.

Η SOT είναι ασθενέστερη από την τοπολογία της νόρμας (αν $\|T_i\| \to 0$ τότε $\|T_i x\| \to 0$ για κάθε $x \in H$). Μάλιστα είναι γνήσια ασθενέστερη αν (και μόνον αν) ο H είναι απειροδιάστατος. Πράγματι αν (e_n) είναι μια ορθοκανονική ακολουθία και ορίσουμε τον τελεστή T_n από την σχέση $T_n x = \langle x, e_n \rangle e_1$ ($x \in H$), τότε $\|T_n x\| = |\langle x, e_n \rangle| \to 0$ για κάθε x, άρα η (T_n) συγκλίνει στο 0 ως προς την SOT, αλλά όχι ως προς την νόρμα γιατί $\|T_n\| = 1$ για κάθε n.

Η SOT είναι τοπολογία Hausdorff. Πράγματι, αν $A, B \in \mathcal{B}(H)$ και $A \neq B$, υπάρχει $x \in H$ ώστε $\|Ax - Bx\| \equiv 2\delta > 0$. Τότε τα σύνολα $V(A, \delta, x)$ και $V(B, \delta, x)$ είναι SOT-ανοικτά και διαχωρίζουν τα A και B.

Δεν είναι όμως μετρικοποιήσιμη (εκτός βέβαια αν $\dim H < \infty$):

Πρόταση 10.1 *Έστω H απειροδιάστατος χώρος Hilbert. Υπάρχει υποσύνολο $\mathcal{E}$ του $\mathcal{B}(H)$ ώστε $0 \in \overline{\mathcal{E}}^{SOT}$ αλλά καμμιά ακολουθία του $\mathcal{E}$ δεν συγκλίνει στο 0 ως προς την SOT. Επομένως η SOT δεν είναι μετρικοποιήσιμη τοπολογία* [28].

Απόδειξη Έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία στον H και P_n η ορθή προβολή στον υπόχωρο $[e_n]$. Θέτουμε $\mathcal{E} = \{\sqrt{n} P_n : n \in N\}$. Εφόσον $\|\sqrt{n} P_n\| \to \infty$ δεν υπάρχει *ακολουθία* στο $\mathcal{E}$ που να συγκλίνει στο 0 ως προς την SOT. Πράγματι, κάθε SOT-συγκλίνουσα *ακολουθία* είναι κατά σημείο φραγμένη και συνεπώς, από την Αρχή Ομοιομόρφου Φράγματος, είναι ομοιόμορφα φραγμένη.

Ισχυρίζομαι όμως ότι $0 \in \overline{\mathcal{E}}^{\text{SOT}}$. Πράγματι, αν όχι, θα υπήρχε μια SOT-περιοχή V του 0 με $\mathcal{E} \cap V = \emptyset$. Η V περιέχει μια βασική περιοχή της μορφής

$$W = \{T \in \mathcal{B}(H) : \sum_{k=1}^{m} \|T x_k\|^2 < \varepsilon^2\}$$

Επομένως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο τελεστής $\sqrt{n} P_n$ δεν ανήκει στην W, άρα $\sum_{k=1}^{m} \|\sqrt{n} P_n x_k\|^2 \geq \varepsilon^2$, οπότε $\sum_{k=1}^{m} n |\langle x_k, e_n \rangle|^2 \geq \varepsilon^2$. Έπεται από την ανισό-

[28] ούτε καν πρώτη αριθμήσιμη, δηλαδή το 0 δεν έχει αριθμήσιμη βάση περιοχών

τητα Bessel ότι

$$\sum_{k=1}^{m}\|x_k\|^2 \geq \sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x_k, e_n\rangle|^2 \geq \varepsilon^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty$$

άτοπο. $\square$

Είναι φανερό από τον ορισμό ότι η SOT είναι *τοπολογία γραμμικού χώρου* δηλαδή ότι οι γραμμικές πράξεις

$$(\mathcal{B}(H), \text{SOT}) \times (\mathcal{B}(H), \text{SOT}) \longrightarrow (\mathcal{B}(H), \text{SOT}) : \ (A, B) \longrightarrow A + B$$

$$\text{και} \qquad (\mathbb{C}, |.|) \times (\mathcal{B}(H), \text{SOT}) \longrightarrow (\mathcal{B}(H), \text{SOT}) : \ (\lambda, A) \longrightarrow \lambda A$$

είναι συνεχείς. Δεν ισχύει όμως το ίδιο για τον πολλαπλασιασμό (την σύνθεση) τελεστών:

Πρόταση 10.2 *Έστω H απειροδιάστατος χώρος Hilbert.*
(i) *Ο πολλαπλασιασμός*

$$(\mathcal{B}(H), \text{SOT}) \times (\mathcal{B}(H), \text{SOT}) \longrightarrow (\mathcal{B}(H), \text{SOT}) : \ (A, B) \longrightarrow AB$$

δεν είναι συνεχής.
(ii) *Όμως, για κάθε $r > 0$, ο περιορισμός του*

$$(\mathcal{B}(H)_r, \text{SOT}) \times (\mathcal{B}(H), \text{SOT}) \longrightarrow (\mathcal{B}(H), \text{SOT}) : \ (A, B) \longrightarrow AB$$

(όπου $\mathcal{B}(H)_r = \{T \in \mathcal{B}(H) : \|T\| \leq r\}$) είναι συνεχής.
(iii) *Ο πολλαπλασιασμός είναι ακολουθιακά συνεχής, δηλαδή αν $(A_n), (B_n)$ είναι ακολουθίες με $A_n \xrightarrow{\text{SOT}} A$ και $B_n \xrightarrow{\text{SOT}} B$ τότε $A_nB_n \xrightarrow{\text{SOT}} AB$.*
(iv) *Ο πολλαπλασιασμός είναι χωριστά συνεχής, δηλαδή για κάθε $A \in \mathcal{B}(H)$ οι απεικονίσεις*

$$\begin{aligned} & L_A : (\mathcal{B}(H), \text{SOT}) \longrightarrow (\mathcal{B}(H), \text{SOT}) : B \longrightarrow AB \\ \textit{και} \qquad & R_A : (\mathcal{B}(H), \text{SOT}) \longrightarrow (\mathcal{B}(H), \text{SOT}) : B \longrightarrow BA \end{aligned}$$

είναι συνεχείς.

Απόδειξη (i) Θα κατασκευάσω δύο δίκτυα (A_F) και (B_F) που καθένα συγκλίνει SOT στο 0, αλλά το δίκτυο $(A_F B_F)$ δεν συγκλίνει SOT στο 0.

Το σύνολο δεικτών θα είναι το σύνολο $\mathcal{F}$ των υποχώρων F του H που έχουν πεπερασμένη διάσταση ($\dim F \equiv n_F$), διατεταγμένο από την σχέση του περιέχεσθαι. Για κάθε $F \in \mathcal{F}$, θέτω $A_F = n_F P_F^{\perp}$ (όπου $P_F^{\perp}$ η ορθή προβολή στον υπόχωρο $F^{\perp}$).

Επίσης, επιλέγω μια μερική ισομετρία U_F με αρχικό χώρο F και τελικό χώρο έναν υπόχωρο[29] του $F^{\perp}$ και θέτω $B_F = \frac{1}{n_F} U_F$.

Ισχυρίζομαι ότι $A_F \xrightarrow{\text{SOT}} 0$. Πράγματι, έστω $x \in H$ και $\epsilon > 0$. Αν $F_o = [x] \in \mathcal{F}$, τότε για κάθε $F \in \mathcal{F}$ με $F \supseteq F_o$ έχουμε $P_F^{\perp} x = 0$ άρα $\|A_F x\| = 0 < \epsilon$.

Ισχυρίζομαι ότι $\|B_F\| \longrightarrow 0$ (άρα και $B_F \xrightarrow{\text{SOT}} 0$). Πράγματι, αν $\epsilon > 0$ επιλέγω $F_o \in \mathcal{F}$ με $\frac{1}{\dim F_o} < \epsilon$, οπότε για κάθε $F \in \mathcal{F}$ με $F \supseteq F_o$ έχουμε $\|B_F\| = \frac{1}{\dim F} < \epsilon$.

Όμως, αν $x \in H$, $x \neq 0$, τότε $A_F B_F x \nrightarrow 0$. Πράγματι, $A_F B_F = P_F^{\perp} U_F = U_F$ γιατί $U_F(H) \subseteq F^{\perp}$. Επομένως αν $F_o = [x]$ τότε για κάθε $F \in \mathcal{F}$ με $F \supseteq F_o$ έχουμε $\|U_F x\| = \|x\|$ άρα $\|U_F x\| \nrightarrow 0$.

(ii) Αν τα δίκτυα (A_i) και (B_i) τείνουν στο 0 ως προς την SOT *και επιπλέον το πρώτο* είναι φραγμένο[30], $\|A_i\| \leq r$ για κάθε i, τότε για κάθε $x \in H$

$$\|A_i B_i x\| \leq \|A_i\|.\|B_i x\| \leq r\|B_i x\| \longrightarrow 0,$$

άρα $A_i B_i \xrightarrow{\text{SOT}} 0$.

(iii) Αν *οι ακολουθίες* (A_n) και (B_n) τείνουν στο 0 ως προς την SOT, τότε η A_n είναι ομοιόμορφα φραγμένη (όπως είδαμε στην απόδειξη της Πρότασης 10.1), άρα $A_n B_n \xrightarrow{\text{SOT}} 0$ από το (ιι).

(iv) Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ και $B_i \xrightarrow{\text{SOT}} B$ τότε από το (ιι) έχουμε $AB_i \xrightarrow{\text{SOT}} AB$. Επίσης για κάθε $x \in H$ έχουμε $B_i(Ax) \longrightarrow B(Ax)$ άρα $B_i A \xrightarrow{\text{SOT}} BA$. $\square$

[29] επιλέγω μια ορθοκανονική βάση $x_1, \ldots, x_{n_F}$ του F και ένα τυχαίο ορθοκανονικό σύνολο $\{y_1, \ldots, y_{n_F}\} \subseteq F^{\perp}$ (αυτό είναι δυνατόν γιατί $\dim F \leq \dim F^{\perp}$) και ορίζω την U_F από τις σχέσεις $U_F x_k = y_k$, $k = 1, \ldots, n_F$.

[30] Παρατήρησε όμως ότι, όπως φαίνεται από το παράδειγμα από το (ι), το συμπέρασμα δεν ισχύει αν το *δεύτερο δίκτυο* είναι φραγμένο, έστω και αν $\|B_i\| \to 0$.

Πρόταση 10.3 *Αν H είναι απειροδιάστατος χώρος Hilbert, η ενέλιξη*

$$(\mathcal{B}(H), \text{SOT}) \longrightarrow (\mathcal{B}(H), \text{SOT}) : A \longrightarrow A^*$$

δεν είναι (ούτε ακολουθιακά) συνεχής.

Για την απόδειξη, αν $H = \ell^2$, ένα κατάλληλο παράδειγμα είναι η n-οστή δύναμη του τελεστή της μετατόπισης αριστερά. Το παράδειγμα μεταφέρεται εύκολα σε έναν αυθαίρετο χώρο Hilbert:

Παράδειγμα 10.4 *Αν $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια ορθοκανονική ακολουθία στον H και H_o ο κλειστός υπόχωρος που παράγει, ορίζουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$*

$$T_n e_k = \begin{cases} 0, & k \leq n \\ e_{k-n}, & k > n \end{cases}$$

και $T_n x = 0$ αν $x \perp H_o$. Τότε $T_n \stackrel{\text{SOT}}{\longrightarrow} 0$, ενώ $T_n^* \stackrel{\text{SOT}}{\nrightarrow} 0$.

Πράγματι, αν $x = \sum_k \langle x, e_k \rangle e_k + x_1$ όπου $x_1 \perp H_o$, τότε

$$T_n x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle T_n e_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_{k-n}$$

άρα

$$\|T_n x\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2$$

και συνεπώς $\|T_n x\| \to 0$.

Ελέγχεται όμως εύκολα ότι $T_n^* e_k = e_{k+n}$ (και $T_n^* x = 0$ αν $x \perp H_o$), άρα $\|T_n^* e_1\| = 1$ για κάθε n και συνεπώς $T_n^* e_1 \nrightarrow 0$.

10.2 Η ασθενής τοπολογία τελεστών (WOT)

Αν $x, y \in H$, θέτουμε

$$\omega_{x,y} : \mathcal{B}(H) \longrightarrow \mathbb{C} : T \longrightarrow \langle Tx, y \rangle.$$

Η ανισότητα $|\langle Tx, y \rangle| \leq \|T\| \|x\| \|y\|$ δείχνει ότι η $\omega_{x,y}$ είναι $\|.\|$-συνεχής στον $\mathcal{B}(H)$ και $\|\omega_{x,y}\| \leq \|x\| \|y\|$. Μάλιστα ισχύει ισότητα, γιατί αν $y \otimes x^*$ είναι ο τελεστής $y \otimes x^* : z \longrightarrow \langle z, x \rangle y$ τότε εύκολα βλέπουμε ότι $\|y \otimes x^*\| = \|x\| \|y\|$ και $\omega_{x,y}(y \otimes x^*) = \|x\|^2 \|y\|^2$. Επομένως

$$\|\omega_{x,y}\| = \|x\| \|y\|.$$

Ορισμός 10.2 *Έστω H χώρος Hilbert. Η* ***ασθενής τοπολογία τελεστών (weak operator topology, WOT)*** *στον $\mathcal{B}(H)$ είναι η ασθενέστερη τοπολογία ως προς την οποία όλες οι γραμμικές μορφές*

$$\omega_{x,y} \qquad (x, y \in H)$$

είναι συνεχείς.

Δηλαδή ένα δίκτυο (T_i) από φραγμένους τελεστές συγκλίνει στον φραγμένο τελεστή T ως προς την WOT αν και μόνον αν $\langle T_i x - Tx, y\rangle \to 0$ για κάθε $x, y \in H$.

Πρέπει να τονισθεί ότι η WOT *δεν ταυτίζεται* με την ασθενή τοπολογία $w = \sigma(\mathcal{B}(H), \mathcal{B}(H)^*)$ που επάγεται στον χώρο Banach $(\mathcal{B}(H), \|.\|)$ από τον τοπολογικό δυϊκό του $\mathcal{B}(H)^*$ (βλ. Παρατήρηση 10.6 (ιι)).

Η ανισότητα $|\langle Tx, y\rangle| \le \|Tx\|\|y\|$ δείχνει ότι η WOT είναι ασθενέστερη από την SOT. Μάλιστα, είναι γνήσια ασθενέστερη (όταν $\dim H = +\infty$): Η ακολουθία (T_n^*) του Παραδείγματος 10.4 δεν συγκλίνει στο 0 ως προς την SOT, αλλά συγκλίνει ως προς την WOT, γιατί $|\langle T_n^* x, y\rangle| = |\langle x, T_n y\rangle| \le \|x\|\|T_n y\| \to 0$ αφού $T_n \xrightarrow{\text{SOT}} 0$. Θα δείξουμε ότι παρόλα αυτά, οι δύο αυτές τοπολογίες έχουν τις ίδιες συνεχείς γραμμικές μορφές.

Συμβολισμός *Έστω H^n το ευθύ άθροισμα n αντιγράφων του H (με το εσωτερικό γινόμενο $\langle (y_1, \dots, y_n), (u_1, \dots, u_n)\rangle_n = \sum_k \langle y_k, u_k\rangle$). Αν $T \in \mathcal{B}(H)$, συμβολίζουμε $T^{(n)}$ τον τελεστή στον H^n που ορίζεται από την σχέση*
$T^{(n)}(y_1, \dots, y_n) = (Ty_1, \dots, Ty_n)$.

Η απεικόνιση $A \longrightarrow A^{(n)}$ είναι ισομετρικός *-μορφισμός, και είναι (SOT-SOT)-συνεχής. Αν $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ είναι [αυτοσυζυγής] άλγεβρα, τότε η εικόνα της $\mathcal{A}^{(n)} \subseteq \mathcal{B}(H^n)$ είναι [αυτοσυζυγής] άλγεβρα (και περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή του H^n αν και μόνον αν η $\mathcal{A}$ περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή του H).

Σημειώνουμε ότι η $\mathcal{A}^{(n)}$ *δεν ταυτίζεται* με το ευθύ άθροισμα n αντιγράφων της $\mathcal{A}$. Παραδείγματος χάριν,

$$\mathcal{A}^{(2)} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} : A \in \mathcal{A} \right\} \qquad \text{ενώ} \quad \mathcal{A} \oplus \mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} : A, B \in \mathcal{A} \right\}.$$

Πρόταση 10.5 *Ονομάζουμε $\mathcal{B}_\sim(H)$ την γραμμική θήκη*

$$\mathcal{B}_\sim(H) = [\omega_{x,y} : x, y \in H] = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \omega_{x_k, y_k} : x_k, y_k \in H, n \in \mathbb{N} \right\}$$

(η δεύτερη ισότητα έπεται από την παρατήρηση ότι $\lambda\omega_{x,y} = \omega_{\lambda x,y}$). Μία γραμμική μορφή $\omega : \mathcal{B}(H) \to \mathbb{C}$ είναι WOT-συνεχής αν και μόνον αν είναι SOT-συνεχής, αν και μόνον αν $\omega \in \mathcal{B}_\sim(H)$.

Απόδειξη (i) Είναι φανερό ότι, αν $\omega \in \mathcal{B}_\sim(H)$, τότε η ω είναι WOT-συνεχής, εφόσον κάθε $\omega_{x,y}$ είναι WOT-συνεχής.

(ii) Αν η ω είναι WOT-συνεχής, τότε είναι SOT-συνεχής, αφού η SOT είναι ισχυρότερη από την WOT.

(iii) Έστω ότι μια γραμμική μορφή ω είναι SOT-συνεχής. Θα δείξουμε ότι $\omega \in \mathcal{B}_\sim(H)$. Επειδή η ω είναι SOT-συνεχής, υπάρχει μια SOT-βασική περιοχή του 0, έστω

$$W = \{T \in \mathcal{B}(H) : \sum_{k=1}^{n} \|Tx_k\|^2 < \epsilon^2\}$$

ώστε $|\omega(T)| < 1$ για κάθε $T \in W$. Αν θέσουμε $y_k = \frac{2}{\epsilon}x_k$ και $p(T) = (\sum_{k=1}^{n} \|Ty_k\|^2)^{1/2}$ τότε

$$W = \{T \in \mathcal{B}(H) : p(T) < 2\}$$

Έπεται ότι

$$|\omega(T)| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \|Ty_k\|^2\right)^{1/2} \qquad \text{για κάθε } T \in \mathcal{B}(H). \qquad (*)$$

Πράγματι, αν $p(T) \neq 0$ τότε $\frac{T}{p(T)} \in W$ άρα $|\omega(\frac{T}{p(T)})| < 1$ δηλαδή $|\omega(T)| < p(T)$ και συνεπώς ισχύει η (*). Αν πάλι $p(T) = 0$ τότε $nT \in W$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ άρα $|\omega(nT)| < 1$ για κάθε n και συνεπώς $\omega(T) = 0$ άρα πάλι ισχύει η (*).

Θεωρούμε τον υπόχωρο

$$K = \{(Ty_1, Ty_2, \ldots, Ty_n) : T \in \mathcal{B}(H)\} \subseteq H^n.$$

Παρατηρούμε ότι αν $(Ty_1, Ty_2, \ldots, Ty_n) = 0$ τότε $\omega(T) = 0$ από την (*). Συνεπώς η απεικόνιση

$$\phi : K \longrightarrow \mathbb{C} : (Ty_1, Ty_2, \ldots, Ty_n) \longrightarrow \omega(T)$$

είναι καλά ορισμένη και βεβαίως είναι γραμμική. Μάλιστα η (*) δείχνει ακριβώς ότι η ϕ είναι συνεχής (ως προς την νόρμα του H^n). Συνεπώς επεκτείνεται σε συνεχή γραμμική μορφή στον χώρο Hilbert H^n, άρα υπάρχει $(u_1, \ldots, u_n) \in H^n$ ώστε

$$\begin{aligned}\phi(Ty_1, Ty_2, \ldots, Ty_n) &= \langle (Ty_1, Ty_2, \ldots, Ty_n), (u_1, \ldots, u_n) \rangle_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle Ty_k, u_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \omega_{y_k, u_k}(T)\end{aligned}$$

για κάθε $(Ty_1, Ty_2, \ldots, Ty_n) \in K$, δηλαδή

$$\omega(T) = \sum_{k=1}^{n} \omega_{y_k, u_k}(T)$$

για κάθε $T \in \mathcal{B}(H)$, άρα $\omega \in \mathcal{B}_\sim(H)$. $\square$

Παρατηρήσεις 10.6 (i) *Κάθε $\omega \in \mathcal{B}_\sim(H)$ μπορεί να γραφεί στην μορφή $\omega = \sum_{m=1}^{n} \omega_{x_m, y_m}$ όπου η οικογένεια $\{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι ορθοκανονική.*

Πράγματι, αν $\omega = \sum_{k=1}^{l} \omega_{u_k, v_k}$, επιλέγοντας μια ορθοκανονική βάση $\{x_1, \ldots, x_n\}$ του χώρου $[u_1, \ldots, u_l]$ και γράφοντας $u_k = \sum_{m=1}^{n} a_{km} x_m$ (όπου $a_{km} = \langle u_k, x_m \rangle$) έχουμε, για κάθε $T \in \mathcal{B}(H)$,

$$\begin{aligned}\omega(T) &= \sum_{k=1}^{l} \langle Tu_k, v_k \rangle = \sum_{k=1}^{l} \langle T(\sum_{m=1}^{n} a_{km} x_m), v_k \rangle \\ &= \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} \langle Tx_m, \bar{a}_{km} v_k \rangle = \sum_{m=1}^{n} \langle Tx_m, \sum_{k=1}^{l} \bar{a}_{km} v_k \rangle = \sum_{m=1}^{n} \langle Tx_m, y_m \rangle\end{aligned}$$

όπου $y_m = \sum_{k=1}^{l} \bar{a}_{km} v_k$.

Έπεται ότι *οι γραμμικές μορφές $\omega \in \mathcal{B}_\sim(H)$ καθορίζονται από τον περιορισμό τους στον υπόχωρο $\mathcal{F}(H) \subseteq \mathcal{B}(H)$ των τελεστών πεπερασμένης τάξης.*

Πράγματι, για κάθε $x, y \in H$ έχουμε

$$\omega(x \otimes y*) = \sum_{m=1}^{n} \langle \langle x_m, y \rangle x, y_m \rangle = \langle x, \sum_{m=1}^{n} \langle y, x_m \rangle y_m \rangle. \tag{5}$$

Επομένως αν $\omega(x \otimes y*) = 0$ για κάθε $x, y \in H$ τότε $\sum_{m=1}^{n} \langle y, x_m \rangle y_m = 0$ για κάθε $y \in H$, οπότε (αφού τα x_m είναι ορθοκανονικά) θέτοντας $y = x_m$ βρίσκουμε $y_m = 0$ για κάθε $m = 1, \ldots, n$, άρα $\omega = 0$.

(ii) *Η WOT* δεν ταυτίζεται *με την ασθενή τοπολογία* $w = \sigma(\mathcal{B}(H), \mathcal{B}(H)^*)$ *που επάγεται στον χώρο Banach* $(\mathcal{B}(H), \|.\|)$ *από τον τοπολογικό δυϊκό του* $\mathcal{B}(H)^*$. Η w είναι (γνήσια) ισχυρότερη από την WOT (όταν $\dim H = \infty$): είναι η ασθενέστερη τοπολογία στον $\mathcal{B}(H)$ ως προς την οποία **όλες** οι $\|.\|$-συνεχείς γραμμικές μορφές είναι συνεχείς, ενώ για την WOT απαιτούνται «μόνον» οι γραμμικές μορφές $\omega \in \mathcal{B}_\sim(H)$. Οι γραμμικές αυτές μορφές καθορίζονται, όπως είδαμε, από τον περιορισμό τους στον υπόχωρο $\mathcal{F}(H) \subseteq \mathcal{B}(H)$ των τελεστών πεπερασμένης τάξης. Αλλά, από το Θεώρημα Hahn-Banach, υπάρχει $\|.\|$-συνεχής γραμμική μορφή $\psi : \mathcal{B}(H) \to \mathbb{C}$ με $\psi(I) \neq 0$ που μηδενίζει τον $\mathcal{F}(H)$, άρα δεν μπορεί να ανήκει στον $\mathcal{B}_\sim(H)$. Πράγματι, ο ταυτοτικός τελεστής δεν ανήκει στην $\|.\|$-κλειστή θήκη του $\mathcal{F}(H)$ γιατί η ανοικτή σφαίρα με κέντρο I και ακτίνα 1 αποτελείται από αντιστρέψιμους τελεστές[31], συνεπώς δεν μπορεί να περιέχει τελεστή πεπερασμένης τάξης.

(iii) *Εύκολα φαίνεται ότι η WOT είναι τοπολογία γραμμικού χώρου και ότι είναι Hausdorff* (οι γραμμικές μορφές $\omega_{x,y}$ χωρίζουν τα σημεία του $\mathcal{B}(H)$).

Πρόταση 10.7 *(i) Η ενέλιξη είναι WOT-WOT συνεχής στον* $\mathcal{B}(H)$, *και ο πολλαπλασιασμός είναι χωριστά WOT-WOT συνεχής.*

(ii) Ο πολλαπλασιασμός

$$(\mathcal{B}(H), \mathrm{WOT}) \times (\mathcal{B}(H), \mathrm{WOT}) \longrightarrow (\mathcal{B}(H), \mathrm{WOT}) : \ (A, B) \longrightarrow AB$$

δεν είναι *συνεχής, ούτε καν ακολουθιακά (άρα ούτε περιορισμένος σε φραγμένα σύνολα).*

Απόδειξη (i) Έστω $A_i \xrightarrow{\mathrm{WOT}} A$ και $B, C \in \mathcal{B}(H)$. Τότε για κάθε $x, y \in H$ έχουμε

$$\langle A_i^* x, y\rangle = \langle x, A_i y\rangle \to \langle x, Ay\rangle = \langle A^* x, y\rangle$$

πράγμα που δείχνει ότι η ενέλιξη είναι WOT-WOT συνεχής. Επίσης

$$\langle BA_iCx, y\rangle = \langle A_i(Cx), (B^*y)\rangle \to \langle A(Cx), (B^*y)\rangle = \langle BACx, y\rangle$$

πράγμα που δείχνει ότι οι απεικονίσεις $L_B : A \to BA$ και $R_C : A \to AC$ είναι WOT-WOT συνεχείς.

---

[31] αν $\|T - I\| < I$ τότε η «γεωμετρική» σειρά $\sum_{n\geq 0}(I-T)^n$ συγκλίνει στον T^{-1}

(ii) Θεωρούμε την ακολουθία (T_n) του Παραδείγματος 10.4: είναι φραγμένη και συγκλίνει στο 0 ως προς την SOT, άρα και ως προς την WOT. Συνεπώς από το (ι) έχουμε $T_n^* \xrightarrow{\text{WOT}} 0$. Όμως $T_nT_n^*e_1 = e_1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $T_nT_n^* \overset{\text{WOT}}{\nrightarrow} 0$. $\square$

Πόρισμα 10.8 *Ένα κυρτό υποσύνολο (ειδικότερα, ένας γραμμικός υπόχωρος) $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$ είναι SOT-κλειστός αν και μόνον αν είναι WOT-κλειστός.*

Απόδειξη Εφόσον η WOT είναι ασθενέστερη τοπολογία από την SOT, έχουμε $\overline{\mathcal{S}}^{\text{SOT}} \subseteq \overline{\mathcal{S}}^{\text{WOT}}$. Αν όμως $A \notin \overline{\mathcal{S}}^{\text{SOT}}$, από το διαχωριστικό Θεώρημα Hahn-Banach έπεται[32] ότι υπάρχει SOT-συνεχής γραμμική μορφή ω και $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\mathrm{Re}\,\omega(A) > \lambda$ αλλά $\mathrm{Re}\,\omega(S) < \lambda$ για κάθε $S \in \mathcal{S}$. Επειδή η ω είναι WOT-συνεχής, αυτό δείχνει ότι $A \notin \overline{\mathcal{S}}^{\text{WOT}}$. $\square$

Θα δώσουμε στην συνέχεια έναν «γεωμετρικό» χαρακτηρισμό της SOT-κλειστής θήκης υποχώρων του $\mathcal{B}(H)$. Θα χρειασθούμε την ακόλουθη έννοια:

Ορισμός 10.3 *Αν $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$ είναι γραμμικός υπόχωρος, η **ανακλαστική θήκη (reflexive cover)** $\mathrm{Ref}\mathcal{S}$ του $\mathcal{S}$ είναι ο υπόχωρος*

$$\mathrm{Ref}\mathcal{S} = \{T \in \mathcal{B}(H) : Tx \in \overline{\mathcal{S}x} \text{ για κάθε } x \in H\}.$$

Παρατήρηση 10.9 *Είναι φανερό ότι ο $\mathrm{Ref}\mathcal{S}$ είναι SOT-κλειστός υπόχωρος και περιέχει τον $\mathcal{S}$, άρα περιέχει και την SOT-κλειστή θήκη $\overline{\mathcal{S}}^{\text{SOT}}$ του $\mathcal{S}$. Δεν είναι όμως εν γένει ίσος με την $\overline{\mathcal{S}}^{\text{SOT}}$:*

Αν $T \in \mathrm{Ref}\mathcal{S}$, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ και $x \in H$ υπάρχει $S \in \mathcal{S}$ ώστε $\|(T-S)x\| < \epsilon$. Συνεπώς για κάθε $\epsilon > 0$ και $x_1, \ldots, x_n \in H$ υπάρχουν $S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{S}$ ώστε $\|(T-S_i)x_i\| < \epsilon$ για $i = 1, \ldots, n$. Αυτό δεν αποδεικνύει ότι $T \in \overline{\mathcal{S}}^{\text{SOT}}$. Πρέπει να υπάρχει *ένα κοινό* $S \in \mathcal{S}$ που να ικανοποιεί ταυτόχρονα όλες αυτές τις ανισότητες.

Η διαφορά μεταξύ ανακλαστικής και SOT-κλειστής θήκης φαίνεται και ως εξής: Ένας τελεστής T ανήκει στην ανακλαστική θήκη $\mathrm{Ref}\mathcal{S}$ του $\mathcal{S}$ αν και μόνον αν για κάθε $x \in H$ υπάρχει δίκτυο (S_i) στον $\mathcal{S}$ *που εξαρτάται από το x* ώστε $S_ix \to Tx$. Ένας τελεστής T ανήκει στην SOT-κλειστή θήκη του $\mathcal{S}$ αν και μόνον αν υπάρχει *ένα* δίκτυο (S_i) στον $\mathcal{S}$ ώστε $S_ix \to Tx$ *για όλα τα* $x \in H$.

[32] βλέπε π.χ. το Πόρισμα IV.3.10 του [2]

Παράδειγμα Έστω

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Η $\mathcal{A}$ είναι SOT-κλειστή άλγεβρα τελεστών στον χώρο Hilbert $\mathbb{C}^2$ και περιέχει τον ταυτοτικό. Αν $T = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right)$ όπου $x \neq z$, τότε φαίνεται εύκολα ότι $T\xi \in \mathcal{A}\xi$ για κάθε $\xi \in \mathbb{C}^2$, άρα $T \in \mathrm{Ref}\mathcal{A}$, ενώ $T \notin \mathcal{A}$.

Παρατήρησε όμως ότι $T^{(2)} \notin \mathrm{Ref}\mathcal{A}^{(2)}$.

$$T^{(2)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ενώ} \qquad \overline{\mathcal{A}^{(2)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \left\{ \begin{pmatrix} b \\ a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Πρόταση 10.10 *Αν $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$ είναι γραμμικός υπόχωρος, ένας τελεστής T ανήκει στην SOT-κλειστή θήκη του $\mathcal{S}$ αν και μόνον αν $T^{(n)} \in \mathrm{Ref}\mathcal{S}^{(n)}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη Αν υπάρχει δίκτυο (S_i) στον $\mathcal{S}$ ώστε $S_i \xrightarrow{\mathrm{SOT}} T$ τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $S_i^{(n)} \in \mathcal{S}^{(n)}$ και $S_i^{(n)} \xrightarrow{\mathrm{SOT}} T^{(n)}$, συνεπώς $T^{(n)} \in \mathrm{Ref}\mathcal{S}^{(n)}$.

Έστω αντίστροφα ότι $T^{(n)} \in \mathrm{Ref}\mathcal{S}^{(n)}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και έστω

$$W = \{A \in \mathcal{B}(H) : \sum_{k=1}^{m} \|Tx_k - Ax_k\|^2 < \epsilon^2\}$$

μια βασική SOT-περιοχή του T. Επειδή $T^{(m)} \in \mathrm{Ref}\mathcal{S}^{(m)}$, αν συμβολίσουμε με $\underline{x} \in H^m$ το διάνυσμα-στήλη με συντεταγμένες $(x_1, \ldots, x_m)$, θα ισχύει η σχέση

$$T^{(m)}\underline{x} \in \overline{\mathcal{S}^{(m)}\underline{x}},$$

επομένως θα υπάρχει $S^{(m)} \in \mathcal{S}^{(m)}$ ώστε $\|T^{(m)}\underline{x} - S^{(m)}\underline{x}\| < \epsilon$. Μα αυτή η ανισότητα σημαίνει ακριβώς ότι $S \in W$, άρα ο T ανήκει στην SOT-κλειστή θήκη του $\mathcal{S}$. $\square$

10.3 Ο $\mathcal{B}(H)$ ως δυϊκός χώρος Banach. Η ασθενής* τοπολογία

Θεωρώ τον χώρο $\mathcal{B}_\sim(H)$ των WOT-συνεχών γραμμικών μορφών στον $\mathcal{B}(H)$, εφοδιασμένο με την νόρμα του δυϊκού χώρου του $\mathcal{B}(H)$.

Θα αποδείξω ότι ο δυϊκός χώρος του $(\mathcal{B}_\sim(H), \|.\|)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\mathcal{B}(H)$.

Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\phi_A : \mathcal{B}_\sim(H) \longrightarrow \mathbb{C}$$

από τον τύπο
$$\phi_A(\omega) = \omega(A).$$

Ειδικότερα
$$\phi_A(\omega_{x,y}) = \omega_{x,y}(A) = \langle Ax, y\rangle.$$

Είναι φανερό ότι η απεικόνιση ϕ_A είναι γραμμική, και είναι συνεχής διότι

$$|\phi_A(\omega)| = |\omega(A)| \leq \|\omega\|\|A\|$$

για κάθε $\omega \in \mathcal{B}_\sim(H)$, από τον ορισμό της $\|\omega\|$. Επομένως $\phi_A \in (\mathcal{B}_\sim(H), \|.\|)^*$ και $\|\phi_A\| \leq \|A\|$.

Έστω αντίστροφα $\phi \in (\mathcal{B}_\sim(H), \|.\|)^*$. Θα βρω $A \in \mathcal{B}(H)$ ώστε $\phi = \phi_A$. Θεωρώ την απεικόνιση

$$\langle\!\langle ., . \rangle\!\rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{C} : (x, y) \longrightarrow \phi(\omega_{x,y}).$$

Επειδή η απεικόνιση $(x, y) \to \omega_{x,y}$ είναι sesquilinear και η ϕ είναι γραμμική, η $\langle\!\langle ., . \rangle\!\rangle$ είναι sesquilinear. Επίσης,

$$|\langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle| = |\phi(\omega_{x,y})| \leq \|\phi\|\|\omega_{x,y}\| \leq \|\phi\|\|x\|\|y\|.$$

Συνεπώς από το Θεώρημα Riesz (Πρόταση 3.1) υπάρχει $A \in \mathcal{B}(H)$ ώστε

$$\langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle = \langle Ax, y\rangle$$

δηλαδή
$$\phi(\omega_{x,y}) = \langle Ax, y\rangle = \omega_{x,y}(A)$$

και
$$|\langle Ax, y\rangle| = |\phi(\omega_{x,y})| \leq \|\phi\|\|\omega_{x,y}\| = \|\phi\|\|x\|\|y\|$$

για κάθε $x, y \in H$, άρα
$$\|A\| \leq \|\phi\|.$$

Επειδή ο χώρος $\mathcal{B}_\sim(H)$ είναι η γραμμική θήκη του συνόλου $\{\omega_{x,y} : x, y \in H\}$ και οι απεικονίσεις ϕ και ϕ_A είναι γραμμικές, οι σχέσεις

$$\phi(\omega_{x,y}) = \omega_{x,y}(A) = \phi_A(\omega_{x,y})$$

για κάθε $x, y \in H$ δείχνουν ότι $\phi = \phi_A$. Αλλά $\|A\| \le \|\phi\|$ και $\|\phi_A\| \le \|A\|$, επομένως ισχύει ισότητα.

Δείξαμε δηλαδή ότι η απεικόνιση

$$(\mathcal{B}(H), \|.\|) \longrightarrow ((\mathcal{B}_\sim(H))^*, \|.\|) : A \longrightarrow \phi_A$$

που είναι προφανώς γραμμική, είναι ισομετρία και επί:

Πρόταση 10.11 *Ο χώρος $\mathcal{B}(H)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον δυϊκό του χώρου $(\mathcal{B}_\sim(H), \|.\|)$ μέσω της απεικόνισης*

$$A \to \phi_A, \quad \text{όπου} \quad \phi_A(\omega) = \omega(A),\ (A \in \mathcal{B}(H),\ \omega \in \mathcal{B}_\sim(H)).$$

Ο χώρος $\mathcal{B}_\sim(H)$ δεν είναι κλειστός υπόχωρος του δυϊκού $\mathcal{B}(H)^*$, άρα δεν είναι χώρος Banach (όταν $\dim H = \infty$). Παραδείγματος χάριν, η γραμμική απεικόνιση ϕ όπου

$$\phi(T) = \sum_k \frac{1}{k^2}\omega_{e_k,e_k}(T)$$

(όπου $\{e_n\}$ ορθοκανονική ακολουθία) ανήκει στην $\|.\|$-κλειστή θήκη του $\mathcal{B}_\sim(H)$ (διότι η σειρά συγκλίνει απόλυτα). Δεν ανήκει όμως στον $\mathcal{B}_\sim(H)$. Πράγματι, αν $\phi = \omega$ όπου $\omega = \sum_{m=1}^n \omega_{x_m,y_m}$, τότε θα έχουμε $\phi(x \otimes e_k^*) = \omega(x \otimes e_k^*)$ για κάθε $x \in H$ και $k \in \mathbb{N}$, δηλαδή

$$\frac{1}{k^2}\langle x, e_k\rangle = \sum_{m=1}^n \langle x_m, e_k\rangle\langle x, y_m\rangle = \langle x, \sum_{m=1}^n \langle e_k, x_m\rangle y_m\rangle$$

για κάθε $x \in H$ και $k \in \mathbb{N}$, το οποίο σημαίνει ότι $\frac{1}{k^2}e_k = \sum_{m=1}^n \langle e_k, x_m\rangle y_m$, δηλαδή ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ το διάνυσμα e_k ανήκει στον χώρο $[y_1, \dots, y_m]$, πράγμα αδύνατο.

Αν ονομάσουμε $\mathcal{B}_*(H) \subseteq \mathcal{B}(H)^*$ την $\|.\|$-κλειστή θήκη του $\mathcal{B}_\sim(H)$, τότε βεβαίως ο δυϊκός του $\mathcal{B}_*(H)$ ταυτίζεται[33] με τον δυϊκό του $\mathcal{B}_\sim(H)$, δηλαδή με τον $\mathcal{B}(H)$. Για τον λόγο αυτό, ο $\mathcal{B}_*(H)$ ονομάζεται **ο προδυϊκός**[34] **του** $\mathcal{B}(H)$.

[33] κάθε συνεχής γραμμική μορφή στον $\mathcal{B}_\sim(H)$ επεκτείνεται (λόγω συνέχειας) σε μια μοναδική συνεχή γραμμική μορφή στον $\mathcal{B}_*(H)$, και με την ίδια νόρμα

[34] αποδεικνύεται ότι είναι μοναδικός (πράγμα που δεν αληθεύει εν γένει στους χώρους Banach)

Ορισμός 10.4 *Η* ***ασθενής* τοπολογία (w*) στον*** *$\mathcal{B}(H)$ είναι η ασθενέστερη τοπολογία ως προς την οποία κάθε $\omega \in \mathcal{B}_*(H)$ είναι συνεχής, είναι δηλαδή η ασθενής* τοπολογία $\sigma(\mathcal{B}(H), \mathcal{B}_*(H))$ που έχει ο $\mathcal{B}(H)$ ως δυϊκός του χώρου Banach $\mathcal{B}_*(H)$. Η τοπολογία αυτή ονομάζεται πολλές φορές και* ***υπερασθενής (ultraweak)****.*

Αφού ο $\mathcal{B}(H)$ είναι ο δυϊκός του χώρου Banach $\mathcal{B}_*(H)$, εφαρμόζεται το Θεώρημα Αλάογλου (βλ. π.χ. [17], Θεώρημα 17.1), σύμφωνα με το οποίο η κλειστή μοναδιαία σφαίρα ενός δυϊκού χώρου Banach είναι ασθενώσ-* συμπαγής:

Θεώρημα 10.12 *Η κλειστή μοναδιαία σφαίρα (και γενικότερα, κάθε ασθενώσ-* κλειστό και φραγμένο υποσύνολο) του $\mathcal{B}(H)$ είναι ασθενώσ-* συμπαγής.*

Όταν $\dim H = \infty$, η ασθενής* τοπολογία είναι *γνήσια ισχυρότερη* από την WOT, εφόσον $\mathcal{B}_\sim(H) \subsetneqq \mathcal{B}_*(H)$. Δεν είναι όμως συγκρίσιμη με την SOT. Πράγματι: αν $\phi \in \mathcal{B}_*(H) \backslash \mathcal{B}_\sim(H)$, τότε ο γραμμικός χώρος $\ker \phi$ είναι ασθενώσ-* κλειστός (αφού η ϕ είναι ασθενώσ-* συνεχής), αλλά δεν είναι WOT κλειστός (διότι η ϕ δεν είναι WOT συνεχής), άρα ούτε SOT κλειστός (Πόρισμα 10.8). Συνεπώς η ασθενής* τοπολογία δεν είναι ασθενέστερη από την SOT. Αλλά δεν είναι ούτε ισχυρότερη: αν (T_n) είναι η ακολουθία του Παραδείγματος 10.4, τότε, όπως δείξαμε, η (T_n^*) δεν συγκλίνει στο 0 ως προς την SOT, αλλά είναι φραγμένη και $T_n^* \xrightarrow{\text{WOT}} 0$, άρα συγκλίνει στο 0 ως προς την w*, γιατί, όπως θα δείξουμε, η w* συμπίπτει με την WOT *στα φραγμένα υποσύνολα* του $\mathcal{B}(H)$.

Πρόταση 10.13 *Οι τοπολογίες w* και WOT συμπίπτουν στα $\|.\|$-φραγμένα υποσύνολα του $\mathcal{B}(H)$.*

Επομένως η μοναδιαία σφαίρα του $\mathcal{B}(H)$ είναι WOT-συμπαγής.

Απόδειξη Αρκεί να δειχθεί ότι αν ένα *φραγμένο* δίκτυο (T_i) συγκλίνει στο 0 ως προς την WOT, τότε $T_i \xrightarrow{\text{w*}} 0$. Έστω λοιπόν $\omega \in \mathcal{B}_*(H)$ και $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\omega_1 \in \mathcal{B}_\sim(H)$ ώστε $\|\omega - \omega_1\| < \epsilon$. Αφού $T_i \xrightarrow{\text{WOT}} 0$, υπάρχει i_o ώστε $|\omega_1(T_i)| < \epsilon$ για κάθε $i \geq i_o$. Αν $M = \sup_i \|T_i\|$, τότε

$$|\omega(T_i)| \leq |(\omega - \omega_1)(T_i)| + |\omega_1(T_i)| < M\epsilon + \epsilon$$

για κάθε $i \geq i_o$. Συνεπώς $\lim_i \omega(T_i) = 0$, άρα, αφού η ω είναι αυθαίρετη, $T_i \xrightarrow{\text{w*}} 0$. $\square$

Πόρισμα 10.14 *Ο χώρος $\mathcal{F}(H)$ των τελεστών πεπερασμένης τάξης είναι πυκνός στον $\mathcal{B}(H)$ ως προς την SOT, την WOT και την ασθενή-*, όχι όμως ως προς την τοπολογία της νόρμας (όταν $\dim H = \infty$).*

Απόδειξη Έστω (M_i) μια αύξουσα οικογένεια υποχώρων του H πεπερασμένης διάστασης με ένωση πυκνή στον H και έστω P_i η ορθή προβολή στον M_i. Ισχυρίζομαι ότι $P_i \xrightarrow{\text{SOT}} I$. Πράγματι, έστω $x \in H$ και $\epsilon > 0$. Αφού η ένωση των (M_i) είναι πυκνή στον H, υπάρχει δείκτης i_o και $x_o \in M_{i_o}$ ώστε $\|x - x_o\| < \epsilon$. Για κάθε $i \geq i_o$ έχουμε $x_o \in M_i$ άρα $P_i x_o = x_o$ και συνεπώς

$$\|P_i x - x\| \leq \|P_i x - P_i x_o\| + \|P_i x_o - x\| \leq \|P_i\|.\|x - x_o\| + \|x_o - x\| < 2\epsilon$$

διότι $\|P_i\| = 1$. Επομένως $\lim_i \|P_i x - x\| = 0$ για κάθε $x \in H$.

Αν τώρα $A \in \mathcal{B}(H)$, τότε $AP_i \in \mathcal{F}(H)$ και $AP_i \xrightarrow{\text{SOT}} A$, επομένως ο $\mathcal{F}(H)$ είναι SOT-πυκνός στον $\mathcal{B}(H)$, άρα και WOT-πυκνός, αφού η WOT είναι ασθενέστερη από την SOT. Επίσης όμως $AP_i \xrightarrow{\text{w*}} A$ από την προηγούμενη Πρόταση, διότι $AP_i \xrightarrow{\text{WOT}} A$ και το δίκτυο (AP_i) είναι φραγμένο. Άρα ο $\mathcal{F}(H)$ είναι w*-πυκνός στον $\mathcal{B}(H)$.

Τέλος, όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει, ο ταυτοτικός τελεστής δεν είναι $\|.\|$-όριο ακολουθίας τελεστών πεπερασμένης τάξης, όταν $\dim H = \infty$. $\square$

Αποδεικνύεται [35] ότι όταν $\dim H = \infty$, οι WOT και w* δεν είναι μετρικοποιήσιμες τοπολογίες στον $\mathcal{B}(H)$. Οι περιορισμοί όμως των τοπολογιών αυτών στα φραγμένα υποσύνολα του $\mathcal{B}(H)$ είναι μετρικοποιήσιμες τοπολογίες, όταν ο H είναι διαχωρίσιμος:

Πρόταση 10.15 *Αν ο H είναι διαχωρίσιμος, τότε*

(i) Ο προδυϊκός $\mathcal{B}_*(H)$ είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach.

---

[35] *Παράδειγμα (von Neumann)* Έστω $\mathcal{E} = \{P_n + nP_m : m > n\}$, όπου P_n μονοδιάστατες κάθετες ανά δύο προβολές. Όπως στην Πρόταση 10.1 φαίνεται ότι δεν υπάρχει ακολουθία στο $\mathcal{E}$ που να συγκλίνει στο 0 ως προς την w* (ή την WOT). Αν όμως υπήρχαν $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \mathcal{B}_*(H)$ και $\epsilon > 0$ ώστε

$$\max_{1 \leq i \leq k} |\omega_i(P_n + nP_m)| \geq \epsilon \text{ για κάθε } m > n,$$

τότε, επειδή $\lim_m \omega(P_m) = 0$ για κάθε $\omega \in \mathcal{B}_*(H)$ θα είχαμε $\max_i |\omega_i(P_n)| = \lim_m \max_i |\omega_i(P_n + nP_m)| \geq \epsilon$ για κάθε n, άτοπο.

(ii) Ο περιορισμός της ασθενούσ- τοπολογίας (ισοδύναμα, της WOT) στην μοναδιαία σφαίρα $\mathcal{B}(H)_1$ είναι μετρικοποιήσιμη τοπολογία, άρα διαχωρίσιμη (εφόσον είναι συμπαγής).*

Απόδειξη Έστω Ξ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του H. Τότε το σύνολο

$$\Omega = \{\omega_{\xi,\eta} : \xi, \eta \in \Xi\} \subseteq \mathcal{B}_{\sim}(H)$$

είναι αριθμήσιμο.

(i) Η ανισότητα

$$\|\omega_{x,y} - \omega_{\xi,\eta}\| = \|\omega_{x-\xi,y} + \omega_{\xi,y-\eta}\| \leq \|x - \xi\|\|y\| + \|\xi\|\|y - \eta\|$$

δείχνει ότι η $\|.\|$-κλειστή γραμμική θήκη του Ω περιέχει το σύνολο $\{\omega_{x,y} : x, y \in H\}$, άρα και την $\|.\|$-κλειστή γραμμική του θήκη, που είναι όλος ο $\mathcal{B}_*(H)$. Επομένως ο $\mathcal{B}_*(H)$ είναι διαχωρίσιμος.

(ii) Έστω $\Omega = \{\omega_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση του Ω. Ορίζω

$$d(T, S) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\omega_n(T - S)|}{\|\omega_n\|} \qquad (T, S \in \mathcal{B}(H)_1).$$

Ο αναγνώστης μπορεί να ελέγξει ότι η d ορίζει μία μετρική στην $\mathcal{B}(H)_1$ (το γεγονός ότι $T = S$ αν $d(T, S) = 0$ έπεται από την πυκνότητα του Ξ στον H). Αν ένα δίκτυο (T_i) στην $\mathcal{B}(H)_1$ συγκλίνει στον $T \in \mathcal{B}(H)_1$ ως προς την WOT, τότε $\omega_n(T_i - T) \to 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και, χρησιμοποιώντας ότι $|\omega_n(T_i - T)| \leq 2\|\omega_n\|$, αποδεικνύεται εύκολα ότι $d(T_i, T) \to 0$. Επομένως η WOT είναι ισχυρότερη από την τοπολογία που ορίζει η d. Αλλά η πρώτη είναι συμπαγής, άρα οι δύο τοπολογίες συμπίπτουν. (Στην πραγματικότητα δεν είναι δύσκολο να δειχθεί απευθείας ότι αν $d(T_i, T) \to 0$ τότε $T_i \to T$ ως προς την WOT). Εφόσον η WOT και η w* συμπίπτουν στην $\mathcal{B}(H)_1$, η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

Ο προδυϊκός $\mathcal{B}_*(H)$ του $\mathcal{B}(H)$ αποκαλείται καμμιά φορά «μη μεταθετικός ℓ^1». Η ονομασία αυτή οφείλεται εν μέρει στην επόμενη

Πρόταση 10.16 *Ο προδυϊκός $\mathcal{B}_*(H)$ του $\mathcal{B}(H)$ είναι το σύνολο όλων των γραμμικών μορφών ω της μορφής*

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \omega_{x_n,y_n}$$

όπου[36] $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ *και* $\sum_n |\lambda_n| < +\infty$.

Απόδειξη Ο χώρος $\mathcal{B}_*(H)$ αποτελείται από τα $\|.\|$-όρια ακολουθιών από τον $\mathcal{B}_\sim(H)$. Αν $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ είναι ακολουθίες μοναδιαίων διανυσμάτων και $\lambda_n \in \mathbb{C}$ με $\sum_n |\lambda_n| < +\infty$, τότε για κάθε $A \in \mathcal{B}(H)$ η σειρά $\sum_n \lambda_n \langle Ax_n, y_n\rangle$ συγκλίνει απόλυτα: $\sum_n |\lambda_n \langle Ax_n, y_n\rangle| \le \sum_n |\lambda_n| \|A\| \|x_n\| \|y_n\| = \|A\| \sum_n |\lambda_n|$, επομένως ορίζει μια γραμμική μορφή

$$\omega(A) = \sum_n \lambda_n \langle Ax_n, y_n\rangle \quad (A \in \mathcal{B}(H))$$

που είναι συνεχής και $\|\omega\| \le \sum_n |\lambda_n|$. Αν θέσουμε

$$\omega_m = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n \omega_{x_n, y_n}$$

τότε $\omega_m \in \mathcal{B}_\sim(H)$ και $\|\omega - \omega_m\| \le \sum_{n>m} |\lambda_n| \to 0$, άρα $\omega \in \mathcal{B}_*(H)$.

Έστω, αντίστροφα, $\omega \in \mathcal{B}_*(H)$. Η απεικόνιση $H \times H \to \mathbb{C} : (\xi, \eta) \to \omega(\xi \otimes \eta^*)$ είναι sesquilinear και φράσσεται από την $\|\omega\|$, άρα (Πρόταση 3.1) υπάρχει $T_\omega \in \mathcal{B}(H)$ (με $\|T_\omega\| \le \|\omega\|$) ώστε

$$\omega(\xi \otimes \eta^*) = \langle T_\omega \xi, \eta\rangle.$$

Έστω $\{e_i : i \in I\}$ ορθοκανονική βάση του H.

Ισχυρισμός Για κάθε $A \in \mathcal{B}(H)$ έχουμε $\sum_i |\langle AT_\omega e_i, e_i\rangle| < +\infty$.

Πράγματι, έστω $a_i \in \mathbb{C}$ ώστε $|\langle AT_\omega e_i, e_i\rangle| = a_i \langle AT_\omega e_i, e_i\rangle$. Αν για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $J \subseteq I$ θέσουμε

$$B_J = \sum_{i \in J} a_i e_i \otimes e_i^*,$$

τότε

$$\sum_{i \in J} |\langle AT_\omega e_i, e_i\rangle| = \sum_{i \in J} a_i \langle T_\omega e_i, A^* e_i\rangle = \sum_{i \in J} a_i \omega((e_i \otimes e_i^*)A) = \omega(B_J A).$$

Αλλά $\|B_J\| = \max |a_i| = 1$ (διότι οι $e_i \otimes e_i^*$ είναι κάθετες ανά δύο προβολές), επομένως

$$\sum_{i \in J} |\langle AT_\omega e_i, e_i\rangle| = |\omega(B_J A)| \le \|\omega\| \|B_J A\| \le \|\omega\| \|A\|$$

[36] μάλιστα, αποδεικνύεται (δες π.χ. [24], Θεώρημα II.1.6) ότι οι $\{x_n\}$ και $\{y_n\}$ μπορούν να επιλεγούν ορθοκανονικές.

για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $J \subseteq I$, και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Θέτοντας $A = T_\omega^*$ στον Ισχυρισμό, έχουμε

$$\sum_i \|T_\omega e_i\|^2 = \sum_i |\langle T_\omega^* T_\omega e_i, e_i\rangle| < +\infty$$

επομένως το σύνολο $\{e_i : T_\omega e_i \neq 0\}$ είναι αριθμήσιμο. Αν $\{x_n\}$ είναι μια αρίθμηση του συνόλου αυτού, θέτουμε $\lambda_n = \|T_\omega x_n\|$ και $y_n = T_\omega x_n/\lambda_n$. Ορίζουμε

$$\phi(A) = \sum_{i\in I} \langle AT_\omega e_i, e_i\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \langle Ay_n, x_n\rangle \qquad (A \in \mathcal{B}(H)).$$

Από τον ισχυρισμό, η σειρά συγκλίνει απόλυτα, άρα (όπως δείξαμε προηγουμένως) $\phi \in \mathcal{B}_*(H)$. Επειδή η $\{e_i\}$ είναι ορθοκανονική βάση, ισχύει η ισότητα $\sum_i \langle x, e_i\rangle\langle e_i, y\rangle = \langle x, y\rangle$ για κάθε $x, y \in H$, επομένως

$$\begin{aligned}\phi(\xi \otimes \eta^*) &= \sum_i \langle (\xi \otimes \eta^*) T_\omega e_i, e_i\rangle = \sum_i \langle \langle T_\omega e_i, \eta\rangle \xi, e_i\rangle \\ &= \sum_i \langle \xi, e_i\rangle\langle e_i, T_\omega^* \eta\rangle = \langle \xi, T_\omega^* \eta\rangle = \langle T_\omega \xi, \eta\rangle = \omega(\xi \otimes \eta^*)\end{aligned}$$

για κάθε ξ, η. Επομένως οι ϕ και ω ταυτίζονται στο σύνολο $\mathcal{F}(H) \subseteq \mathcal{B}(H)$ των τελεστών πεπερασμένης τάξης. Επειδή είναι και οι δύο ασθενώσ-* συνεχείς, και το $\mathcal{F}(H)$ είναι ασθενώσ-* πυκνό στον $\mathcal{B}(H)$ (Πόρισμα 10.14), έπεται ότι $\phi = \omega$, δηλαδή

$$\omega(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \langle Ay_n, x_n\rangle.$$

Εκ κατασκευής έχουμε $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$, και μένει να δειχθεί ότι $(\lambda_n) \in \ell^1$. Αρκεί γι'αυτό να δείξουμε ότι, για κάθε ακολουθία $(\mu_n) \in c_o$, η σειρά $\sum_n \lambda_n \mu_n$ συγκλίνει. Αν θέσουμε $A = \sum_k \mu_k x_k \otimes y_k^*$ [37], βρίσκουμε

$$\omega(A) = \sum_{n,k} \lambda_n \mu_k \langle (x_k \otimes y_k^*)\, y_n, x_n\rangle = \sum_{n,k} \lambda_n \mu_k \langle \langle y_n, y_k\rangle x_k, x_n\rangle = \sum_n \lambda_n \mu_n$$

(γιατί τα x_k είναι εκ κατασκευής ορθοκανονικά και $\|y_n\| = 1$), άρα η σειρά συγκλίνει. $\square$

[37] ο A είναι φραγμένος γιατί για κάθε ξ, $\|A^*\xi\|^2 = \sum |\mu_k|^2 |\langle \xi, x_k\rangle|^2 \leq \max |\mu_k|^2 \|\xi\|^2$

11 Αβελιανές Άλγεβρες von Neumann

11.1 Άλγεβρες von Neumann

Ορισμός 11.1 *Αν H είναι χώρος Hilbert και $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$, ορίζω τον* **μεταθέτη** *$\mathcal{S}'$ του $\mathcal{S}$ ως εξής*

$$\mathcal{S}' = \{T \in \mathcal{B}(H) : TS = ST \ \text{ για κάθε } S \in \mathcal{S}\}.$$

Ελέγχεται άμεσα ότι το σύνολο $\mathcal{S}'$ είναι πάντα άλγεβρα με μονάδα. Επίσης είναι norm κλειστό, γιατί αν $\|A_n - A\| \to 0$ και $A_nS = SA_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $S \in \mathcal{S}$ τότε

$$AS = \lim_n A_nS = \lim_n SA_n = SA$$

άρα $A \in \mathcal{S}'$.

Επομένως αν το σύνολο $\mathcal{S}$ είναι αυτοσυζυγές[38] τότε το $\mathcal{S}'$ είναι C^*-άλγεβρα.

Παρατηρούμε όμως ότι η άλγεβρα $\mathcal{S}'$ *είναι κλειστή και ως προς την (ασθενέστερη) τοπολογία SOT της σύγκλισης κατά σημείο*: Πράγματι, αν ένα δίκτυο (A_i) με $A_i \in \mathcal{S}'$ έχει την ιδιότητα $\lim_i \|A_ix - Ax\| = 0$ για κάθε $x \in H$, τότε, για κάθε $S \in \mathcal{S}$ έχουμε $A(Sx) = \lim_i A_i(Sx)$ εξ υποθέσεως και $SAx = S(\lim_i A_ix) = \lim_i SA_ix$ διότι ο S είναι συνεχής, επομένως

$$ASx = \lim_i A_iSx = \lim_i SA_i = SAx$$

για κάθε $x \in H$, άρα $AS = SA$.

Είναι προφανές ότι $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}''$. Επίσης ελέγχεται εύκολα ότι $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'''$.

Ένα σύνολο τελεστών $\mathcal{S}$ είναι μεταθετικό σύνολο αν και μόνον αν $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$. Αν $\mathcal{S}$ είναι μεταθετικό σύνολο, τότε για κάθε $A \in \mathcal{S}'$, το σύνολο $\mathcal{S} \cup \{A\} \subseteq \mathcal{S}'$ είναι μεταθετικό και περιέχει το $\mathcal{S}$. Επομένως ένα σύνολο τελεστών $\mathcal{S}$ είναι *μεγιστικό* μεταθετικό σύνολο αν και μόνον αν $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$.

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό:

Ορισμός 11.2 *Έστω (X, μ) χώρος μέτρου. Η* **πολλαπλασιαστική άλγεβρα** *$\mathcal{M}_\mu$ του (X, μ) είναι η*

$$\mathcal{M}_\mu = \{M_f : f \in L^\infty(X, \mu)\}.$$

Η $\mathcal{M}_\mu$ είναι αβελιανή C^*-υπάλγεβρα της $\mathcal{B}(L^2(X, \mu))$.

[38] δηλαδή $S^* \in \mathcal{S}$ για κάθε $S \in \mathcal{S}$

Πρόταση 11.1 *Αν ο (X,μ) είναι σ-πεπερασμένος, τότε $(\mathcal{M}_\mu)' = \mathcal{M}_\mu$. Ισοδύναμα, η $\mathcal{M}_\mu$ είναι* **μεγιστική** *αβελιανή αυτοσυζυγής υπάλγεβρα (maximal abelian selfadjoint algebra -* **masa***) του $\mathcal{B}(L^2(X,\mu))$.*

Απόδειξη Η $\mathcal{M}_\mu$ είναι αβελιανή, άρα $\mathcal{M}_\mu \subseteq (\mathcal{M}_\mu)'$. Έστω λοιπόν $T \in (\mathcal{M}_\mu)'$. Πρέπει να βρούμε $g \in L^\infty(X,\mu)$ ώστε $T = M_g$.

(i) Ψποθέτουμε πρώτα ότι $\mu(X) < \infty$. Τότε η σταθερή συνάρτηση $\mathbf{1}$ ανήκει στον $L^2(X,\mu)$. Έστω $g = T\mathbf{1} \in L^2(X,\mu)$. Τότε για κάθε $f \in L^\infty(X,\mu)$ έχουμε $gf \in L^2(X,\mu)$ και

$$T(f) = T(f\mathbf{1}) = T(M_f(\mathbf{1})) = M_f(T(\mathbf{1})) = M_f(g) = fg = gf. \qquad (*)$$

Αν δείξουμε ότι $g \in L^\infty(X,\mu)$, οπότε η g ορίζει φραγμένο τελεστή $M_g \in \mathcal{B}(L^2(X,\mu))$, τότε η προηγούμενη ισότητα γράφεται

$$T(f) = M_g(f) \quad \text{για κάθε } f \in L^\infty(X,\mu)\,,$$

δηλαδή οι φραγμένοι τελεστές T και M_g θα ταυτίζονται στον πυκνό υπόχωρο $L^\infty(X,\mu)$ του $L^2(X,\mu)$, άρα θα είναι ίσοι. Μένει λοιπόν να δειχθεί ότι $g \in L^\infty(X,\mu)$.

Πράγματι, έστω $a > 0$ ώστε το μέτρο του $Y_a = \{t \in X : |g(t)| > a\}$ να είναι μη μηδενικό. Αν f_a είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του Y_a τότε $\|f_a\|_2^2 = \mu(Y_a)$. Αλλά επίσης $f_a \in L^\infty(X,\mu)$ οπότε η (*) εφαρμόζεται και δείχνει ότι $T(f_a) = f_a g$, άρα

$$\|T\|^2\|f_a\|_2^2 \geq \|T(f_a)\|_2^2 = \int |f_a g|^2 d\mu = \int_{Y_a} |g|^2 d\mu \geq a^2\mu(Y_a) = a^2\|f_a\|_2^2$$

επομένως $a \leq \|T\|$. Έπεται ότι $\|g\|_\infty \leq \|T\|$ και τώρα η (*) δείχνει ότι $T = M_g$.

(ii) Για την γενική (σ-πεπερασμένη) περίπτωση, γράφουμε τον X ως ένωση αριθμήσιμης οικογένειας ξένων ανά δύο υποσυνόλων X_n πεπερασμένου μέτρου. Έστω $e_n \in L^2(X,\mu)$ η χαρακτηριστική συνάρτηση του X_n και $g_n = T(e_n)$. Όπως προηγουμένως, για κάθε $f \in L^\infty(X,\mu) \cap L^2(X,\mu)$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$TM_{e_n}(f) = T(fe_n) = T(M_f(e_n)) = M_f(T(e_n)) = M_f(g_n) = fg_n.$$

Συμπεραίνουμε όπως πριν ότι ο M_{g_n} είναι φραγμένος τελεστής και ότι $M_{g_n} = TM_{e_n}$, άρα $\|g_n\|_\infty = \|M_{g_n}\| \leq \|T\|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι αν ορίσουμε την g στο X από την σχέση $g|X_n = g_n|X_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η g είναι μ-μετρήσιμη και $\|g\|_\infty \leq \sup_n \|g_n\|_\infty \leq \|T\|$, άρα $g \in L^\infty(X,\mu)$ και

$$M_g M_{e_n} = M_{ge_n} = M_{g_n} = TM_{e_n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού ο τελεστής M_{e_n} είναι η προβολή στον υπόχωρο $L^2(X_n,\mu)$ του $L^2(X,\mu)$, οι φραγμένοι τελεστές M_g και T συμπίπτουν σε καθένα από τους υποχώρους αυτούς, άρα (αφού είναι γραμμικοί και συνεχείς) συμπίπτουν και στην κλειστή γραμμική θήκη της ένωσής τους, που είναι[39] όλος ο $L^2(X,\mu)$. Η απόδειξη είναι πλήρης. □

Ορισμός 11.3 *Έστω H χώρος Hilbert. Μία* ***άλγεβρα von Neumann*** *$\mathcal{M}$ στον H είναι ένα αυτοσυζυγές υποσύνολο του $\mathcal{B}(H)$ που ικανοποιεί*

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}''.$$

Παρατηρήσεις 11.2 **(i)** Κάθε άλγεβρα von Neumann είναι C^*-άλγεβρα με μονάδα. Επιπλέον όμως είναι SOT-κλειστή.

(ii) Αν $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$, τότε το σύνολο $(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*)''$ είναι η μικρότερη άλγεβρα von Neumann που περιέχει το $\mathcal{S}$, και ονομάζεται **η άλγεβρα von Neumann που παράγεται από το** $\mathcal{S}$.

(iii) Κάθε άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M}$ στον H είναι της μορφής $\mathcal{S}'$ για κάποιο αυτοσυζυγές σύνολο $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$ (π.χ. $\mathcal{S} = \mathcal{M}'$).

Παραδείγματα 11.3 **(i)** Ο χώρος $\mathcal{B}(H)$ είναι άλγεβρα von Neumann .

(ii) Το σύνολο $\mathcal{K}(H)$ όλων των συμπαγών τελεστών στον H είναι C^*-άλγεβρα, όχι όμως άλγεβρα von Neumann εκτός αν $\dim H < \infty$. Παράγεται (ως C^*-άλγεβρα) από τις προβολές της.

(iii) Έστω (X,μ) σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου. Τότε η $\mathcal{M}_\mu$ είναι αβελιανή άλγεβρα von Neumann στον $L^2(X,\mu)$. Είναι μάλιστα μεγιστική αβελιανή.

(iv) Το σύνολο $\mathcal{A} = \{M_f : f \in C([0,1])\}$ είναι C^*-άλγεβρα στον $L^2([0,1],\lambda)$ (όπου λ το μέτρο Lebesgue), αλλά δεν είναι άλγεβρα von Neumann . Ισχύει ότι $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}' = \mathcal{M}_\lambda$. Η $\mathcal{A}$ δεν περιέχει προβολές εκτός των 0 και I.

[39] Αν η $h \in L^2(X,\mu)$ είναι κάθετη σε κάθε $L^2(X_n,\mu)$, τότε για κάθε n και $f \in L^2(X_n,\mu)$ έχουμε $\int_{X_n} h\bar{f} d\mu = 0$, άρα (θέτοντας $f = he_n$) $\int_{X_n} |h|^2 d\mu = 0$, άρα $\|h\|_2^2 = \int_X |h|^2 d\mu = \sum_n \int_{X_n} |h|^2 d\mu = 0$, δηλαδή $h = 0$.

Παρατήρηση 11.4 Αν H είναι χώρος Hilbert και $n \in \mathbb{N}$, κάθε φραγμένος τελεστής στο ευθύ άθροισμα H^n αντιστοιχεί σ'έναν $n \times n$ πίνακα (A_{ij}) από τελεστές στον H (βλ. Παράγραφο 4). Αν $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$, το σύνολο $M_n(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{B}(H^n)$ αποτελείται από τους $n \times n$ πίνακες (S_{ij}) με στοιχεία S_{ij} από το $\mathcal{S}$. Με τον συμβολισμό αυτό, το σύνολο $\mathcal{S}^{(n)}$ αντιστοιχεί στο υποσύνολο του $M_n(\mathcal{S})$ που αποτελείται από τους «διαγώνιους» πίνακες της μορφής $(S\delta_{ij})$ με $S \in \mathcal{S}$. Αν $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ είναι άλγεβρα που περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή, ισχύουν οι ισότητες

$$(\mathcal{A}^{(n)})' = M_n(\mathcal{A}') \qquad \text{και} \qquad M_n(\mathcal{A})' = (\mathcal{A}')^{(n)}.$$

και ειδικότερα

$$(\mathcal{A}^{(n)})'' = (\mathcal{A}'')^{(n)}.$$

[Πράγματι, αν $T \in \mathcal{B}(H)$ και $S = (S_{ij}) \in \mathcal{B}(H^{(n)})$, έχουμε

$$T^{(n)}S = (\sum_k T\delta_{ik}S_{kj}) = (TS_{ij}) \qquad \text{και} \qquad ST^{(n)} = (\sum_k S_{ik}T\delta_{kj}) = (S_{ij}T).$$

Συνεπώς ο $T^{(n)}$ μετατίθεται με τον S αν και μόνον αν ο T μετατίθεται με κάθε S_{ij}. Αυτό αποδεικνύει ότι $(\mathcal{A}^{(n)})' = M_n(\mathcal{A}')$ και ότι $(\mathcal{A}')^{(n)} \subseteq M_n(\mathcal{A})'$. Αν τέλος ένας τελεστής $S = (S_{ij})$ μετατίθεται με την $M_n(\mathcal{A})$, τότε μετατίθεται και με κάθε AE_{ij} όπου $A \in \mathcal{A}$ και $E_{ij} \in M_n(\mathbb{C})$ ο πίνακας που έχει 1 στην θέση i, j και 0 παντού αλλού. Από την ισότητα $SAE_{ij} = AE_{ij}S$ προκύπτει $S_{ki}A\delta_{jl} = A\delta_{ki}S_{jl}$ για κάθε k και l, άρα $S_{ki} = 0$ για $k \neq i$ και $S_{ii}A = AS_{jj}$ για κάθε i, j, δηλαδή $S \in (\mathcal{A}')^{(n)}$.]

Συνεπώς αν $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(H)$ είναι άλγεβρα von Neumann , τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η $\mathcal{M}^{(n)} \subseteq \mathcal{B}(H^n)$ είναι άλγεβρα von Neumann . Οι άλγεβρες $\mathcal{M}$ και $\mathcal{M}^{(n)}$ είναι ισομετρικά *-ισόμορφες, είναι δηλαδή «ίδιες» *ως C^*-άλγεβρες*. Δεν δρούν όμως κατά τον 'ίδιο' τρόπο στους αντίστοιχους χώρους H και H^n. Παραδείγματος χάριν, αν η $\mathcal{M}$ είναι μεγιστική αβελιανή υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(H)$ (δηλαδή $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$) η $\mathcal{M}^{(2)}$ δεν είναι μεγιστική υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(H^2)$, διότι ο μεταθέτης $(\mathcal{M}^{(2)})' = M_2(\mathcal{M})$ δεν είναι μεταθετική άλγεβρα.

Στο θέμα αυτό θα επανέλθουμε στην επόμενη παράγραφο.

Ένα από τα πιο θεμελιώδη αποτελέσματα στην θεωρία των αλγεβρών von Neumann είναι ο συσχετισμός της αλγεβρικής συνθήκης $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$ με μία τοπολογική συνθήκη:

Θεώρημα 11.5 (von Neumann) *Έστω $\mathcal{A}$ μία αυτοσυζυγής υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(H)$ που περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή. Τότε*

$$\mathcal{A}'' = \overline{\mathcal{A}}^{\text{SOT}} = \overline{\mathcal{A}}^{\text{WOT}}.$$

Ειδικότερα, η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα von Neumann αν και μόνον αν είναι SOT-κλειστή, αν και μόνον αν είναι WOT-κλειστή.

Θα χρησιμοποιήσουμε το

Λήμμα 11.6 *Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ αυτοσυζυγής άλγεβρα που περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή. Τότε $\mathcal{A}'' \subseteq \mathrm{Ref}\mathcal{A}$.*

Απόδειξη Έστω $T \in \mathcal{A}''$ και $x \in H$. Ονομάζουμε P την προβολή στον υπόχωρο $\overline{[\mathcal{A}x]}$ του H. Εφόσον ο $\overline{[\mathcal{A}x]}$ είναι $\mathcal{A}$-αναλλοίωτος (η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα), ισχύει $AP = PAP$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Αλλά $A^* \in \mathcal{A}$, άρα $A^*P = PA^*P$, επομένως $PA = PAP$. Έπεται ότι $AP = PA$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$, δηλαδή $P \in \mathcal{A}'$. Επομένως $TP = PT$. Αλλά $I \in \mathcal{A}$, άρα $x = Ix \in \overline{[\mathcal{A}x]}$ και συνεπώς $Tx = TPx = PTx \in \overline{[\mathcal{A}x]}$. Αφού το $x \in H$ είναι αυθαίρετο, δείξαμε ότι $T \in \mathrm{Ref}\mathcal{A}$.

Επομένως $\mathcal{A}'' \subseteq \mathrm{Ref}\mathcal{A}$. $\square$

Θα δείξουμε σε λίγο (Πόρισμα 11.9) ότι στην πραγματικότητα, ισχύει η ισότητα $\mathrm{Ref}\mathcal{A} = \mathcal{A}''$.

Απόδειξη του Θεωρήματος του von Neumann

Επειδή $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}''$ και η $\mathcal{A}''$ είναι SOT-κλειστή, έχουμε $\overline{\mathcal{A}}^{\text{SOT}} \subseteq \mathcal{A}''$. Αλλά η $\mathcal{A}$ είναι γραμμικός χώρος, άρα (Πρόταση 10.8) $\overline{\mathcal{A}}^{\text{SOT}} = \overline{\mathcal{A}}^{\text{WOT}}$.

Μένει να δειχθεί ότι $\mathcal{A}'' \subseteq \overline{\mathcal{A}}^{\text{SOT}}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $(\mathcal{A}'')^{(n)} = (\mathcal{A}^{(n)})''$ (Παρατήρηση 11.4) και η $\mathcal{A}^{(n)}$ είναι αυτοσυζυγής άλγεβρα που περιέχει τον ταυτοτικό, άρα (από το προηγούμενο Λήμμα) $\mathcal{A}^{(n)} \subseteq \mathrm{Ref}\mathcal{A}^{(n)}$. Από την Πρόταση 10.10, αυτό σημαίνει ότι $\mathcal{A}'' \subseteq \overline{\mathcal{A}}^{\text{SOT}}$. $\square$

Παρατήρηση 11.7 Έστω A αυτοσυζυγής τελεστής. Γράφουμε $A = \int \lambda dE_\lambda$ από το *Φασματικό Θεώρημα*. Οι φασματικές προβολές $E(\Omega)$ μπορεί να μην ανήκουν στην C^*-άλγεβρα που παράγεται από τον A (παράδειγμα: ο τελεστής M του πολλαπλασιασμού επί x στον $L^2([0,1])$) παράγει την C^*-άλγεβρα

$\{M_f : f \in C([0,1])\}$, που δεν περιέχει προβολές). Όμως, όπως δείξαμε στην Παρατήρηση 9.9, ανήκουν στην άλγεβρα von Neumann $\{A\}''$ που παράγει ο A.

Πόρισμα 11.8 *Κάθε άλγεβρα von Neumann είναι η norm-κλειστή γραμμική θήκη των προβολών που περιέχει. (Παράβαλε: μία C^*-άλγεβρα μπορεί να μην έχει μη τετριμμένες προβολές.)*

Απόδειξη Έστω $\mathcal{M}$ άλγεβρα von Neumann. Αφού η $\mathcal{M}$ είναι αυτοσυζυγής, κάθε $A \in \mathcal{M}$ γράφεται $A = A_1 + iA_2$ όπου A_i αυτοσυζυγής. Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι κάθε αυτοσυζυγής $A \in \mathcal{M}$ προσεγγίζεται στην τοπολογία της νόρμας από (πεπερασμένους) γραμμικούς συνδυασμούς προβολών που ανήκουν στην $\mathcal{M}$.

Από το *Φασματικό Θεώρημα* έχουμε $A = \int \lambda dE_\lambda$, όπου το ολοκλήρωμα συγκλίνει στην τοπολογία της νόρμας. Άρα ο A ανήκει στην norm-κλειστή γραμμική θήκη των φασματικών του προβολών $E(\Omega)$ (όπου Ω είναι Borel υποσύνολο του φάσματος $\sigma(A)$ του A). Όμως, όπως μόλις παρατηρήσαμε, οι φασματικές προβολές του A ανήκουν στον $\{A\}''$, άρα στην $\mathcal{M}$. □

Πόρισμα 11.9 *Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ αυτοσυζυγής άλγεβρα που περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή. Τότε*

$$\mathcal{A}'' = \mathrm{Ref}\mathcal{A} \ (= \overline{\mathcal{A}}^{\mathrm{SOT}}).$$

Απόδειξη Από το Λήμμα 11.6 έπεται ότι $\mathcal{A}'' \subseteq \mathrm{Ref}\mathcal{A}$. Αρκεί λοιπόν να δείξω ότι, αν $T \in \mathrm{Ref}\mathcal{A}$, τότε $T \in \mathcal{A}''$, δηλαδή $TQ = QT$ για κάθε $Q \in \mathcal{A}'$. Επειδή όμως η $\mathcal{A}'$ είναι άλγεβρα von Neumann , άρα παράγεται από τις προβολές της, αρκεί να υποθέσω ότι η Q είναι προβολή.

Αν $H_o = Q(H)$, θα δείξω ότι ο H_o είναι T-αναλλοίωτος. Έστω $x \in H_o$. Τότε $Tx \in \overline{\mathcal{A}x}$ (γιατί $T \in \mathrm{Ref}\mathcal{A}$). Αλλά ο υπόχωρος H_o είναι $\mathcal{A}$-αναλλοίωτος, εφόσον $Q \in \mathcal{A}'$. Επομένως $\mathcal{A}x \subseteq H_o$, άρα και $\overline{\mathcal{A}x} \subseteq H_o$ αφού ο H_o είναι κλειστός. Επομένως τελικά $Tx \in H_o$, δηλαδή $T(H_o) \subseteq H_o$. Αλλά η προβολή στον $H_o^\perp$, δηλαδή η $I - Q$, ανήκει επίσης στην $\mathcal{A}'$. Το ίδιο επιχείρημα λοιπόν δείχνει ότι $T(H_o^\perp) \subseteq H_o^\perp$, άρα τελικά ο H_o ανάγει τον T, πράγμα που σημαίνει ότι $QT = TQ$ (Λήμμα 4.1). □

Υπενθυμίζουμε (δες το Παράδειγμα στην Παρατήρηση 10.9) ότι υπάρχει άλγεβρα $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ (βεβαίως μη αυτοσυζυγής) που περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή τέτοια ώστε $\mathrm{Ref}\mathcal{A} \neq \overline{\mathcal{A}}^{\mathrm{SOT}}$.

Πόρισμα 11.10 *Αν $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα von Neumann που δρα σε* ***διαχωρίσιμο*** *χώρο Hilbert, τότε υπάρχει* ***αριθμήσιμο*** *σύνολο $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ προβολών που παράγει την $\mathcal{A}$ ως άλγεβρα von Neumann, δηλαδή τέτοιο ώστε $\mathcal{E}'' = \mathcal{A}$.*

Απόδειξη Από τη Πρόταση 10.15, υπάρχει αριθμήσιμο σύνολο $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ που είναι WOT-πυκνό υποσύνολο της μοναδιαίας σφαίρας της $\mathcal{A}$. Από το προηγούμενο Πόρισμα κάθε A_n ανήκει στην norm-κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου των προβολών της $\mathcal{A}$. Επομένως για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $\mathcal{E}_{n,m} = \{E_1, \ldots, E_k\}$ από προβολές της $\mathcal{A}$ και αριθμοί $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ ώστε $\|A_n - \sum \lambda_i E_i\| < \frac{1}{m}$. Άρα ο A_n ανήκει στην norm-κλειστή γραμμική θήκη του αριθμήσιμου συνόλου $\mathcal{E}_n = \cup_m \mathcal{E}_{n,m}$.

Έστω $\mathcal{E} = \cup_n \mathcal{E}_n$. Τότε $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ άρα $\mathcal{E}'' \subseteq \mathcal{A}$. Αντίστροφα αν ο T μετατίθεται με το $\mathcal{E}$ τότε μετατίθεται με κάθε $\mathcal{E}_n$ και άρα με κάθε A_n. Αφού το σύνολο $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι WOT-πυκνό στην μοναδιαία σφαίρα του $\mathcal{A}$, έπεται ότι ο T μετατίθεται με τη μοναδιαία σφαίρα, άρα και με όλην την $\mathcal{A}$. Επομένως $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{A}'$, άρα $\mathcal{A} = \mathcal{A}'' \subseteq \mathcal{E}''$. $\square$

Παρατήρηση 11.11 *Ας σημειωθεί η διαφορά ανάμεσα στα δύο τελευταία Πορίσματα: μία άλγεβρα von Neumann δεν είναι ποτέ ίση με την* ***norm****-κλειστή άλγεβρα που παράγεται από αριθμήσιμο σύνολο προβολών, εκτός αν έχει πεπερασμένη διάσταση.*

Απόδειξη Άσκηση: Δείξτε ότι μία απειροδιάστατη άλγεβρα von Neumann δεν είναι διαχωρίσιμος χώρος στην τοπολογία της νόρμας, διότι περιέχει μία άπειρη ακολουθία κάθετων ανά δύο προβολών, και επομένως περιέχει μία ισομετρική εικόνα του $\ell^\infty(\mathbb{N})$, που δεν είναι διαχωρίσιμος.

11.2 Κάθε masa είναι πολλαπλασιαστική άλγεβρα

Ορισμός 11.4 *Αν H, K είναι χώροι Hilbert, δύο υποσύνολα $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}(K)$ λέγονται* ***ορθομοναδιαία ισοδύναμα (unitarily equivalent)*** *αν υπάρχει ορθομοναδιαίος τελεστής $U : H \to K$ ώστε η απεικόνιση*

$$ad_U : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K) : A \to UAU^*$$

να απεικονίζει το $\mathcal{S}$ επί του $\mathcal{T}$.

Παρατηρήσεις 11.12 **(i)** Είναι φανερό ότι η απεικόνιση ad_U είναι ισομετρικός $*$-ισομορφισμός. Επομένως αν δύο C^*-άλγεβρες $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}(K)$ είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμες, τότε είναι $*$-ισόμορφες. Το αντίστροφο δεν ισχύει: βλ.(iii).

(ii) Αποδεικνύεται ότι κάθε $*$-ισομορφισμός του $\mathcal{B}(H)$ επί του $\mathcal{B}(K)$ είναι ορθομοναδιαία ισοδυναμία. Επομένως, αν $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}(K)$ είναι C^*-άλγεβρες και $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ είναι $*$-ισομορφισμός, τότε ο ϕ είναι ορθομοναδιαία ισοδυναμία αν και μόνον αν επεκτείνεται σε $*$-ισομορφισμό του $\mathcal{B}(H)$ επί του $\mathcal{B}(K)$.

(iii) Μία ορθομοναδιαία ισοδυναμία δεν διατηρεί μόνον την C^*-αλγεβρική δομή, διατηρεί επιπλέον και την δράση στους αντίστοιχους χώρους Hilbert: Αν δύο C^*-άλγεβρες είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμες, τότε δρούν (σε ισομετρικά ισόμορφους χώρους) «κατά τον ίδιο τρόπο». Παραδείγματος χάριν, δύο άλγεβρες von Neumann είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμες αν και μόνον αν οι μεταθέτες τους είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμοι (Απόδειξη: άσκηση). Έπεται ότι αν μία άλγεβρα τελεστών είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμη με μία masa, τότε και η ίδια είναι masa.

Επομένως, αν $\mathcal{M}$ είναι μια masa, τότε η $\mathcal{M}$ είναι βεβαίως ισομετρικά ισόμορφη με την $\mathcal{M}^{(2)}$ (μέσω της απεικόνισης $A \to A \oplus A$), αλλά οι μεταθέτες $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$ και $(\mathcal{M}^{(2)})' = M_2(\mathcal{M})$ δεν είναι ισόμορφοι. Συνεπώς οι $\mathcal{M}$ και $\mathcal{M}^{(2)}$ δεν μπορεί να είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμες.

Επίσης, αν $\phi = ad_U$ είναι ορθομοναδιαία ισοδυναμία, τότε η ϕ και η ϕ^{-1} είναι SOT-SOT συνεχείς (Απόδειξη: άσκηση).

Τα κεντρικά αποτελέσματα αυτής της παραγράφου είναι

Θεώρημα 11.13 *Κάθε αβελιανή άλγεβρα von Neumann που δρα σε διαχωρίσιμο χώρο είναι ισομετρικά $*$-ισομορφική με τον $L^\infty([0,1],\mu)$ για κάποιο Borel μέτρο πιθανότητας μ.*

Θεώρημα 11.14 *Κάθε* ***μεγιστική*** *αβελιανή άλγεβρα von Neumann που δρα σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμη με την πολλαπλασιαστική άλγεβρα του χώρου μέτρου $([0,1],\mu)$, για κάποιο Borel μέτρο πιθανότητας μ.*

Για τις αποδείξεις, θα χρειασθούν μερικά προκαταρκτικά αποτελέσματα.

Ορισμός 11.5 *Έστω $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$ γραμμικός υπόχωρος. Ένα διάνυσμα $\xi \in H$* **διαχωρίζει** *τον $\mathcal{S}$ αν $S\xi \neq 0$ για κάθε $S \in \mathcal{S}\backslash\{0\}$. Το ξ είναι* **κυκλικό** *για τον $\mathcal{S}$ αν ο $[\mathcal{S}\xi]$ είναι πυκνός στον H.*

Λήμμα 11.15 *(i) Αν το ξ είναι κυκλικό για το $\mathcal{S}$ τότε διαχωρίζει τον $\mathcal{S}'$.*

(ii) Αν η $\mathcal{M}$ είναι άλγεβρα von Neumann και το ξ διαχωρίζει την $\mathcal{M}$ τότε είναι κυκλικό για την $\mathcal{M}'$.

Συνεπώς ένα διάνυσμα είναι κυκλικό για μια άλγεβρα von Neumann αν και μόνον αν διαχωρίζει τον μεταθέτη της.

Απόδειξη (i) Έστω $T \in \mathcal{S}'$ ώστε $T\xi = 0$. Τότε $TS\xi = S(T\xi) = 0$ για κάθε $S \in \mathcal{S}$, και συνεπώς $T(\mathcal{S}\xi) = 0$. Αλλά ο $[\mathcal{S}\xi]$ είναι πυκνός στον H και συνεπώς $T = 0$.

(ii) Έστω P η προβολή στον υπόχωρο $\mathcal{M}'\xi$. Ο υπόχωρος αυτός είναι $\mathcal{M}'$-αναλλοίωτος, άρα $P \in (\mathcal{M}')' = \mathcal{M}$. Αλλά $P\xi = \xi$, δηλαδή $(I - P)\xi = 0$ άρα $I - P = 0$ αφού η $I - P$ ανήκει στην $\mathcal{M}$ την οποία το ξ διαχωρίζει. Αυτό σημαίνει ότι ο υπόχωρος $\mathcal{M}'\xi$ είναι πυκνός στο H. $\square$

Λήμμα 11.16 *Κάθε* αβελιανή *άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M}$ που δρα σε* διαχωρίσιμο *χώρο H έχει διαχωρίζον διάνυσμα ξ. Αν η $\mathcal{M}$ είναι masa, τότε το ξ είναι και κυκλικό.*

Απόδειξη Από το Λήμμα του Zorn, υπάρχει μία masa $\mathcal{N}$ που περιέχει την $\mathcal{M}$ (αν η $\mathcal{M}$ είναι masa τότε $\mathcal{N} = \mathcal{M}$). Θα κατασκευάσουμε ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\xi \in H$ κυκλικό για την $\mathcal{N}$. Τότε το ξ θα διαχωρίζει την $\mathcal{N}$. Έπεται ότι το ξ θα διαχωρίζει και την $\mathcal{M}$.

Ονομάζουμε δύο διανύσματα $\xi, \eta \in H$ **πολύ κάθετα** αν οι υπόχωροι $\mathcal{N}\xi$ και $\mathcal{N}\eta$ είναι κάθετοι. Από το Λήμμα του Zorn, υπάρχει μία μεγιστική οικογένεια $\Xi \subseteq H$ από πολύ κάθετα μοναδιαία διανύσματα. Αφου ο H είναι διαχωρίσιμος, η Ξ είναι αριθμήσιμη, έστω $\Xi = \{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$. Έστω P_n η ορθή προβολή στον $\mathcal{N}\xi_n$. Επειδή ο υπόχωρος αυτός είναι αναλλοίωτος από την $\mathcal{N}$, θα έχουμε $P_n \in \mathcal{N}' = \mathcal{N}$. (δες την απόδειξη του 11.6).

Έστω $\xi = \sum_n \frac{1}{2^n}\xi_n$. Ισχυρίζομαι ότι το ξ είναι κυκλικό για την $\mathcal{N}$. Αν όχι, θα υπήρχε μοναδιαίο διάνυσμα $\eta \in H$ κάθετο στον $\mathcal{N}\xi$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $A, B \in \mathcal{N}$ θα είχαμε

$$\langle A\eta, B\xi_n \rangle = \langle \eta, A^* B(2^n P_n \xi) \rangle = 0$$

αφού $A^*BP_n \in \mathcal{N}$ και $\eta \perp \mathcal{N}\xi$. Τότε όμως ο $\mathcal{N}\eta$ θα ήταν κάθετος σε κάθε $\mathcal{N}\xi_n$, πράγμα που αντιβαίνει στην μεγιστικότητα της Ξ. $\square$

Λήμμα 11.17 *Έστω $\mathcal{M}$ αβελιανή άλγεβρα von Neumann σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert H. Τότε υπάρχει αυτοσυζυγής τελεστής $A \in \mathcal{M}$ ώστε $\{A\}'' = \mathcal{M}$. Μπορούμε μάλιστα να επιλέξουμε τον A ώστε $0 \leq A \leq I$.*

Απόδειξη Έστω $\mathcal{E} = \{E_n\}$ αριθμήσιμο σύνολο προβολών της $\mathcal{M}$ ώστε $\mathcal{E}'' = \mathcal{M}$ (Πόρισμα 11.10). Ορίζω

$$B = \sum_n \frac{1}{4^n}(2E_n - I) = \sum_n \frac{1}{4^n} S_n$$

όπου $S_n = 2E_n - I$. Αρκεί να δείξω ότι αν ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(H)$ μετατίθεται με τον B, τότε μετατίθεται με κάθε E_n.

Έστω ότι ο T μετατίθεται με τον B και με τις $E_1, E_2, ..., E_{n-1}$. Θα δείξω ότι ο T μετατίθεται με την E_n. Παρατήρησε ότι ο T μετατίθεται με τον τελεστή

$$4^n(B - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4^k} S_k) = 4^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{4^k} S_k = S_n + B_1$$

όπου

$$B_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} S_{k+n}.$$

Έπεται ότι ο T μετατίθεται με τον

$$\frac{1}{2}(3(S_n + B_1) - (S_n + B_1)^3) = S_n + B_2$$

όπου

$$B_2 = -\frac{3}{2} S_n B_1^2 - \frac{1}{2} B_1^3$$

(χρησιμοποίησα ότι $S_n^2 = I$). Παρατήρησε ότι $\|B_2\| \leq \frac{3}{2}\|B_1\|^2 + \frac{1}{2}\|B_1\|^3 \leq \frac{5}{9}\|B_1\|$, γιατί $\|B_1\| \leq \frac{1}{3}$. Επαναλαμβάνοντας τον ίδιο συλλογισμό με τον B_2 στη θέση του B_1, συμπεραίνουμε ότι ο T μετατίθεται με τον $S_n + B_3$ όπου $\|B_3\| \leq (\frac{5}{9})^2\|B_1\|$ και συνεχίζουμε επαγωγικά. Έπεται ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$, ο T μετατίθεται με τον $S_n + B_k$ όπου $\|B_k\| \leq (\frac{5}{9})^{k-1}\|B_1\|$. Αλλά $\lim_k(S_n + B_k) = S_n$, άρα δείξαμε ότι ο T μετατίθεται με τον S_n και άρα με την E_n.

Για να δείξω ότι ο T μετατίθεται με την E_1 (ισοδύναμα με τον S_1), γράφω $4B = S_1 + A_1$ όπου $A_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} S_{k+1}$ και συνεχίζω όπως στην προηγούμενη παράγραφο. Η επαγωγή είναι τώρα πλήρης.

Παρατήρησε ότι ο τελεστής B που κατασκευάσαμε ικανοποιεί $-\frac{1}{3}I \leq B \leq \frac{1}{3}I$. Αν λοιπόν τον αντικαταστήσουμε με τον $B + \frac{1}{3}I$, βρίσκουμε έναν τελεστή A με τον ίδιο μεταθέτη που ικανοποιεί $0 \leq A \leq I$. $\square$

Πόρισμα 11.18 *Αν $\mathcal{M}$ είναι αβελιανή άλγεβρα von Neumann που δρα σε διαχωρίσιμο χώρο H, τότε υπάρχει φασματικό μέτρο $E(.)$ ορισμένο στα Borel υποσύνολα του $[0,1]$ ώστε*

$$\mathcal{M} = \{E(\Omega) : \Omega \subseteq [0,1] \ \ \textit{Borel}\ \}''.$$

Απόδειξη Από το Λήμμα 11.17, υπάρχει αυτοσυζυγής τελεστής $A \in \mathcal{M}$ με $0 \leq A \leq I$ ώστε $A'' = \mathcal{M}$.

Επειδή ο A είναι αυτοσυζυγής, το φάσμα του είναι πραγματικό, και επειδή $0 \leq A \leq I$, περιέχεται στο $[0,1]$. Επομένως το φασματικό του μέτρο θα φέρεται από το $[0,1]$.

Έχουμε όμως δείξει (Θεώρημα 9.14) ότι $\{A\}'' = \{E(\Omega) : \Omega \subseteq [0,1] \ \ \text{Borel}\ \}''$, και συνεπώς $\mathcal{M} = \{E(\Omega) : \Omega \subseteq [0,1] \ \ \text{Borel}\ \}''$. $\square$

Παρατήρηση 11.19 Το σύνολο $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ των προβολών μιας άλγεβρας von Neumann $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(H)$ ταυτίζεται με το σύνολο των κλειστών υποχώρων του H που είναι $\mathcal{M}'$-αναλλοίωτοι (μέσω της απεικόνισης που αντιστοιχεί σε κάθε (ορθή) προβολή P τον υπόχωρο $P(H)$). Επομένως το $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ αποτελεί *σύνδεσμο* αν ονομάσουμε $P \vee Q$ την προβολή στον υπόχωρο $\overline{[P(H) + Q(H)]}$ και $P \wedge Q$ την προβολή στον υπόχωρο $P(H) \cap Q(H)$. Όταν η $\mathcal{M}$ είναι μεταθετική, ο σύνδεσμος αυτός είναι *επιμεριστικός*, επομένως είναι σύνδεσμος Boole. Ο λόγος είναι ότι, όταν δύο προβολές P, Q μετατίθενται, τότε $P \vee Q = P + Q - PQ$ και $P \wedge Q = PQ$, και φυσικά η πρόσθεση επιμερίζεται ως προς τον πολλαπλασιασμό.

Πρόταση 11.20 *Έστω $(K, \mathcal{S})$ μετρήσιμος χώρος και $\mathcal{E} = \{E(\Omega) : \Omega \in \mathcal{S}\}$ φασματικό μέτρο σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert H. Υπάρχει μέτρο πιθανότητας μ στον K ώστε η αβελιανή άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M}$ που παράγεται από το $\mathcal{E}$ να είναι ισομετρικά *-ισομορφική με τον $L^\infty(K, \mu)$.*

Απόδειξη Εφόσον ο H είναι διαχωρίσιμος, η αβελιανή άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M}$ έχει μοναδιαίο διάνυσμα, έστω $\xi \in H$, που την διαχωρίζει (Λήμμα 11.16). Θέτουμε

$$\mu(\Omega) = \mu_{\xi,\xi}(\Omega) = \langle E(\Omega)\xi, \xi\rangle \qquad (\Omega \in \mathcal{S}).$$

Από τον ορισμό του φασματικού μέτρου, το μ είναι μέτρο Borel πιθανότητας στον K. Αν $E(\Omega) = 0$, τότε βεβαίως $\mu(\Omega) = 0$. Αλλά και αντίστροφα, αν $\mu(\Omega) = 0$ τότε $\|E(\Omega)\xi\|^2 = \langle E(\Omega)\xi, E(\Omega)\xi\rangle = \langle E(\Omega)\xi, \xi\rangle = 0$, οπότε $E(\Omega) = 0$ αφού το ξ διαχωρίζει την $\mathcal{M}$. Δηλαδή τα μέτρα μ και $E(.)$ είναι «ισοδύναμα» (έχουν τα ίδια μηδενικά σύνολα).

Στην παράγραφο 9.2.2, ορίσαμε έναν συνεχή *-μορφισμό

$$f \to \theta_o(f) = \int_K f dE$$

από την άλγεβρα $\mathcal{L}^\infty(K)$ των φραγμένων μετρήσιμων *συναρτήσεων* $f : K \to \mathbb{C}$ με τιμές στον $B(\mathcal{H})$. Αν $f = \sum c_i\chi_{\Omega_i} \in \mathcal{L}^\infty(K)$ είναι απλή, τότε

$$\theta_o(f) = \sum_i c_i E(\Omega_i) \in \mathcal{M}$$

και συνεπώς, αφού οι απλές συναρτήσεις είναι πυκνές στην $\mathcal{L}^\infty(K)$, $\theta_o(f) \in \mathcal{M}$ για κάθε $\mathcal{L}^\infty(K)$.

Ισχυρισμός *Η θ_o επάγει μια καλά ορισμένη απεικόνιση*

$$\theta : \ L^\infty(K, \mu) \to \mathcal{M}$$

*που είναι ισομετρικός *-μορφισμός.*

Αρκεί γι'αυτό να δείξουμε ότι $\|\theta_o(f)\| = \text{esssup}|f|$ όταν η f είναι απλή, γιατί τότε η σχέση $f = 0$ μ-σχεδόν παντού θα συνεπάγεται $\theta_o(f) = 0$.

Αν $f = \sum c_i\chi_{\Omega_i}$ όπου $\{\Omega_i\}$ είναι μια Borel διαμέριση του K τότε το ουσιώδες supremum της f είναι $\|f\|_\infty = \max\{|c_i| : \mu(\Omega_i) \neq 0\}$. Αλλά

$$\|\theta_o(f)\| = \left\|\sum c_i E(\Omega_i)\right\| = \max_i \|c_i E(\Omega_i)\| = \max\{|c_i| : E(\Omega_i) \neq 0\} = \|f\|_\infty$$

αφού οι $E(\Omega_i)$ είναι κάθετες ανά δύο προβολές και $E(\Omega) \neq 0$ αν και μόνον αν $\mu(\Omega) \neq 0$. Εφόσον οι απλές συναρτήσεις είναι $\|.\|_\infty$-πυκνές στον $L^\infty(K, \mu)$, ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Μένει τώρα να αποδειχθεί ο

Ισχυρισμός *Η* θ_o *απεικονίζει την* $L^\infty(K,\mu)$ επί της $\mathcal{M}$. *Δηλαδή αν*

$$\mathcal{M}_o \equiv \{\theta(f) : f \in L^\infty(K,\mu)$$

έχουμε $\mathcal{M}_o = \mathcal{M}$.

Απόδειξη Ας παρατηρήσουμε ότι η $\mathcal{M}_o$, ως ισομετρικά *-ισομορφική με την C^*-άλγεβρα $L^\infty(K,\mu)$, είναι C^*-άλγεβρα. Επιπλέον επειδή $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}_o$ και $\mathcal{E}'' = \mathcal{M}$, έπεται ότι $\mathcal{M}_o'' = \mathcal{M}$. Από το Θεώρημα von Neumann (11.5) συμπεραίνουμε ότι η $\mathcal{M}_o$ είναι SOT-πυκνή στην $\mathcal{M}$. Ειδικότερα για κάθε $\eta \in \mathcal{H}$, ο υπόχωρος $\mathcal{M}_o\eta$ είναι πυκνός στον $\mathcal{M}\eta$.

Έστω $B \in \mathcal{M}$. Θα βρούμε μια $f \in L^\infty(K,\mu)$ ώστε $B = \theta(f)$.

Επειδή κάθε στοιχείο της $\mathcal{M}$ είναι γραμμικός συνδυασμός θετικών στοιχείων της $\mathcal{M}$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο B είναι θετικός τελεστής.

Ορίζω ένα νέο μέτρο ν στον $(K,\mathcal{S})$ από την σχέση

$$\nu(\Omega) = \mu_{B\xi,\xi}(\Omega) = \langle E(\Omega)B\xi,\xi\rangle = \langle E(\Omega)BE(\Omega)\xi,\xi\rangle$$

(διότι $E(\Omega)BE(\Omega) = E(\Omega)^2B = E(\Omega)B$). Έχουμε $0 \leq \nu(\Omega) \leq \|B\|\mu(\Omega)$ γιατί $0 \leq B \leq \|B\|I$. Έπεται ότι το ν είναι μ-απόλυτα συνεχές. Από το θεώρημα Radon -Nikodym (δες [14, 10.27]), υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f \in L^1(K,\mu)$ ώστε

$$\nu(\Omega) = \int_\Omega f d\mu \qquad (\Omega \in \mathcal{S}).$$

Το ν είναι θετικό μέτρο, άρα η f είναι μη αρνητική. Ισχυρίζομαι ότι $f \leq \|B\|$ μ-σχεδόν παντού. Πράγματι, αν $\epsilon > 0$ και $\Omega = \{t \in K : f(t) > \|B\| + \epsilon\}$ τότε

$$(\|B\|+\epsilon)\mu(\Omega) = \int_\Omega (\|B\|+\epsilon)d\mu \leq \int_\Omega f d\mu = \nu(\Omega) \leq \|B\|\mu(\Omega)$$

άρα $\mu(\Omega) = 0$. Επομένως $f \in L^\infty(K,\mu)$.

Θα ολοκληρώσουμε την απόδειξη δείχνοντας ότι $B = \theta(f)$.

Για κάθε $\Omega \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}\langle (B-\theta(f))\xi, E(\Omega)\xi\rangle &= \langle B\xi, E(\Omega)\xi\rangle - \langle \theta(f)\xi, E(\Omega)\xi\rangle \\ &= \nu(\Omega) - \langle E(\Omega)\theta(f)\xi,\xi\rangle.\end{aligned}$$

Αλλά $E(\Omega)\theta(f) = \theta(\chi_\Omega)\theta(f) = \theta(\chi_\Omega f)$, οπότε

$$\langle (B-\theta(f))\xi, E(\Omega)\xi\rangle = \nu(\Omega) - \langle \theta(\chi_\Omega f)\xi, \xi\rangle = \int_\Omega f d\mu - \int \chi_\Omega f d\mu = 0.$$

Έπεται ότι το $(B-\theta(f))\xi$ είναι κάθετο σε κάθε $E(\Omega)\xi$, άρα και στην γραμμική θήκη του $\{E(\Omega)\xi : \Omega \in \mathcal{S}\}$, δηλαδή στον χώρο $\mathcal{M}_o\xi$. Αλλά η $\mathcal{M}_o$ είναι SOT-πυκνή στην $\mathcal{M}$, επομένως το $(B-\theta(f))\xi$ είναι κάθετο στο $\mathcal{M}\xi$. Από την άλλη μεριά όμως ο $B-\theta(f)$ ανήκει στην $\mathcal{M}$, οπότε έχουμε $(B-\theta(f))\xi = 0$ και άρα $B-\theta(f) = 0$ αφού το ξ διαχωρίζει την $\mathcal{M}$. □

Άμεση είναι τώρα η **απόδειξη του Θεωρήματος 11.13**: αρκεί να συνδυάσουμε την Πρόταση 11.18 και την Πρόταση 11.20.

Επίσης στην απόδειξη της Πρότασης 11.20 εμπεριέχεται ουσιαστικά η απόδειξη του επομένου Πορίσματος.

Πόρισμα 11.21 *Η (αβελιανή) άλγεβρα von Neumann $\{A\}''$ που παράγεται από έναν φυσιολογικό τελεστή A που δρα σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert ισούται με το σύνολο*

$$\{f(A) : f \in \mathcal{L}^\infty(\sigma(A))\}$$

όπου $\mathcal{L}^\infty(\sigma(A))$ είναι το σύνολο των Borel φραγμένων συναρτήσεων $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$.

Πρόταση 11.22 *Έστω $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(H)$ αβελιανή άλγεβρα von Neumann που έχει κυκλικό διάνυσμα $\xi \in H$ και $(K, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος μέτρου πιθανότητας. Τότε σε κάθε (αλγεβρικό) *-ισομορφισμό $\theta : L^\infty(K,\mu) \to \mathcal{M}$ αντιστοιχεί ένας ορθομοναδιαίος τελεστής $U : H \to L^2(K,\mu)$ ώστε $U\theta(f)U^{-1} = M_f$ για κάθε $f \in L^\infty(K,\mu)$. Επομένως η $\mathcal{M}$ είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμη με την πολλαπλασιαστική άλγεβρα $\mathcal{M}_\mu \subseteq \mathcal{B}(L^2(K,\mu))$.*

Ο ορθομοναδιαίος τελεστής U λέγεται ότι *υλοποιεί (implements)* τον ισομορφισμό $\mathcal{M}_\mu \to \mathcal{M} : M_f \to \theta(f)$.

Απόδειξη Παρατηρούμε πρώτα ότι, επειδή οι $L^\infty(K,\mu)$ και $\mathcal{M}$ είναι C*-άλγεβρες, η $\theta : L^\infty(K,\mu) \to \mathcal{M}$ είναι κατ'ανάγκην ισομετρία. Πράγματι, όπως φαίνεται από την απόδειξη του Λήμματος 9.5, η θ είναι συστολή. Με το ίδιο όμως επιχείρημα[40], η θ^{-1} είναι συστολή. Από την ίδια απόδειξη φαίνεται ότι η θ διατηρεί την διάταξη (συνεπώς και η θ^{-1} την διατηρεί).

[40]χρησιμοποιώντας ότι κάθε θετικό στοιχείο της $\mathcal{M}$ έχει θετική τετραγωνική ρίζα

Αν $\mathcal{L}_o(K,\mathcal{S})$ είναι η *άλγεβρα των απλών μετρήσιμων συναρτήσεων $f : K \to \mathbb{C}$ και $\mathcal{M}_o = \{\theta(f) : f \in \mathcal{L}_o(K,\mathcal{S})\}$, θέτουμε

$$H_o = \mathcal{M}_o\xi = \{\theta(f)\xi : f \in \mathcal{L}_o(K,\mathcal{S})\}.$$

Ισχυρίζομαι ότι ο υπόχωρος H_o είναι πυκνός στον H. Πράγματι, αφού η θ είναι ισομετρία, η $\mathcal{M}_o$ είναι $\|.\|$-πυκνή στην $\mathcal{M}$. Επομένως, αν ένα $\eta \in H$ είναι κάθετο στον H_o, θα είναι κάθετο και στον $\mathcal{M}\xi$, που είναι πυκνός υπόχωρος του H, αφού το ξ είναι κυκλικό διάνυσμα. Επομένως $\eta = 0$.

Κατασκευάζουμε τώρα ένα νέο μέτρο ν στην $\mathcal{S}$ ως εξής:

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το ξ είναι μοναδιαίο διάνυσμα. Για κάθε $\Omega \in \mathcal{S}$ θέτουμε

$$\nu(\Omega) = \langle \theta(\chi_\Omega)\xi, \xi \rangle = \|\theta(\chi_\Omega)\xi\|^2.$$

Παρατήρησε ότι $\nu(\Omega) = 0$ αν και μόνον αν $\theta(\chi_\Omega) = 0$ (γιατί το ξ διαχωρίζει την $\mathcal{M}$) αν και μόνον αν $\chi_\Omega = 0$ (γιατί η θ είναι 1-1) αν και μόνον αν $\mu(\Omega) = 0$.

Θα δείξω ότι το ν είναι σ-προσθετικό μέτρο πιθανότητας. Είναι φανερό ότι $0 \le \nu(\Omega) \le 1$. Επίσης είναι φανερό ότι το ν είναι πεπερασμένα προσθετικό. Για να δείξω ότι είναι σ-προσθετικό, αρκεί να δείξω ότι, αν (Ω_n) είναι ακολουθία στην $\mathcal{S}$ που φθίνει προς το $\emptyset$, έχουμε $\nu(\Omega_n) \to 0$. Κάθε $\theta(\chi_{\Omega_n}) \equiv P_n \in \mathcal{M}$ είναι αυτοσυζυγής και ταυτοδύναμος, άρα προβολή. Αν θέσω $E_n = P_n(H)$, τότε ο υπόχωρος E_n είναι $\mathcal{M}'$-αναλλοίωτος οπότε ο $E \equiv \cap_n E_n$ είναι $\mathcal{M}'$-αναλλοίωτος. Έπεται ότι η προβολή P στον E ανήκει[41] στην $\mathcal{M}'' = \mathcal{M}$. Επομένως υπάρχει $\Omega \in \mathcal{S}$ ώστε $P = \theta(\chi_\Omega)$. Έχουμε $P \le P_n$ γιατί $E \subseteq E_n$, άρα $\chi_\Omega \le \chi_{\Omega_n}$ (εφόσον η θ^{-1} διατηρεί τη διάταξη) και συνεπώς $\mu(\Omega) \le \mu(\Omega_n)$. Αλλά $\Omega_n \to \emptyset$ και το μ είναι σ-προσθετικό, άρα $\mu(\Omega) = 0$, οπότε, όπως παρατηρήσαμε προηγουμένως, $\nu(\Omega) = 0$.

Επομένως το ν είναι μέτρο στον $(K,\mathcal{S})$, και είναι ισοδύναμο με το μ. Από το Θεώρημα Radon - Nikodym έπεται ότι υπάρχει μη αρνητική $h \in L^1(K,\mu)$ ώστε $\nu(\Omega) = \int_\Omega h d\mu$ για κάθε $\Omega \in \mathcal{S}$. Επίσης $h(t) > 0$ για μ-σχεδόν κάθε $t \in K$ γιατί $\nu \sim \mu$.

Θέτουμε $g_o = h^{1/2} \in L^2(K,\mu)$ και ορίζουμε μια απεικόνιση από τον H_o στον $L^2(K,\mu)$ από τον τύπο:

$$U_o : H_o \longrightarrow L^2(K,\mu) : \theta(f)\xi \longrightarrow fg_o$$

[41] Γράφουμε $P = \wedge_n P_n$. Παρεμπιπτόντως ας σημειώσουμε ότι με την ίδια μέθοδο αποδεικνύεται ότι το σύνολο $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ των προβολών μιας άλγεβρας von Neumann $\mathcal{M}$ (μεταθετικής ή όχι) αποκτά τη δομή *πλήρους συνδέσμου.*

όπου f απλή μετρήσιμη. Είναι φανερό ότι η U_o είναι γραμμική. Επίσης, η U_o είναι ισομετρία, γιατί αν $f = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{\Omega_k}$ με τα Ω_i ξένα ανά δύο τότε

$$\begin{aligned}
\|fg_o\|_2^2 &= \int_K |fg_o|^2 d\mu = \int_K \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \chi_{\Omega_k} h d\mu \\
&= \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \int_K \chi_{\Omega_k} d\nu = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \langle \theta(\chi_{\Omega_k})\xi, \xi\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \|\theta(\chi_{\Omega_k})\xi\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \theta(\chi_{\Omega_k})\xi \right\|^2 = \|\theta(f)\xi\|^2
\end{aligned}$$

(χρησιμοποίησα ότι $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ για $i \neq j$ άρα $\chi_{\Omega_i}\chi_{\Omega_j} = 0$ και $\theta(\chi_{\Omega_i})\xi \perp \theta(\chi_{\Omega_j})\xi$).

Συνεπώς η U_o επεκτείνεται σε μια ισομετρική απεικόνιση U με πεδίο ορισμού την κλειστή θήκη του H_o, που είναι ο H. Ισχυρίζομαι ότι το πεδίο τιμών της U είναι όλος ο $L^2(K, \mu)$. Πράγματι, είναι κλειστός υπόχωρός του και, αν μια $f \in L^2(K, \mu)$ είναι κάθετη στην $\chi_\Omega g_o$ για κάθε $\Omega \in \mathcal{S}$ τότε

$$\int_\Omega f g_o d\mu = 0$$

για κάθε $\Omega \in \mathcal{S}$ άρα $fg_o = 0$ μ-σχεδόν παντού και συνεπώς $f = 0$ μ-σχεδόν παντού γιατί η g_o είναι μ-σχεδόν παντού θετική.

Άρα η U είναι ορθομοναδιαίος τελεστής.

Ισχυρισμός Για κάθε απλή συνάρτηση $f \in L^\infty(K, \mu)$, ισχύει

$$U\theta(f)U^{-1} = M_f.$$

Απόδειξη Αν η $g : K \to \mathbb{C}$ είναι απλή, τότε

$$U(\theta(f)(\theta(g)\xi)) = U(\theta(fg)\xi) = fgg_o = M_f(gg_o) = M_f(U(\theta(g)\xi))$$

και συνεπώς οι *φραγμένοι* τελεστές $U\theta(f)$ και $M_f U$ ταυτίζονται στον πυκνό υπόχωρο $\{\theta(g)x : g \in \mathcal{L}_o(K)\} = H_o$, άρα παντού.

Εφόσον οι απεικονίσεις $f \to M_f$ και $f \to U\theta(f)U^{-1}$ είναι $\|.\|$-συνεχείς (μάλιστα ισομετρίες) η ισότητα $U\theta(f)U^{-1} = M_f$ θα ισχύει για κάθε $f \in L^\infty(K, \mu)$. Αλλά $\{\theta(f) : f \in L^\infty(K, \mu)\} = \mathcal{M}$. Επομένως η απεικόνιση $A \longrightarrow UAU^{-1}$ είναι ορθομοναδιαία ισοδυναμία από την $\mathcal{M}$ επί της $\mathcal{M}_\mu$. $\square$

Παρατήρηση Στην τελευταία Πρόταση αρκεί να υποθέσει κανείς ότι η θ είναι αλγεβρικός ισομορφισμός, γιατί τότε αυτομάτως θα διατηρεί την ενέλιξη. Πράγματι, αφού η εικόνα της θ είναι άλγεβρα von Neumann , που παράγεται από τις προβολές της, αρκεί να δειχθεί ότι η θ απεικονίζει (ορθές) προβολές σε (ορθές) προβολές. Για κάθε χ_Ω, η $\theta(\chi_\Omega)$ είναι ταυτοδύναμη. Είναι όμως και φυσιολογικός τελεστής, γιατί η $\mathcal{M}$ είναι μεταθετική άλγεβρα. Αυτό συνεπάγεται ότι η $\theta(\chi_\Omega)$ είναι ορθή προβολή (δες π.χ. [13]).

Η **απόδειξη του Θεωρήματος 11.14** είναι τώρα άμεση. Μάλιστα, έχουμε τον ακόλουθο χαρακτηρισμό:

Θεώρημα 11.23 *Έστω $\mathcal{M}$ αβελιανή άλγεβρα von Neumann που δρα σε διαχωρίσιμο χώρο H. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η $\mathcal{M}$ είναι μεγιστική.*

(ii) *Η $\mathcal{M}$ έχει κυκλικό διάνυσμα.*

(iii) *Η $\mathcal{M}$ είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμη με την πολλαπλασιαστική άλγεβρα του $([0,1],\mu)$, όπου μ μέτρο Borel πιθανότητας στο $[0,1]$.*

(iv) *Η $\mathcal{M}$ είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμη με την πολλαπλασιαστική άλγεβρα κάποιου χώρου (σ-πεπερασμένου) μέτρου.*

Απόδειξη **(i)⇒(ii)** Κάθε masa έχει κυκλικό διάνυσμα (Λήμμα 11.16).

(ii)⇒(iii) Από το Θεώρημα 11.13, η $\mathcal{M}$ είναι ισόμορφη με κάποια $L^\infty([0,1],\mu)$. Αφού έχει κυκλικό διάνυσμα, από την Πρόταση 11.22, ο ισομορφισμός αυτός επάγει ορθομοναδιαία ισοδυναμία της $\mathcal{M}$ με την αντίστοιχη πολλαπλασιαστική άλγεβρα $\mathcal{M}_\mu$.

(iii)⇒(iv) Προφανές.

(iv)⇒(i) Πρόταση 11.1. □

Πόρισμα 11.24 *Αν $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{B}(H_i)$ $(i = 1,2)$ είναι δύο μεγιστικές αβελιανές άλγεβρες von Neumann σε διαχωρίσιμους χώρους, τότε κάθε αλγεβρικός *-ισομορφισμός $\phi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ υλοποιείται από ορθομοναδιαίο τελεστή $U : H_1 \to H_2$.*

Απόδειξη Από το Θεώρημα 11.13, υπάρχει μέτρο Borel μ στο $[0,1]$ και *-ισομορφισμός $\theta_1 : L^\infty([0,1],\mu) \to \mathcal{M}_1$. Τότε όμως η απεικόνιση $\theta_2 \equiv \phi \circ \theta_1 : L^\infty([0,1],\mu) \to \mathcal{M}_2$ είναι *-ισομορφισμός. Από την Πρόταση 11.22, οι

*-ισομορφισμοί $\psi_1 : M_f \to \theta_1(f)$ και $\psi_2 : M_f \to \theta_2(f)$ υλοποιούνται από ορθομοναδιαίους τελεστές, συνεπώς και η σύνθεση

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1} : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2 : \theta_1(f) \to M_f \to \theta_2(f)\,,$$

δηλαδή η ϕ, υλοποιείται από ορθομοναδιαίο τελεστή. Συγκεκριμένα, υπάρχουν ορθομοναδιαίοι τελεστές $V_i : H_i \to L^2([0,1],\mu)$ ώστε $V_i\theta_i(f)V_i^{-1} = M_f$ $(i = 1,2)$ για κάθε $f \in L^\infty([0,1],\mu)$. Έχουμε λοιπόν

$$V_1\theta_1(f)V_1^{-1} = M_f = V_2\theta_2(f)V_2^{-1} = V_2\phi(\theta_1(f))V_2^{-1}$$

για κάθε $f \in L^\infty([0,1],\mu)$, δηλαδή

$$V_1AV_1^{-1} = V_2\phi(A)V_2^{-1} \quad \Rightarrow \quad \phi(A) = V_2^{-1}V_1AV_1^{-1}V_2$$

για κάθε $A \in \mathcal{M}_1$. Αρκεί λοιπόν να θέσουμε $U = V_2^{-1}V_1$. $\square$

Η πρώτη μορφή του Φασματικού Θεωρήματος για φυσιολογικούς τελεστές είναι άμεση συνέπεια των προηγούμενων:

Θεώρημα 11.25 (Φασματικό θεώρημα) *Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$ φυσιολογικός τελεστής που δρα σε διαχωρίσιμο χώρο H. Τότε υπάρχει χώρος μέτρου (K,μ) και συνάρτηση $f \in L^\infty(K,\mu)$ ώστε ο T να είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με τον πολλαπλασιαστικό τελεστή $M_f \in \mathcal{B}(L^2(K,\mu))$. Μάλιστα, μπορούμε να επιλέξουμε $K = [0,1]$ και μ κανονικό μέτρο Borel πιθανότητας.*

Απόδειξη Ονομάζουμε $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ την άλγεβρα von Neumann που παράγει ο T. Αφού ο T είναι φυσιολογικός, η $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική. Από το Λήμμα Zorn, η $\mathcal{A}$ περιέχεται σε μια μεγιστική αυτοσυζυγή αβελιανή άλγεβρα $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(H)$.

Από το Θεώρημα 11.14, η $\mathcal{M}$ είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμη με κάποιαν $\mathcal{M}_\mu \subseteq \mathcal{B}(L^2(K,\mu))$. Αφού $T \in \mathcal{M}$, υπάρχει $f \in L^\infty(K,\mu)$ ώστε ο T να είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με τον τελεστή $M_f \in \mathcal{M}_\mu$. $\square$

Παρατήρηση Το θεώρημα αληθεύει ακόμη και αν ο H δεν είναι διαχωρίσιμος. Τότε όμως (όπως είδαμε και στην παράγραφο 8) ο K δεν μπορεί εν γένει να επιλεγεί συμπαγής μετρικός και το μ δεν είναι κατ'ανάγκην πεπερασμένο ή σ-πεπερασμένο.

Βιβλιογραφία

[1] W.B. Arveson, *A short course in Spectral Theory*, Springer-Verlag, 2002.

[2] J.B. Conway, *A course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1985.

[3] K.R. Davidson, *C^*-Algebras by Example*, Fields Institute Monographs, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1996.

[4] R.G. Douglas, *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*, Academic Press, 1972.

[5] J.A. Erdos, C*-Algebras, στο: *Άλγεβρες Τελεστών και Κβαντική Μηχανική*, επιμέλεια Μ. Ανούσης, Σπ. Κωτσάκης, Ν. Χατζησάββας, Εκδόσεις Ζήτη, 1997.

[6] P.R. Halmos, *Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity*, Chelsea, N.Y., 1951.

[7] P.R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, 2nd Edition, Springer-Verlag, 1982.

[8] G. Helmberg, *Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space*, North-Holland, 1975.

[9] H.Heuser, *Functional Analysis*, Wiley, 1982.

[10] R.V. Kadison & J.R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras* (2 Vols), Academic Press, 1983.

[11] A.N. Kolmogorov & S.V. Fomin, *Introductory Real Analysis*, Dover 1975.

[12] Α. Κατάβολος, Άλγεβρες von Neumann και Μη Φραγμένοι Τελεστές, στο: *Άλγεβρες Τελεστών και Κβαντική Μηχανική*, επιμέλεια Μ. Ανούσης, Σπ. Κωτσάκης, Ν. Χατζησάββας, Εκδόσεις Ζήτη, 1997.

[13] Α. Κατάβολος, *Εισαγωγή στη Θεωρία Τελεστών*, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2006.

[14] Γ. Κουμουλλής, Σ. Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μέτρου*, Εκδ. Συμμετρία, 1988.

[15] G.J. Murphy, *C^*-Algebras and Operator Theory*, Academic Press, 1990.

[16] Σ. Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μιγαδικών Συναρτήσεων Μιάς Μεταβλητής*, Αθήνα 1982.

[17] Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Ζαχαριάδης, Ν. Καλαμίδας, Β. Φαρμάκη, *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*, Εκδ. Συμμετρία, 1988.

[18] H. Radjavi & P. Rosenthal, *Invariant Subspaces*, Springer-Verlag, 1973. Second Edition, Dover, 2003.

[19] M. Reed & B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis.* Second edition. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1980.

[20] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, 1973.

[21] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1974.

[22] I.E. Segal & R.A. Kunze, *Integrals and Operators*, McGraw-Hill, 1968.

[23] V. S. Sunder, *Functional analysis. Spectral theory.* Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks. Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.

[24] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras I*, Springer-Verlag, 1979. Second printing, Encyclopaedia of Mathematical Sciences 124, Springer, 2002.

[25] N.J. Young, *An Introduction to Hilbert Space*, Cambridge University Press, 1988.