Θεωρία Τελεστών
Ασκήσεις 2
16 Μαρτίου 2006

Ο χω΄ρος $L^2(\mathbb{T})$ (όπου $\mathbb{T} = \{e^{ix} : x \in (-\pi, \pi]\}$ η μοναδιαία περιφέρεια) είναι εφοδιασμενος με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{ix})\overline{g(e^{ix})}dx.$$

Ονομάζουμε $f_k(z) = z^k$.

Άσκηση 1 Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Stone - Weierstrass, δείξτε ότι η οικογένεια $\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $L^2(\mathbb{T})$.

Αν $f \in L^2(\mathbb{T})$, γράφουμε $\hat{f}(k) = \langle f, f_k \rangle$, $(k \in \mathbb{Z})$. Ο μετασχηματισμός Fourier :

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z}) : f \to (\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$$

είναι ισομετρία επί.

Ορίζουμε

$$H^2(\mathbb{T}) = \{f \in L^2(\mathbb{T}) : \hat{f}(-k) = 0 \text{ για } k = 1, 2, \ldots\}.$$

Άσκηση 2 Αν ταυτίσουμε τον $\ell^2(\mathbb{N})$ με τον κλειστό υπόχωρο του $\ell^2(\mathbb{Z})$ που παράγεται από τα $\{e_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$, τότε $\mathcal{F}(H^2(\mathbb{T})) = \ell^2(\mathbb{N})$.

(Παρατηρείστε ότι κάθε $f \in H^2(\mathbb{T})$ ορίζει μια ολόμορφη συνάρτηση $F : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ από τον τύπο

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) z^k.)$$

Συμβολίζουμε ζ τη συνάρτηση $\zeta(z) = z$, $(z \in \mathbb{T})$ και ορίζουμε

$$\tilde{U} : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T}) : f \to \zeta f.$$

Άσκηση 3 Δείξτε ότι ο $\tilde{U}$ είναι ισομετρία επί, βρείτε τον $\tilde{U}^*$ και τον $\mathcal{F}\tilde{U}\mathcal{F}^{-1}$.

Άσκηση 4 Δείξτε ότι $\tilde{U}(H^2(\mathbb{T})) \subseteq (H^2(\mathbb{T}))$ αλλά $\tilde{U}^*(H^2(\mathbb{T})) \nsubseteq (H^2(\mathbb{T}))$.

Ορίζουμε τον τελεστή

$$\tilde{S} : H^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T}) : f \to \zeta f$$

δηλαδή $\tilde{S} = \tilde{U}|_{H^2(\mathbb{T})}$.

Άσκηση 5 Δείξτε ότι ο $\tilde{S}$ είναι ισομετρία, βρείτε τον $\tilde{S}^*$ και τον $\mathcal{F}\tilde{S}\mathcal{F}^{-1}$. Είναι ο $\tilde{S}$ επί;

Άσκηση 6 Αν $E \subseteq [0, 1]$ είναι σύνολο Borel, θέτουμε

$$\mathcal{M}_E = \{f \in L^2(\mathbb{T}) : f(z) = 0 \text{ σχεδόν για κάθε } z \in E^c\}.$$

Δείξτε ότι ο $\mathcal{M}_E$ είναι κλειστός υπόχωρος του $L^2(\mathbb{T})$ και ότι ανάγει τον $\tilde{U}$.

Θεώρημα 0.1 (Wiener) *Κάθε κλειστός υπόχωρος του $L^2(\mathbb{T})$ που ανάγει τον $\tilde{U}$ είναι της μορφής $\mathcal{M}_E$, όπου $E \subseteq [0, 1]$ είναι σύνολο Borel.*

Αν $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ και $|\phi(z)| = 1$ σχεδόν παντού (π.χ. $\phi(z) = z^m$), θέτουμε

$$\mathcal{N}_\phi = \phi L^2(\mathbb{T}) = \{\phi f : f \in L^2(\mathbb{T})\}.$$

Άσκηση 7 Ο $\mathcal{N}_\phi$ είναι κλειστός υπόχωρος του $L^2(\mathbb{T})$, και είναι $\tilde{U}$ αναλλοίωτος αλλά όχι ανάγων.

Θεώρημα 0.2 *Κάθε κλειστός υπόχωρος του $L^2(\mathbb{T})$ που είναι $\tilde{U}$-αναλλοίωτος αλλά δεν ανάγει τον $\tilde{U}$ είναι της μορφής αυτής.*

Ορίζουμε

$$H^\infty(\mathbb{T})) = \{f \in L^\infty(\mathbb{T}) : \hat{f}(-k) = 0 \text{ για } k = 1, 2, \ldots\} = H^2(\mathbb{T}) \cap L^\infty(\mathbb{T}).$$

[Παρατήρησε ότι αν $f \in H^\infty(\mathbb{T})$ τότε η αντίστοιχη συνάρτηση $F : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη και φραγμένη στον $\mathbb{D}$.]

Μία $\phi \in H^\infty(\mathbb{T})$ λέγεται *εσωτερική* αν $|\phi(z)| = 1$ σχεδόν παντού.

Άσκηση 8 Αν ϕ είναι εσωτερική, ο

$$\mathcal{K}_\phi = \phi H^2(\mathbb{T}) = \{\phi f : f \in H^2(\mathbb{T})\}.$$

είναι κλειστός υπόχωρος του $H^2(\mathbb{T})$ και είναι $\tilde{S}$ αναλλοίωτος.

Θεώρημα 0.3 (Beurling) *Κάθε κλειστός υπόχωρος του $H^2(\mathbb{T})$ που είναι $\tilde{S}$-αναλλοίωτος είναι της μορφής $\mathcal{K}_\phi$ όπου ϕ εσωτερική, μοναδική modulo σταθερές.*