Θεωρία Τελεστών
Μια Άσκηση
22 Ιουλίου 2006

Αν $\mathcal{M}$ είναι άλγεβρα von Neumann, τότε ο χώρος $(\mathcal{M}, \|\cdot\|)$ είναι ή μη διαχωρίσιμος ή πεπερασμένης διάστασης.

Θα δείξουμε ότι αν η $\mathcal{M}$ περιέχει *άπειρο πλήθος* κάθετων ανά δύο μη μηδενικών προβολών, τότε ο χώρος $(\mathcal{M}, \|\cdot\|)$ είναι μη διαχωρίσιμος, ενώ αν αντίθετα ο μέγιστος αριθμός κάθετων ανά δύο μη μηδενικών προβολών της $\mathcal{M}$ είναι $n < \infty$, τότε $\dim \mathcal{M} \leq n^2$.

Έστω $\{E_i : i \in I\}$ σύνολο κάθετων ανά δύο μη μηδενικών προβολών της $\mathcal{M}$. Για κάθε υποσύνολο J του I θέτουμε $F_J = \vee_{j \in J} E_j$. Η F_J είναι προβολή και ανήκει στην $\mathcal{M}$. Παρατήρησε ότι αν τα J, K είναι διαφορετικά, τότε[1] $\|F_J - F_K\| \geq 1$. Πράγματι, αν επιλέξω $i \in J \triangle K$ και $x \neq 0$ στην εικόνα της προβολής E_i, τότε $\|(F_J - F_K)x\| = \|x\|$. Άρα $\|F_j - F_k\| \geq 1$.

Έπεται ότι αν

$$\mathcal{U}_J = \{T \in \mathcal{M} : \|T - F_J\| < \frac{1}{2}\}$$

τότε η $\{\mathcal{U}_J : J \subseteq I\}$ είναι μια οικογένεια ξένων ανά δύο ανοικτών συνόλων. Αν το I είναι άπειρο, τότε η οικογένεια αυτή είναι υπεραριθμήσιμη, άρα ο $(\mathcal{M}, \|\cdot\|)$ δεν μπορεί να είναι διαχωρίσιμος.[2]

Υποθέτουμε τώρα ότι ο μέγιστος αριθμός κάθετων ανά δύο προβολών της $\mathcal{M}$ είναι $n < \infty$ και θα δείξουμε ότι $\dim \mathcal{M} \leq n^2$. Επιλέγουμε ένα σύνολο $\{E_1, \dots E_n\}$ κάθετων ανά δύο μη μηδενικών προβολών. Τότε $\sum_{i=1}^n E_i = I$ γιατί αν $\sum_{i=1}^n E_i \equiv E < I$ τότε το σύνολο $\{E_1, \dots, E_n, E^\perp\}$ είναι ένα σύνολο $n+1$ κάθετων ανά δύο μη μηδενικών προβολών της $\mathcal{M}$, σε αντίθεση με την υπόθεση για την μεγιστικότητα του n.

Για κάθε $T \in \mathcal{M}$, εφόσον $\sum_{i=1}^n E_i = I$ έχουμε

$$T = \sum_{i}^{n} E_i T = \sum_{i,j=1}^{n} E_i T E_j \in [\mathcal{M}_{ij} : i, j = 1, \dots, n]$$

όπου

$$\mathcal{M}_{ij} = E_i \mathcal{M} E_j.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\dim \mathcal{M}_{ij} \leq 1$ για κάθε i και j.

Παρατήρησε ότι κάθε E_i είναι *άτομο*, δηλαδή αν $F \in \mathcal{M}$ είναι προβολή και $F \leq E_i$, τότε ή $F = 0$ ή $F = E_i$: πράγματι αν $0 < F < E_i$ τότε αντικαθιστώντας την E_i με τις F και $E_i - F$ θα είχαμε ένα σύνολο $n+1$ κάθετων ανά δύο μη μηδενικών προβολών της $\mathcal{M}$, άτοπο.

Έπεται ότι η $\mathcal{M}_{ii}$ περιέχει μόνο μία μη μηδενική προβολή, την E_i. Εφόσον η $\mathcal{M}_{ii}$ είναι άλγεβρα von Neumann (γιατί;) και άρα παράγεται από τις προβολές της, θα πρέπει να είναι μονοδιάστατη.

Εξετάζουμε τώρα το $\mathcal{M}_{ij}$ για $i \neq j$. Για κάθε $T \in \mathcal{M}_{ij}$, έχουμε

$$T^*T \in E_j \mathcal{M} E_i \mathcal{M} E_j \subseteq \mathcal{M}_{jj} = \mathbb{C} E_j$$

[1] Στην πραγματικότητα ισχύει ισότητα, αλλά αυτό δεν θα μας χρειασθεί.

[2] Η απόδειξη αυτή δείχνει ότι αν I είναι άπειρο σύνολο, τότε ο $\ell^\infty(I)$ δεν είναι διαχωρίσιμος. Είναι βέβαια προφανές ότι όταν το I είναι πεπερασμένο, τότε ο $\ell^\infty(I)$ έχει πεπερασμένη διάσταση.

άρα ο T^*T είναι πολλαπλάσιο της E_j και επειδή $T^*T \geq 0$, έχουμε $T^*T = a^2 E_j$ για κάποιο $a \geq 0$. Μάλιστα $\|T\|^2 = \|T^*T\| = a^2$ άρα τελικά

$$T^*T = \|T\|^2 E_j.$$

(Όμοια βρίσκουμε ότι $TT^* = \|T\|^2 E_i$.) Ισχυρίζομαι τώρα ότι ο TT^*T είναι πολλαπλάσιο του T. Πράγματι, έχουμε $T = TE_j$ και άρα

$$T\|T\|^2 = TE_j\|T\|^2 = T(T^*T).$$

Τέλος αποδεικνύουμε ότι κάθε δύο $T, S \in \mathcal{M}_{ij}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Από την τελευταία παρατήρηση, αρκεί να δείξουμε ότι το TT^*T είναι πολλαπλάσιο του SS^*S και βέβαια μπορούμε να υποθέσουμε ότι και τα δύο είναι μη μηδενικά. Και πράγματι: αφού τα TT^* και SS^* ανήκουν και τα δύο στην $\mathcal{M}_{ii}$, είναι γραμμικά εξαρτημένα· επίσης αφού τα S^*T και S^*S ανήκουν και τα δύο στην $\mathcal{M}_{jj}$, είναι γραμμικά εξαρτημένα. Συνεπώς έχουμε

$$TT^*T = (TT^*)T = a(SS^*)T = aS(S^*T) = acS(S^*S) = acSS^*S$$

για κατάλληλα $a, c \in \mathbb{C}$. Δείξαμε ότι $\dim \mathcal{M}_{ij} \leq 1$ για κάθε i, j και η απόδειξη είναι πλήρης.

Σημείωση Ο $\mathcal{M}_{ij}$ είναι μη μηδενικός αν και μόνον αν υπάρχει μια μερική ισομετρία E_{ij} με αρχική προβολή E_j και τελική προβολή E_i.

Πράγματι: Αν υπάρχει τέτοια μερική ισομετρία E_{ij} τότε $E_{ij}E_j = E_{ij}$ και $E_i E_{ij} = E_{ij}$ άρα $E_i E_{ij} E_j = E_{ij} \in \mathcal{M}_{ij}$. Αντίστροφα αν υπάρχει $T \in \mathcal{M}_{ij}$ με $\|T\| = 1$, οι σχέσεις $T^*T = \|T\|^2 E_j = E_j$ και $TT^* = \|T\|^2 E_i = E_i$ δείχνουν ότι ο T είναι μερική ισομετρία με αρχική προβολή E_j και τελική προβολή E_i.

Τα μη μηδενικά E_{ij} είναι γραμμικά ανεξάρτητα διότι $E_k E_{ij} E_m \neq 0$ αν και μόνον αν $k = i$ και $j = m$ οπότε η σχέση $\sum_{ij} c_{ij} E_{ij} = 0$ (όπου $c_{ij} \in \mathbb{C}$) δίνει

$$0 = E_k \left(\sum_{ij} c_{ij} E_{ij} \right) E_m = c_{km} E_k E_{km} E_m$$

άρα $c_{km} = 0$.

Τελικά $\mathcal{M}_{ij} = \mathbb{C} E_{ij}$, άρα κάθε $T \in \mathcal{M}$ γράφεται μοναδικά

$$T = \sum_{(i,j) \in A} t_{ij} E_{ij}$$

(όπου A το σύνολο των (i, j) για τα οποία $E_{ij} \neq 0$) και $t_{ij} \in \mathbb{C}$. Δηλαδή κάθε $T \in \mathcal{M}$ αντιστοιχεί με έναν $n \times n$ πίνακα που έχει μηδενικά στις θέσεις $(i, j) \notin A$. Η απεικόνιση $T \mapsto [t_{ij}]$ είναι *-ισομορφισμός από την $\mathcal{M}$ σε μία *-υπάλγεβρα της άλγεβρας $M_n(\mathbb{C})$ των $n \times n$ πινάκων. Ο E_{ij} ονομάζεται “matrix unit” και αντιστοιχεί με τον πίνακα που έχει μονάδα στην θέση (j, i) και μηδέν παντού αλλού.