Θεωρία Τελεστών
Ασκήσεις 1 - Υποδείξεις

Άσκηση 1 *Έστω $a = (a_n)$ ακολουθία αριθμών. Για κάθε $x = (x_n) \in \ell^2$, θέτουμε $D_a(x) = (a_n x_n)$. Δείξτε ότι $D_a(\ell^2) \subseteq (\ell^2)$ αν και μόνον αν $a \in \ell^\infty$.*

Αν $a \in \ell^\infty$ τότε για κάθε $x \in \ell^2$ έχουμε

$$\sum |a_n x_n|^2 \le \sup_n |a_n|^2 \sum |x_n|^2 < \infty$$

άρα $D_a(x) \in \ell^1$.

Αν $a \notin \ell^\infty$ τότε υπάρχει υπακολουθία $M = \{m_n\} \subseteq \mathbb{N}$ ώστε $|a_{m_n}| \ge n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε λοιπόν

$$x_m = \begin{cases} \frac{1}{n}, & m = m_n \in M \\ 0, & m \notin M \end{cases}$$

Έχουμε $\sum_n |x_n|^2 \le \sum_n \frac{1}{n^2} < \infty$ άρα $x = (x_n) \in \ell^2$, ενώ $\sum_n |a_n x_n|^2 = \sum_{m \in M} 1 = +\infty$, άρα $D_a(x) \notin \ell^2$.

Άσκηση 2 *Δείξτε ότι ένας $\infty \times \infty$ πίνακας (a_{ij}) ορίζει φραγμένο τελεστή $\ell^2 \to \ell^2$ αν και μόνον αν απεικονίζει τον ℓ^2 στον εαυτό του, δηλαδή αν $x = (x_n) \in \ell^2$ τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η σειρά $\sum_k a_{nk} x_k$ συγκλίνει και $(\sum_k a_{nk} x_k)_n \in \ell^2$. [Υπόδειξη: Αρχή Ομοιομόρφου φράγματος.]*

Η μία κατεύθυνση είναι απλώς θέμα ορισμών:

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει φραγμένος τελεστής $A \in B(\ell^2)$ με πίνακα (a_{ij}), δηλαδή $\langle Ae_j, e_i \rangle = a_{ij}$, όπου $\{e_n\}$ η συνηθισμένη ορθοκανονική βάση. Τότε, για κάθε $x = \sum_n x_n e_n \in \ell^2$ έχουμε $Ax = \sum_k x_k A e_k$ άρα $\langle Ax, e_n \rangle = \sum_k x_k \langle Ae_k, e_n \rangle$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε η σειρά $\sum_k a_{nk} x_k$ συγκλίνει στο $\langle Ax, e_n \rangle$ και $Ax = \sum_n \langle Ax, e_n \rangle e_n$, οπότε $(\sum_k a_{nk} x_k)_n = (\langle Ax, e_n \rangle)_n \in \ell^2$.

Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι δύο συνθήκες της υπόθεσης. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $x = (x_n) \in \ell^2$ ορίζεται ένα $y(x) = (\sum_k a_{nk} x_k)_n \in \ell^2$ οπότε ορίζεται (παντού στον ℓ^2) μια απεικόνιση

$$A : \ell^2 \to \ell^2 : \ x \mapsto y(x) = \sum_n \left(\sum_k a_{nk} x_k \right) e_n$$

η οποία είναι προφανώς γραμμική, και το ζήτημα είναι να δείξουμε ότι είναι φραγμένη.

Απόδειξη Ορίζουμε την ακολουθία απεικονίσεων (A_m) ως εξής:

$$x \mapsto A_m(x) = \sum_{n=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \right) e_n$$

(δηλαδή ο A_m έχει πίνακα (a_{ij}^m) όπου $a_{ij}^m = a_{ij}$ όταν $i \le m$ και $a_{ij}^m = 0$ αλλιώς). Παρατηρούμε τώρα ότι, για κάθε $x = (x_n) \in \ell^2$,

$$Ax - A_m x = \sum_{n=m+1}^{\infty} \langle Ax, e_n \rangle e_n = \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \right) e_n$$

άρα

$$\|Ax - A_m x\|^2 = \sum_{n=m+1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \right|^2 = \sum_{n=m+1}^{\infty} | \langle Ax, e_n \rangle |^2.$$

Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} | \langle Ax, e_n \rangle |^2 = \|Ax\|^2 < +\infty$ (γιατί το Ax ανήκει στον ℓ^2), έπεται ότι $\lim_m \sum_{n=m+1}^{\infty} | \langle Ax, e_n \rangle |^2 = 0$.

Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία (A_m) συγκλίνει *κατά σημείο* στον A. Για να χρησιμοποιήσουμε την Αρχή Ομοιομόρφου Φράγματος (ακριβέστερα, το πόρισμά της Θεώρημα Banach-Steinhaus) και να συμπεράνουμε ότι ο A είναι φραγμένος (επειδή ο ℓ^2 είναι *πλήρης*), πρέπει να αποδείξουμε ότι κάθε A_m είναι φραγμένος τελεστής!

Αυτό μπορεί να αποδειχθεί ως εξής: Έχουμε

$$\begin{aligned}\|A_m(x)\|^2 &= \sum_{n=1}^{m} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \right|^2 \le \sum_{n=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k \right)^2 \\ &= \sum_{n=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^2 \right) \|x\|^2\end{aligned}$$

επομένως αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^2 < +\infty$. Πράγματι, σταθεροποιούμε το $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $N \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την συνεχή γραμμική γραμμική μορφή $f_N : \ell^2 \to \mathbb{C}$ με

$$f_N(x) = \sum_{k=1}^{N} a_{nk} x_k = \langle x, a_N \rangle \qquad (x = (x_k) \in \ell^2)$$

όπου $a_N = (\bar{a}_{n1}, \bar{a}_{n2}, \dots, \bar{a}_{nN}, 0, \dots)$.

Προφανώς $\|f_N\| = \left(\sum_{k=1}^{N} |a_{nk}|^2 \right)^{1/2}$. Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι *για κάθε* $x \in \ell^2$ η ακολουθία $(f_N(x))$ συγκλίνει, άρα είναι φραγμένη. Δηλαδή η ακολουθία (f_N) των συνεχών γραμμικών μορφών είναι κατά σημείο φραγμένη. Από την Αρχή Ομοιομόρφου Φράγματος προκύπτει ότι είναι ομοιόμορφα φραγμένη, δηλαδή ότι $\sup_N \|f_N\| < +\infty$, δηλαδή $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^2 < +\infty$.

Η απόδειξη συμπληρώθηκε.

Παρατήρηση Αν αντί για την ακολουθία (A_m) θεωρούσαμε την ακολουθία (B_m) όπου ο B_m έχει πίνακα (b_{ij}^m) με $b_{ij}^m = a_{ij}$ όταν $i, j \le m$ και $b_{ij}^m = 0$ αλλιώς, δηλαδή θεωρούσαμε το άνω $m \times m$ κομμάτι του πίνακα (a_{ij}) αντί για τις πρώτες m γραμμές του, τότε δεν θα είχαμε καμμιά δυσκολία να δείξουμε ότι ο κάθε B_m είναι φραγμένος τελεστής (αφού δρα ουσιαστικά στον χώρο πεπερασμένης διάστασης $[e_1, \dots, e_m]$). Όμως πώς θα αποδεικνύαμε ότι $B_m \to A$ κατά σημείο;

Ο αντίστοιχος υπολογισμός δίνει

$$\|Ax - B_m x\|^2 = \sum_{n=m+1}^{\infty} \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} a_{nk} x_k \right|^2.$$

Δεν είναι φανερό πώς να συγκρίνει κανείς τις ακολουθίες $\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} a_{nk} x_k \right)_n$ με την $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \right)_n$ ώστε να χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι η τελευταία είναι τετραγωνικά αθροίσιμη.

Δεύτερος τρόπος Δείχνουμε πρώτα (όπως πριν) ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$M_n^2 \equiv \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^2 < +\infty.$$

Έχουμε τώρα, για κάθε $x \in \ell^2$ και $n \in \mathbb{N}$,

$$|\langle Ax, e_n \rangle|^2 = \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \right|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = M_n^2 \|x\|^2 . \qquad (1)$$

Θα δείξουμε τώρα ότι η γραμμική απεικόνιση A έχει *κλειστό γράφημα*, οπότε, πάλι λόγω πληρότητας του ℓ^2, από το Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος θα είναι φραγμένη.

Πράγματι, έστω (x^i) ακολουθία στοιχείων του ℓ^2 με $\lim_i \|x^i\| = 0$. Υποθέτουμε ότι η ακολουθία $(y^i) = (Ax^i)$ συγκλίνει, έστω στο $y \in \ell^2$ και θα δείξουμε ότι $y = 0$ (γιατί αρκεί αυτό;). Έχουμε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$|\langle y, e_n \rangle| = \lim_i |\langle y^i, e_n \rangle| = \lim_i \langle Ax^i, e_n \rangle| \overset{(1)}{\leq} M_n \lim_i \|x^i\| = 0$$

δηλαδή $|\langle y, e_n \rangle| = 0$ για κάθε n άρα $y = 0$ και η απόδειξη είναι πλήρης.