Θεωρία Τελεστών
Ασκήσεις 3
28 Απριλίου 2007

Άσκηση 1 Αν $U \in B(H)$ unitary τότε $U(E) \subseteq E$ αν και μόνον αν $E = E_1 \oplus E_2$ όπου $U(E_1) = E_1$ και $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U^n(E_2) = \{0\}$.

Υπενθύμιση: Ο χώρος $L^2(\mathbb{T})$ (όπου $\mathbb{T} = \{e^{ix} : x \in (-\pi, \pi]\}$ η μοναδιαία περιφέρεια) είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{ix})\overline{g(e^{ix})}dx.$$

Ορίζουμε

$$H^2(\mathbb{T}) = \{f \in L^2(\mathbb{T}) : \hat{f}(-k) = 0 \text{ για } k = 1, 2, \dots\}$$

όπου

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{ix})e^{-ikx}dx \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Άσκηση 2 Αν $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$ με $|\phi| = 1$ σ.π. και $\Omega \subseteq \mathbb{T}$ είναι σύνολο Borel θετικού μέτρου (Lebesgue) έχουμε δείξει ότι

$$(\phi H^2(\mathbb{T})) \cap E(\Omega) = \{0\}.$$

Δείξτε ότι

$$(\phi H^2(\mathbb{T})) \vee E(\Omega) = L^2(\mathbb{T})$$

(εδώ αν E_1, E_2 είναι υπόχωροι, $E_1 \vee E_2$ είναι η κλειστή θήκη του $E_1 + E_2$, δηλ. ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος που περιέχει τους E_1 και E_2).

Άσκηση 3 Αν $T \in B(H)$ αντιστρέψιμος τότε $\sigma(T^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}$.

Άσκηση 4 Αν $T \in B(H)$ ισομετρία δείξτε ότι $\sigma(T) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$ και ότι $\sigma_a(T) \subseteq \partial\mathbb{D}$.

Άσκηση 5 Αν $x_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$ όπου $|\lambda| < 1$, δείξτε ότι για κάθε $r \in (0, 1)$ η οικογένεια $\{x_\lambda : |\lambda| \leq r\}$ παράγει τον $\ell^2(\mathbb{N})$.