Μέτρα και αναπαραστάσεις

Θεώρημα 1 *Κάθε*[1] **-αναπαράσταση π της $C(K)$ σ' έναν χώρο Hilbert H ορίζει ένα μοναδικό κανονικό φασματικό μέτρο $E(\cdot)$ ορισμένο στα Borel υποσύνολα του K ώστε*

$$\int_K f dE = \pi(f) \qquad (f \in C(K)).$$

Η απόδειξη στηρίζεται σε δύο θεμελιώδη θεωρήματα, που ονομάζονται και τα δύο «Θεωρήματα Αναπαράστασης του Riesz»:

Θεώρημα 2 *Για κάθε θετική*[2] *γραμμική μορφή $\phi : C(K) \longrightarrow \mathbb{C}$ υπάρχει μοναδικό κανονικό θετικό μέτρο Borel μ στο K ώστε*

$$\int_K f d\mu = \phi(f) \qquad (f \in C(K)).$$

Θεώρημα 3 *Για κάθε φραγμένη sesquilinear μορφή $\psi : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ υπάρχει μοναδικός $T \in \mathcal{B}(H)$ ώστε*

$$\psi(x, y) = \langle Tx, y \rangle \quad (x, y \in H)$$

και $\|T\| = \sup\{|\psi(x, y)| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}$.

Θα χρειασθεί ένα Λήμμα:

Λήμμα 4 *Αν M είναι μια πεπερασμένη οικογένεια από κανονικά θετικά μέτρα Borel στο K, τότε για κάθε $\Omega \subseteq K$ Borel υπάρχει ακολουθία (f_n) συνεχών συναρτήσεων με $0 \leq f_n \leq 1$ ώστε*

$$\mu(\Omega) = \lim_n \int f_n d\mu \quad \text{για κάθε } \mu \in M.$$

Απόδειξη Αν $\mu \in M$, λόγω κανονικότητας για κάθε $n \in \mathbb{N}$ βρίσκω συμπαγές K_n^μ και ανοικτό U_n^μ με $K_n^\mu \subseteq \Omega \subseteq U_n^\mu$ ώστε

$$\mu(U_n^\mu) - \mu(K_n^\mu) < \frac{1}{n}.$$

Θέτοντας τώρα

$$K_n = \bigcup_{\mu \in M} K_n^\mu \quad \text{και} \quad U_n = \bigcap_{\mu \in M} U_n^\mu,$$

εφόσον η M είναι πεπερασμένη το K_n είναι συμπαγές, το U_n ανοικτό, $K_n \subseteq \Omega \subseteq U_n$ και

$$\mu(U_n) - \mu(K_n) = \mu(U_n \setminus K_n) \leq \mu(U_n^\mu \setminus K_n^\mu) < \frac{1}{n}$$

για κάθε $\mu \in M$.

[1] newfasm, 02/06/07

[2] δηλ. $f \geq 0 \Rightarrow \phi(f) \geq 0$.

Κατόπιν από το Λήμμα Urysohn βρίσκω $f_n \in C(K)$ με $0 \le f_n \le 1$ ώστε $f_n|_{K_n} = 1$ και $f_n|_{U_n^c} = 0$. Τότε,

$$\mu(K_n) \le \int f_n d\mu \le \mu(U_n)$$

για καθε $\mu \in M$, οπότε

$$\left| \int f_n d\mu - \mu(\Omega) \right| \le |\mu(U_n) - \mu(K_n)| < \frac{1}{n} \quad \text{για κάθε } \ \mu \in M. \qquad \square^3$$

Σημείωση Η μοναδικότητα στο Θεώρημα 2 έπεται και από το Λήμμα: Αν μ, ν είναι δύο *κανονικά* θετικά μέτρα Borel και $\int f d\mu = \int f d\nu$ για κάθε $f \in C(K)$ με $0 \le f \le 1$, τότε $\mu = \nu$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 1

Μοναδικότητα Αν δύο *κανονικά* φασματικά μέτρα Borel $E(\cdot)$ και $F(\cdot)$ ικανοποιούν

$$\int_K f dE = \pi(f) = \int_K f dF$$

για κάθε $f \in C(K)$, τότε θέτοντας $\mu_x(\Omega) = \langle E(\Omega)x, x\rangle$ και $\nu_x(\Omega) = \langle F(\Omega)x, x\rangle$, έχουμε

$$\int_K f d\mu_x = \int_K f d\nu_x$$

για κάθε $f \in C(K)$. Επειδή τα δύο μέτρα είναι κανονικά, συμπεραίνουμε ότι κατ' ανάγκη θα ταυτίζονται: $\mu_x(\Omega) = \nu_x(\Omega)$, δηλαδή $\langle E(\Omega)x, x\rangle = \langle F(\Omega)x, x\rangle$ για κάθε Borel $\Omega \subseteq K$. Αφού η ισότητα αυτή ισχύει για κάθε $x \in H$, συμπεραίνουμε ότι $E(\Omega) = F(\Omega)$.

Ύπαρξη (i) Αν σταθεροποιήσουμε ένα $x \in H$, η απεικόνιση

$$C(K) \longrightarrow \mathbb{C} : \ f \longrightarrow \langle \pi(f)x, x\rangle$$

είναι γραμμική μορφή, και είναι θετική, διότι αν $f \ge 0$, τότε $f = g^* g$ όπου $g = \sqrt{f}$, οπότε

$$\langle \pi(f)x, x\rangle = \langle \pi(g)^* \pi(g)x, x\rangle = \|\pi(g)x\|^2 \ge 0.$$

Από το Θεώρημα 2, υπάρχει **μοναδικό** κανονικό θετικό μέτρο Borel μ_x στο K ώστε

$$\int_K f d\mu_x = \langle \pi(f)x, x\rangle \qquad \text{για κάθε } f \in C(K). \tag{1}$$

Θα δείξω ότι υπάρχει ένα φασματικό μέτρο $E(\cdot)$ που «γεννάει» όλα τα μ_x με την έννοια ότι

$$\mu_x(\Omega) = \langle E(\Omega)x, x\rangle \qquad \text{για κάθε } x \in H \text{ και } \Omega \text{ Borel.}$$

Τότε, αν $f \in C(K)$, από τον ορισμό του $\int f dE$ θα έχω

$$\left\langle \left(\int f g E \right) x, x \right\rangle = \int f d\mu_x$$

[3] Άλλη Απόδειξη: Θέτω $\mu_o = \sum_{\mu \in M} \mu$ (πεπερασμένο άθροισμα). Άσκηση: Το μ_o είναι κανονικό. Άρα από Lusin για κάθε h Borel φραγμένη και κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $f_n \in C(K)$ με $\|f_n\|_\infty \le \|h\|_\infty$ και $\mu_o[f_n \neq h] < \frac{1}{n}$ οπότε και $\mu[f_n \neq h] < \frac{1}{n}$ για κάθε $\mu \in M$. Εφάρμοσέ το τώρα στην $h = \chi_\Omega$.

για κάθε $x \in H$ οπότε

$$\int f dE = \pi(f)$$

λόγω της (1).

(ii) Σταθεροποιούμε τώρα ένα Borel υποσύνολο $\Omega \subseteq K$ και θεωρούμε την απεικόνιση

$$p = p_\Omega : H \longrightarrow \mathbb{R}_+ : \; x \longrightarrow \sqrt{\mu_x(\Omega)}.$$

Ισχυρισμός Η p_Ω είναι συνεχής ημινόρμα και ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

Απόδειξη Από το Λήμμα 4, για κάθε Borel υποσύνολο $\Omega \subseteq K$ και για κάθε *πεπερασμένη* οικογένεια $S \subseteq H$ υπάρχει ακολουθία (f_n) συνεχών συναρτήσεων με $0 \leq f_n \leq 1$ ώστε

$$\mu_x(\Omega) = \lim_n \int f_n d\mu_x \quad \text{για κάθε } \; x \in S$$

άρα

$$p_\Omega(x)^2 = \lim_n \int f_n d\mu_x = \lim_n \langle \pi(f_n)x, x \rangle \quad \text{για κάθε } \; x \in S. \tag{2}$$

Παρατήρησε ότι για κάθε n η απεικόνιση

$$q_n : H \longrightarrow \mathbb{R}_+ : \; x \longrightarrow \sqrt{\langle \pi(f_n)x, x \rangle}$$

έχει τις ιδιότητες:

$$\begin{aligned}
&q_n(x+y) \leq q_n(x) + q_n(y), \quad q_n(\lambda x) = |\lambda| q_n(x) \\
&q_n(x) \leq \|x\| \\
&q_n(x+y)^2 + q_n(x-y)^2 = 2q_n(x)^2 + 2q_n(y)^2
\end{aligned}$$

Πράγματι, αν $g_n = \sqrt{f_n}$ τότε

$$q_n(x)^2 = \langle \pi(g_n)^* \pi(g_n)x, x \rangle = \|\pi(g_n)x\|^2 .$$

Εφαρμόζοντας λοιπόν την (2) στην οικογένεια $S = \{x, y, x+y, x-y, \lambda x\}$ από τις σχέσεις αυτές προκύπτουν οι

$$\begin{aligned}
&p_\Omega(x+y) \leq p_\Omega(x) + p_\Omega(y), \quad p_\Omega(\lambda x) = |\lambda| p_\Omega(x) \\
&p_\Omega(x) \leq \|x\| \\
&p_\Omega(x+y)^2 + p_\Omega(x-y)^2 = 2p_\Omega(x)^2 + 2p_\Omega(y)^2.
\end{aligned}$$

Δείξαμε λοιπόν ότι η p_Ω είναι φραγμένη ημινόρμα και ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου. $\square$

Όπως είναι γνωστό (!!) κάθε τέτοια ημινόρμα προέρχεται από μια sesquilinear και φραγμένη μορφή

$$\phi_\Omega : H \times H \to \mathbb{C}$$

που ορίζεται από την σχέση

$$\phi_\Omega(x, y) = \frac{1}{4}\left(p_\Omega(x+y)^2 - p_\Omega(x-y)^2\right) + \frac{i}{4}\left(p_\Omega(x+iy)^2 - p_\Omega(x-iy)^2\right) . \tag{3}$$

Από το Θεώρημα 3, υπάρχει **μοναδικός** τελεστής $E(\Omega) \in \mathcal{B}(H)$ ώστε

$$\langle E(\Omega)x, y\rangle = \phi_\Omega(x, y) \qquad \text{για κάθε } x, y \in H. \tag{4}$$

(iii) Πρέπει να δειχθεί ότι το $E(\cdot)$ είναι φασματικό μέτρο. Είναι φανερό από τον ορισμό ότι $E(\emptyset) = 0, E(K) = I$ και, φυσικά, ότι το $\Omega \longrightarrow \langle E(\Omega)x, x\rangle$ είναι σ-προσθετικό μέτρο[4] για κάθε $x \in H$.

Επίσης είναι φανερό από τις σχέσεις

$$0 \leq p_\Omega(x)^2 = \phi_\Omega(x, x) \leq \|x\|^2$$

ότι

$$0 \leq \langle E(\Omega)x, x\rangle \leq \langle x, x\rangle \quad \text{για κάθε } \; x \in H$$

οπότε

$$0 \leq E(\Omega) \leq I$$

και ειδικότερα

$$E(\Omega)^* = E(\Omega).$$

Μένει να αποδειχθεί ο

Ισχυρισμός $E(\Omega_1 \cap \Omega_2) = E(\Omega_1)E(\Omega_2)$ για κάθε ζεύγος Borel υποσυνόλων Ω_1, Ω_2 του K.

Απόδειξη Θα προκύψει από την πολλαπλασιαστικότητα της π: $\pi(fg) = \pi(f)\pi(g)$.

Ας υιοθετήσουμε τον ακόλουθο συμβολισμό: Αν $x, y \in H$, για κάθε Borel φραγμένη $h : K \to \mathbb{C}$ γράφουμε

$$\int h d\nu_{x,y} \equiv \frac{1}{4}\int h d\mu_{x+y} - \frac{1}{4}\int h d\mu_{x-y} + \frac{i}{4}\int h d\mu_{x+iy} - \frac{i}{4}\int h d\mu_{x-iy}$$

οπότε αν $f \in C(K)$ έχουμε

$$\int f d\nu_{x,y} = \langle \pi(f)x, y\rangle\,. \tag{5}$$

Παρατήρησε ότι με το συμβολισμό αυτό έχουμε

$$\int \chi_\Omega d\nu_{x,y} = \langle E(\Omega)x, y\rangle \quad \text{για κάθε Borel } \; \Omega \subseteq K. \tag{6}$$

Για κάθε $f, g \in C(K)$ με $0 \leq f, g \leq 1$ έχουμε

$$\langle \pi(fg)x, y\rangle = \langle \pi(f)\pi(g)x, y\rangle = \langle \pi(f)(\pi(g)x), y\rangle$$

και συνεπώς, χρησιμοποιώντας την (5) για τα διανύσματα $z = \pi(g)x$ και y,

$$\int fg d\nu_{x,y} = \langle \pi(fg)x, y\rangle = \langle \pi(f)(\pi(g)x), y\rangle = \int f d\nu_{z,y}\,. \tag{7}$$

Το πραγματικό μέρος της ισότητας αυτής δίνει

$$\int fg d\mu_{x+y} - \int fg d\mu_{x-y} = \int f d\mu_{z+y} - \int f d\mu_{z-y}$$

[4] γιατί $\langle E(\Omega)x, x\rangle = \phi_\Omega(x, x) = p_\Omega(x)^2 = \mu_x(\Omega)$.

ισοδύναμα

$$\int fgd\mu_{x+y} + \int fd\mu_{z-y} = \int fgd\mu_{x-y} + \int fd\mu_{z+y}.$$

Αφού η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $f \in C(K)$ με $0 \leq f \leq 1$, και τα μέτρα $gd\mu_{x+y} + d\mu_{z-y}$ και $gd\mu_{x-y} + d\mu_{z+y}$ είναι θετικά κανονικά μέτρα Borel, τα δύο αυτά μέτρα θα ταυτίζονται[5], οπότε η σχέση θα ισχύει και όταν η f είναι Borel, άρα και για $f = \chi_{\Omega_1}$, δηλαδή

$$\int \chi_{\Omega_1} gd\mu_{x+y} + \int \chi_{\Omega_1} d\mu_{z-y} = \int \chi_{\Omega_1} gd\mu_{x-y} + \int \chi_{\Omega_1} d\mu_{z+y}$$

ισοδύναμα

$$\int \chi_{\Omega_1} gd\mu_{x+y} - \int \chi_{\Omega_1} gd\mu_{x-y} = \int \chi_{\Omega_1} d\mu_{z+y} - \int \chi_{\Omega_1} d\mu_{z-y}.$$

Με τον ίδιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι και το φανταστικό μέρος της (7) ισχύει και για $f = \chi_{\Omega_1}$ οπότε τελικά

$$\int \chi_{\Omega_1} gd\nu_{x,y} = \int \chi_{\Omega_1} d\nu_{\pi(g)x,y} \tag{8}$$

για κάθε Borel $\Omega_1 \subseteq K$. Από την (6), έχουμε

$$\int \chi_{\Omega_1} d\nu_{\pi(g)x,y} = \langle E(\Omega_1)\pi(g)x, y\rangle = \langle \pi(g)x, E(\Omega_1)^* y\rangle$$

και από την (5)

$$\langle \pi(g)x, E(\Omega_1)^* y\rangle = \int gd\nu_{x,E(\Omega_1)^* y}$$

οπότε η (8) δίνει

$$\int g\chi_{\Omega_1} d\nu_{x,y} = \int gd\nu_{x,E(\Omega_1)^* y}.$$

Αφού η τελευταία ισότητα ισχύει για κάθε $g \in C(K)$ με $0 \leq g \leq 1$, όπως πριν έπεται ότι θα ισχύει και όταν η g είναι Borel, άρα και για $g = \chi_{\Omega_2}$, δηλαδή

$$\int \chi_{\Omega_2}\chi_{\Omega_1} d\nu_{x,y} = \int \chi_{\Omega_2} d\nu_{x,E(\Omega_1)^* y}$$

για κάθε Borel $\Omega_2 \subseteq K$. Αλλά απο την (6)

$$\int \chi_{\Omega_1}\chi_{\Omega_2} d\nu_{x,y} = \int \chi_{\Omega_1 \cap \Omega_2} d\nu_{x,y} = \langle E(\Omega_1 \cap \Omega_2)x, y\rangle$$

$$\text{και} \quad \int \chi_{\Omega_2} d\nu_{x,E(\Omega_1)^* y} = \langle E(\Omega_2)x, E(\Omega_1)^* y\rangle$$

συνεπώς

$$\langle E(\Omega_1 \cap \Omega_2)x, y\rangle = \langle E(\Omega_2)x, E(\Omega_1)^* y\rangle = \langle E(\Omega_1)E(\Omega_2)x, y\rangle.$$

Αφού αυτή η σχέση ισχύει για κάθε $x, y \in H$, δείξαμε ότι $E(\Omega_1 \cap \Omega_2) = E((\Omega_1)E(\Omega_2)$, πράγμα που ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

[5]Μοναδικότητα στο Θεώρημα 2 ή Λήμμα 4