Θεωρία Τελεστών

Εξετάσεις Ιουνίου 2001

1. Έστω $H = L^2(\mathbb{T})$ (μέτρο Lebesque) και H_o ο κλειστός υπόχωρος που παράγεται από τα πολυώνυμα $(p(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n)$. Αν $U \in \mathcal{B}(H)$ είναι ο τελεστής του πολλαπλασιασμού επί την ανεξάρτητη μεταβλητή $((Uf)(z) = zf(z))$ και $S \in \mathcal{B}(H_o)$ ο τελεστής $S = U|_{H_o}$, να υπολογισθούν τα $\sigma_p, \sigma_{ap}, \sigma_c$ και σ για τους U και S.

2. **(α)** Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ με $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ για κάθε $x \in H$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικός $B \in \mathcal{B}(H)$ με $\langle Bx, x\rangle \geq 0$ για κάθε $x \in H$ ώστε $B^2 = A$.

(β) Να ορισθεί η έννοια 'μερική ισομετρία' καθώς και η 'απόλυτη τιμή' $|T|$ ενός $T \in \mathcal{B}(H)$, και να δειχθεί ότι κάθε $T \in \mathcal{B}(H)$ γράφεται $T = V|T|$, όπου V μερική ισομετρία.

3. **(α)** Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$ φυσιολογικός τελεστής και $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ φραγμένη συνάρτηση Borel. Να ορισθεί ο τελεστής $f(T)$ και και να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση $f \to f(T)$ διατηρεί τις αλγεβρικές πράξεις και την ενέλιξη.

(β) Να αποδειχθεί ότι κάθε ορθομοναδιαίος (unitary) τελεστής U είναι της μορφής $U = \exp(iA)$ για κάποιον αυτοσυζυγή τελεστή A.

4. **(α)** Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα και $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ μια κατάσταση (state). Περιγράψτε πώς κατασκευάζεται η παράσταση GNS $(\pi_\phi, H_\phi, \xi_\phi)$ της $\mathcal{A}$.

(β) Αν $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ είναι norm-κλειστή αυτοσυζυγής υπάλγεβρα που περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή και $\xi \in H$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα κυκλικό για την $\mathcal{A}$, δείξτε ότι η ταυτοτική παράσταση $\mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμη (unitarily equivalent) με την παράσταση GNS που ορίζεται από την κατάσταση $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ όπου $\phi(A) = \langle A\xi, \xi\rangle$.

5. Έστω H χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H)$ αυτοσυζυγής τελεστής που έχει κυκλικό διάνυσμα. Αποδείξτε ότι ο T είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος (unitarily equivalent) με έναν πολλαπλασιαστικό τελεστή σε έναν κατάλληλο χώρο $L^2(X, m)$.

6. Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα, $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ χαρακτήρας και $\psi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ θετική γραμμική μορφή. Να δειχθεί ότι οι ϕ και ψ είναι συνεχείς.

Καλή επιτυχία!