Μία άσκηση από το 2007 (διορθωμένη)

Αν $U \in B(H)$ ισομετρία και E κλειστός υπόχωρος του H τότε $U(E) \subseteq E$ αν και μόνον αν $E = E_1 \oplus E_2$ όπου οι E_i είναι κλειστοί U-αναλλοίωτοι κάθετοι υπόχωροι με $U(E_1) = E_1$ και $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U^n(E_2) = \{0\}$.

Απόδειξη Αν οι E_1 και E_2 είναι κλειστοί U-αναλλοίωτοι κάθετοι υπόχωροι τότε προφανώς ο $E_1 \oplus E_2$ είναι U-αναλλοίωτος. [1]
Αντίστροφα, έστω $U(E) \subseteq E$. Θέτουμε

$$E_1 = \bigcap_{n\geq 0} U^n(E) \qquad \text{και} \qquad E_2 = E \cap E_1^\perp.$$

Ο E_1 είναι κλειστός υπόχωρος, αφού κάθε $F_n := U^n(E)$ είναι κλειστός υπόχωρος (εικόνα ισομετρίας). Επίσης,

$$\begin{aligned} U(E_1) = U\left(\bigcap_{n\geq 0} F_n\right) &= \bigcap_{n\geq 0} U(F_n) \qquad \text{γιατί ο } U \text{ είναι 1-1} \\ &= \bigcap_{n\geq 0} U^{n+1}(E) = \bigcap_{m\geq 0} U^m(E) = E_1 \end{aligned}$$

(αφού κάθε $U^{n+1}(E)$ περιέχεται στον $U^0(E) = E$). Ειδικότερα, ο E_1 είναι U-αναλλοίωτος.

Ισχυρίζομαι ότι ο E_2 είναι U-αναλλοίωτος. Πράγματι, αν $x \in E_2$, τότε $Ux \in E$ αφού $x \in E$ και ο E είναι U-αναλλοίωτος. Επίσης, για κάθε $y \in E_1$, αφού $E_1 = U(E_1)$ υπάρχει $z \in E_1$ ώστε $y = Uz$, οπότε $\langle Ux, y\rangle = \langle Ux, Uz\rangle = \langle x, y\rangle = 0$, άρα $Ux \perp E_1$ και συνεπώς $Ux \in E_2$.

Ισχυρίζομαι ότι $\bigcap_{n\geq 0} U^n(E_2) = \{0\}$. Πράγματι, αν $x \in \bigcap_{n\geq 0} U^n(E_2)$ τότε $x \in \bigcap_{n\geq 0} U^n(E)$ (αφού $E_2 \subseteq E$) δηλαδή $x \in E_1$. Όμως επίσης $x \in E_2$ άρα $x \perp E_1$ και συνεπώς $x = 0$.

Μένει να δειχθεί ότι $E = E_1 \oplus E_2$. Εκ κατασκευής οι E_1 και E_2 είναι κάθετοι υπόχωροι του E, άρα $E_1 \oplus E_2 \subseteq E$. Έστω τώρα $x \in E \cap (E_1 \oplus E_2)^\perp$. Τότε το x είναι κάθετο στον E_2 και στον E_1. Αλλά αφού είναι κάθετο στον E_1 και ανήκει στον E, θα ανήκει στον E_2. Δηλαδή $x \in E_2 \cap E_2^\perp$, άρα $x = 0$.

[1] Η υπόθεση «E_i αναλλοίωτοι» δεν μπορεί να παραλειφθεί, ακόμα κι αν ο U είναι unitary. Για παράδειγμα, αν $U(e_k) = e_{k+1}$ στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ και θέσουμε $E_1 = \{0\}$ και $E_2 = [e_0]$ τότε βεβαίως $U(E_1) = E_1$ και $\bigcap_{n\geq 0} U^n(E_2) = \{0\}$ (αφού ήδη $E_2 \cap U(E_2) = [e_0] \cap [e_1] = \{0\}$), αλλά ο $E_1 \oplus E_2 = E_2$ δεν είναι U-αναλλοίωτος.