Μέτρα και αναπαραστάσεις

Ορισμός 1 *Έστω* [1] $(K,\mathcal{S})$ *μετρήσιμος χώρος. Μια οικογένεια* $\{E(\Omega) : \Omega \in \mathcal{S}\}$ *τελεστών σ'έναν χώρο Hilbert* H *λέγεται* ***φασματικό μέτρο (spectral measure)*** *αν ικανοποιεί τις ιδιότητες*

1. $E(\Omega)^* = E(\Omega)$
2. $E(\Omega_1 \cap \Omega_2) = E(\Omega_1).E(\Omega_2)$
3. $E(\emptyset) = 0$ *και* $E(K) = I$
4. *Για κάθε* $x \in H$, *η απεικόνιση* $\mu_x : \Omega \to \langle E(\Omega)x, x\rangle$ *είναι θετικό μέτρο ορισμένο στην* $\mathcal{S}$.

Παρατήρηση Όταν ο K είναι (τοπικά) συμπαγής χώρος και $\mathcal{S}$ η σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του, συνήθως απαιτούμε όλα τα μ_x να είναι κανονικά μέτρα. [2] Λέμε τότε ότι το φασματικό μέτρο είναι *κανονικό*.

Θα δείξουμε ότι

Θεώρημα 1 *Έστω* K *συμπαγής χώρος Hausdorff. Κάθε *-αναπαράσταση* π *της* $C(K)$ *σ' έναν χώρο Hilbert* H *ορίζει ένα* μοναδικό *κανονικό φασματικό μέτρο* $E(\cdot)$ *ορισμένο στα Borel υποσύνολα του* K *ώστε*

$$\int_K f dE = \pi(f) \qquad (f \in C(K)).$$

Η απόδειξη στηρίζεται σε δύο θεμελιώδη θεωρήματα, που ονομάζονται και τα δύο «Θεωρήματα Αναπαράστασης του Riesz»:

Θεώρημα 2 *Έστω* K *συμπαγής χώρος Hausdorff. Για κάθε* θετική[3] *γραμμική μορφή* $\phi : C(K) \longrightarrow \mathbb{C}$ *υπάρχει* μοναδικό *κανονικό* θετικό *μέτρο Borel* μ *στο* K *ώστε*

$$\int_K f d\mu = \phi(f) \qquad (f \in C(K)).$$

Παρατήρηση Η μοναδικότητα στο Θεώρημα 2 μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής:

Αν δύο κανονικά μέτρα Borel μ *και* ν *στο* K *δίνουν το ίδιο ολοκλήρωμα σε κάθε συνεχή συνάρτηση, τότε είναι ίσα, οπότε δίνουν το ίδιο ολοκλήρωμα σε κάθε φραγμένη Borel μετρήσιμη συνάρτηση.*

Θεώρημα 3 *Έστω* H *χώρος Hilbert. Για κάθε φραγμένη sesquilinear μορφή* $\psi : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ *υπάρχει* μοναδικός $T \in \mathcal{B}(H)$ *ώστε*

$$\psi(x,y) = \langle Tx, y\rangle \quad (x,y \in H)$$

και $\|T\| = \sup\{|\psi(x,y)| : \|x\| \le 1, \|y\| \le 1\}$.

---

[1] newfasm2, 14/12/11

[2] Δηλαδή για κάθε $x \in H$, $\Omega \in \mathcal{S}$ και $\epsilon > 0$ υπάρχουν $F \subseteq \Omega \subseteq U$ όπου F συμπαγές και U ανοικτό ώστε $\mu_x(U \setminus F) < \epsilon$.

[3] δηλ. $f \ge 0 \Rightarrow \phi(f) \ge 0$.

Θα χρειασθεί ένα Λήμμα:

Λήμμα 4 *Αν M είναι μια πεπερασμένη οικογένεια από κανονικά θετικά μέτρα Borel στο K, τότε για κάθε $\Omega \subseteq K$ Borel υπάρχει ακολουθία (f_n) συνεχών συναρτήσεων με $0 \le f_n \le 1$ ώστε*

$$\mu(\Omega) = \lim_n \int f_n d\mu \quad \text{για κάθε } \mu \in M.$$

Απόδειξη Αν $\mu \in M$, λόγω κανονικότητας για κάθε $n \in \mathbb{N}$ βρίσκω συμπαγές K_n^μ και ανοικτό U_n^μ με $K_n^\mu \subseteq \Omega \subseteq U_n^\mu$ ώστε

$$\mu(U_n^\mu) - \mu(K_n^\mu) < \frac{1}{n}.$$

Θέτοντας τώρα

$$K_n = \bigcup_{\mu \in M} K_n^\mu \quad \text{και} \quad U_n = \bigcap_{\mu \in M} U_n^\mu,$$

εφόσον η M είναι πεπερασμένη, το K_n είναι συμπαγές, το U_n ανοικτό, $K_n \subseteq \Omega \subseteq U_n$ και

$$\mu(U_n) - \mu(K_n) = \mu(U_n \setminus K_n) \le \mu(U_n^\mu \setminus K_n^\mu) < \frac{1}{n}$$

για κάθε $\mu \in M$.

Κατόπιν από το Λήμμα Urysohn βρίσκω $f_n \in C(K)$ με $0 \le f_n \le 1$ ώστε $f_n|_{K_n} = 1$ και $f_n|_{U_n^c} = 0$. Τότε,

$$\mu(K_n) \le \int f_n d\mu \le \mu(U_n)$$

για καθε $\mu \in M$, οπότε

$$\left| \int f_n d\mu - \mu(\Omega) \right| \le |\mu(U_n) - \mu(K_n)| < \frac{1}{n} \quad \text{για κάθε } \mu \in M. \qquad \square^4$$

Σημείωση Η μοναδικότητα στο Θεώρημα 2 έπεται και από το Λήμμα: Αν μ, ν είναι δύο *κανονικά* θετικά μέτρα Borel και $\int f d\mu = \int f d\nu$ για κάθε $f \in C(K)$ με $0 \le f \le 1$, τότε $\mu = \nu$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 1

Μοναδικότητα Αν δύο *κανονικά* φασματικά μέτρα Borel $E(\cdot)$ και $F(\cdot)$ ικανοποιούν

$$\int_K f dE = \pi(f) = \int_K f dF$$

για κάθε $f \in C(K)$, τότε θέτοντας $\mu_x(\Omega) = \langle E(\Omega)x, x\rangle$ και $\nu_x(\Omega) = \langle F(\Omega)x, x\rangle$, έχουμε

$$\int_K f d\mu_x = \int_K f d\nu_x$$

για κάθε $f \in C(K)$. Επειδή τα δύο μέτρα είναι κανονικά, συμπεραίνουμε ότι κατ' ανάγκη θα ταυτίζονται: $\mu_x(\Omega) = \nu_x(\Omega)$, δηλαδή $\langle E(\Omega)x, x\rangle = \langle F(\Omega)x, x\rangle$ για κάθε

[4] Άλλη Απόδειξη: Θέτω $\mu_o = \sum_{\mu \in M} \mu$ (πεπερασμένο άθροισμα). Άσκηση: Το μ_o είναι κανονικό. Άρα από Lusin για κάθε h Borel φραγμένη και κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $f_n \in C(K)$ με $\|f_n\|_\infty \le \|h\|_\infty$ και $\mu_o[f_n \neq h] < \frac{1}{n}$ οπότε και $\mu[f_n \neq h] < \frac{1}{n}$ για κάθε $\mu \in M$. Εφάρμοσέ το τώρα στην $h = \chi_\Omega$.

Borel $\Omega \subseteq K$. Αφού η ισότητα αυτή ισχύει για κάθε $x \in H$, συμπεραίνουμε (εφόσον οι $E(\Omega)$ και $F(\Omega)$ είναι αυτοσυζυγείς) ότι $E(\Omega) = F(\Omega)$.

Ύπαρξη (i) Αν σταθεροποιήσουμε ένα $x \in H$, η απεικόνιση

$$C(K) \longrightarrow \mathbb{C} : \; f \longrightarrow \langle \pi(f)x, x\rangle$$

είναι γραμμική μορφή, και είναι θετική, διότι αν $f \geq 0$, τότε $f = g^*g$ όπου $g = \sqrt{f}$, οπότε

$$\langle \pi(f)x, x\rangle = \langle \pi(g)^*\pi(g)x, x\rangle = \|\pi(g)x\|^2 \geq 0.$$

Από το Θεώρημα 2, υπάρχει **μοναδικό** κανονικό θετικό μέτρο Borel μ_x στο K ώστε

$$\int_K f d\mu_x = \langle \pi(f)x, x\rangle \qquad \text{για κάθε } f \in C(K). \tag{1}$$

Μάλιστα

$$\mu_x(K) = \int \mathbf{1} d\mu_x = \langle \pi(\mathbf{1})x, x\rangle = \|x\|^2 .$$

Θα δείξω ότι υπάρχει ένα φασματικό μέτρο $E(\cdot)$ που «γεννάει» όλα τα μ_x με την έννοια ότι

$$\mu_x(\Omega) = \langle E(\Omega)x, x\rangle \qquad \text{για κάθε } x \in H \text{ και } \Omega \text{ Borel.}$$

Τότε, αν $f \in C(K)$, από τον ορισμό του $\int f dE$ θα έχω

$$\left\langle \left(\int f dE\right) x, x \right\rangle = \int f d\mu_x$$

για κάθε $x \in H$ οπότε

$$\int f dE = \pi(f)$$

λόγω της (1).

(ii) Σταθεροποιούμε τώρα μία φραγμένη συνάρτηση Borel $h : K \to \mathbb{C}$ και ορίζουμε την απεικόνιση

$$\phi_h : H \times H \to \mathbb{C}$$

από την σχέση

$$\phi_h(x, y) = \frac{1}{4}\left(\int h d\mu_{x+y} - \int h d\mu_{x-y}\right) + \frac{i}{4}\left(\int h d\mu_{x+iy} - \int h d\mu_{x-iy}\right). \tag{2}$$

Ισχυρισμός Όταν $h = \chi_\Omega$, η ϕ_h είναι sesquilinear και φραγμένη.

Απόδειξη Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\phi_h(x + \lambda x', y) = \phi_h(x, y) + \lambda\phi_h(x', y)$$

δηλαδή ότι

$$\begin{aligned}
&\mu_{x+\lambda x'+y}(\Omega) - \mu_{x+\lambda x'-y}(\Omega) + i\mu_{x+\lambda x'+iy}(\Omega) - i\mu_{x+\lambda x'-iy}(\Omega) = \\
&\mu_{x+y}(\Omega) - \mu_{x-y}(\Omega) + i\mu_{x+iy}(\Omega) - i\mu_{x-iy}(\Omega) \\
&\; + \lambda\left(\mu_{x'+y}(\Omega) - \mu_{x'-y}(\Omega) + i\mu_{x'+iy}(\Omega) - i\mu_{x'-iy}(\Omega)\right)
\end{aligned} \tag{3}$$

Εφαρμόζουμε το Λήμμα στο πεπερασμένο σύνολο μέτρων

$$\begin{aligned}M =&\{\mu_{x+\lambda x'+y}, \mu_{x+\lambda x'-y}, \mu_{x+\lambda x'+iy}, \mu_{x+\lambda x'-iy}, \mu_{x+y}, \mu_{x-y}, \mu_{x+iy}, \mu_{x-iy},\\ &\mu_{x'+y}, \mu_{x'-y}, \mu_{x'+iy}, \mu_{x'-iy}\}.\end{aligned}$$

Υπάρχει ακολουθία (f_n) συνεχών συναρτήσεων με $0 \leq f_n \leq 1$ ώστε

$$\mu(\Omega) = \lim_n \int f_n d\mu \quad \text{για κάθε } \ \mu \in M.$$

Όμως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}&\int f_n d\mu_{x+\lambda x'+y} - \int f_n d\mu_{x+\lambda x'-y} + i\int f_n d\mu_{x+\lambda x'+iy} - i\int f_n d\mu_{x+\lambda x'-iy} =\\ &\langle \pi(f_n)(x+\lambda x'), y\rangle = \langle \pi(f_n)x, y\rangle + \lambda \langle \pi(f_n)x', y\rangle\\ &\int f_n d\mu_{x+y} - \int f_n d\mu_{x-y} + i\int f_n d\mu_{x+iy} - i\int f_n d\mu_{x-iy}\\ &+\lambda\left(\int f_n d\mu_{x'+y} - \int f_n d\mu_{x'-y} + i\int f_n d\mu_{x'+iy} - i\int f_n d\mu_{x'-iy}\right).\end{aligned}$$

Παίρνοντας όρια καθώς $n \to \infty$ προκύπτει η σχέση (3).

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και η

$$\phi_h(x, y+\lambda y') = \phi_h(x,y) + \bar{\lambda}\phi_h(x,y').$$

Αποδεικνύεται τώρα εύκολα ότι η ϕ_h είναι φραγμένη: εφόσον $\left|\int h d\mu_x\right| \leq \|h\|_\infty \mu_x(K) = \|h\|_\infty \|x\|^2$, έχουμε, όταν $\|x\| \leq 1$ και $\|y\| \leq 1$

$$\begin{aligned}4|\phi_h(x,y)| &\leq \left|\int h d\mu_{x+y}\right| + \left|\int h d\mu_{x-y}\right| + \left|\int h d\mu_{x+iy}\right| + \left|\int h d\mu_{x-iy}\right|\\ &\leq \|h\|_\infty\big(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2\big)\\ &= \|h\|_\infty\big(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 + 2\|x\|^2 + 2\|iy\|^2\big) \quad \text{(κανόνας παραλληλογράμμου)}\\ &= 4\|h\|_\infty\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) \leq 8\|h\|_\infty\end{aligned}$$

άρα

$$\|\phi_h\| = \sup\{|\phi_h(x,y)| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} \leq 2\|h\|_\infty$$

(θα δούμε σε λίγο ότι η νόρμα $\|\phi_h\|$ στην πραγματικότητα φράσσεται από $\|h\|_\infty$).

Ο Ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Έπεται λοιπόν από το Θεώρημα 3 ότι υπάρχει **μοναδικός** τελεστής $E(\Omega) \in \mathcal{B}(H)$ ώστε

$$\langle E(\Omega)x, y\rangle = \phi_{\chi_\Omega}(x,y) \qquad \text{για κάθε } x, y \in H. \tag{4}$$

(iii) Πρέπει να δειχθεί ότι το $E(\cdot)$ είναι φασματικό μέτρο.

(α) Παρατήρηση $\quad \langle E(\Omega)x, x\rangle = \mu_x(\Omega)$.

Απόδειξη Πρέπει να δείξουμε ότι $\phi_{\chi_\Omega}(x,y) = \int \chi_\Omega d\mu_x = \mu_x(\Omega)$.

Όταν $f \in C(K)$,

$$\begin{aligned}\int f d\mu_{x+iy} - \int f d\mu_{x-iy} &= \langle \pi(f)(x+iy), (x+iy)\rangle - \langle \pi(f)(x-iy), (x-iy)\rangle \\ &= 2\langle \pi(f)x, iy\rangle + 2\langle \pi(f)iy, x\rangle .\end{aligned}$$

Θέτοντας $x = y$ έχουμε

$$\int f d\mu_{x+ix} - \int f d\mu_{x-ix} = 2\langle \pi(f)x, ix\rangle + 2\langle \pi(f)ix, x\rangle = 0.$$

Επίσης

$$\begin{aligned}\int f d\mu_{x+x} - \int f d\mu_{x-x} &= \langle \pi(f)(2x), 2x\rangle - \langle \pi(f)(x-x), x-x\rangle \\ &= 4\langle \pi(f)x, x\rangle = 4\int f d\mu_x.\end{aligned}$$

Άρα

$$4\phi_f(x,x) = \int f d\mu_{x+x} - \int f d\mu_{x-x} + i\int f d\mu_{x+ix} - i\int f d\mu_{x-ix} = 4\int f d\mu_x.$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα βρίσκουμε ακολουθία (f_n) από συνεχείς συναρτήσεις ώστε $\int f_n d\mu \to \mu(\Omega)$ για κάθε $\mu \in \{\mu_{2x}, \mu_0, \mu_{x+ix}, \mu_{x-ix}, \mu_x\}$ οπότε

$$\begin{aligned}4\phi_h(x,x) &= \mu_{x+x}(\Omega) - \mu_{x-x}(\Omega) + i\mu_{x+ix}(\Omega) - \mu_{x-ix}(\Omega) \\ &= \lim_n \left(\int f_n d\mu_{x+x} - \int f_n d\mu_{x-x} + i\int f_n d\mu_{x+ix} - i\int f_n d\mu_{x-ix}\right) \\ &= 4\int f_n d\mu_x = 4\mu_x(\Omega).\end{aligned}$$

Είναι φανερό από τη σχέση $\langle E(\Omega)x, x\rangle = \mu_x(\Omega)$ ότι $E(\emptyset) = 0, E(K) = I$ και ότι το $\Omega \longrightarrow \langle E(\Omega)x, x\rangle$ είναι σ-προσθετικό μέτρο για κάθε $x \in H$. Επίσης από τις σχέσεις

$$0 \leq \mu_x(\Omega) \leq \|x\|^2$$

έπεται ότι

$$0 \leq \langle E(\Omega)x, x\rangle \leq \langle x, x\rangle \quad \text{για κάθε} \ \ x \in H$$

οπότε

$$0 \leq E(\Omega) \leq I$$

και ειδικότερα

$$E(\Omega)^* = E(\Omega).$$

Μένει να αποδειχθεί ο

Ισχυρισμός $E(\Omega_1 \cap \Omega_2) = E(\Omega_1)E(\Omega_2)$ για κάθε ζεύγος Borel υποσυνόλων Ω_1, Ω_2 του K.

Απόδειξη Θα προκύψει από την πολλαπλασιαστικότητα της π: $\pi(fg) = \pi(f)\pi(g)$.

Υπενθυμίζουμε ότι, αν $x, y \in H$, για κάθε Borel φραγμένη $h : K \to \mathbb{C}$ έχουμε ορίσει

$$\phi_h(x,y) = \frac{1}{4}\int h d\mu_{x+y} - \frac{1}{4}\int h d\mu_{x-y} + \frac{i}{4}\int h d\mu_{x+iy} - \frac{i}{4}\int h d\mu_{x-iy}$$

οπότε, αν $f \in C(K)$,

$$\phi_f(x,y) = \langle \pi(f)x, y\rangle . \tag{5}$$

Για κάθε $f, g \in C(K)$ με $0 \le f, g \le 1$ έχουμε

$$\langle \pi(fg)x, y\rangle = \langle \pi(f)\pi(g)x, y\rangle = \langle \pi(f)(\pi(g)x), y\rangle$$

και συνεπώς, χρησιμοποιώντας την (5) για τα διανύσματα $z = \pi(g)x$ και y,

$$\phi_{fg}(x,y) = \langle \pi(fg)x, y\rangle = \langle \pi(f)(\pi(g)x), y\rangle = \phi_f(z,y) \tag{6}$$

δηλαδή

$$\int fg d\mu_{x+y} - \int fg d\mu_{x-y} + i\int fg d\mu_{x+iy} - i\int fg d\mu_{x-iy}$$
$$= \int f d\mu_{z+y} - \int f d\mu_{z-y} + i\int f d\mu_{z+iy} - \int f d\mu_{z-iy}$$

για κάθε $f \in C(K)$ με $0 \le f \le 1$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα για το σύνολο θετικών κανονικών μέτρων $M = \{gd\mu_{x+y}, d\mu_{z+y}, gd\mu_{x-y}, d\mu_{z-y}, gd\mu_{x+iy}, d\mu_{z+iy}, gd\mu_{x-iy}, d\mu_{z-iy}\}$, βρίσκουμε ακολουθία (f_n) από συνεχείς συναρτήσεις με $0 \le f_n \le 1$ ώστε $\int f_n d\mu \to \int \chi_{\Omega_1} d\mu$ για κάθε $\mu \in M$. Τότε όμως η τελευταία ισότητα δίνει

$$\int \chi_{\Omega_1} g d\mu_{x+y} - \int \chi_{\Omega_1} g d\mu_{x-y} + i\int \chi_{\Omega_1} g d\mu_{x+iy} - i\int \chi_{\Omega_1} g d\mu_{x-iy}$$
$$= \int \chi_{\Omega_1} d\mu_{z+y} - \int \chi_{\Omega_1} d\mu_{z-y} + i\int \chi_{\Omega_1} d\mu_{z+iy} - \int \chi_{\Omega_1} d\mu_{z-iy}$$

δηλαδή

$$\phi_{\chi_{\Omega_1} g}(x,y) = \phi_{\chi_{\Omega_1}}(\pi(g)x, y) \tag{7}$$

για κάθε Borel $\Omega_1 \subseteq K$. Όμως, από τον ορισμό του $E(\Omega_1)$,

$$\phi_{\chi_{\Omega_1}}(\pi(g)x, y) = \langle E(\Omega_1)\pi(g)x, y\rangle = \langle \pi(g)x, E(\Omega_1)^* y\rangle$$

και από την (5)

$$\langle \pi(g)x, E(\Omega_1)^* y\rangle = \phi_g(x, E(\Omega_1)^* y)$$

οπότε η (7) δίνει

$$\phi_{g\chi_{\Omega_1}}(x,y) = \phi_{\chi_{\Omega_1} g}(x,y) = \phi_g(x, E(\Omega_1)^* y) = \phi_g(x,w) \text{ όπου } w = E(\Omega_1)^* y.$$

Χρησιμοποιώντας πάλι το Λήμμα για το σύνολο θετικών κανονικών μέτρων $M = \{\chi_{\Omega_1} d\mu_{x+y}, d\mu_{x+w}, \chi_{\Omega_1} d\mu_{x-y}, d\mu_{x-w}, \chi_{\Omega_1} d\mu_{x+iy}, d\mu_{x+iw}, \chi_{\Omega_1} d\mu_{x-iy}, d\mu_{x-iw}\}$, βρίσκουμε ακολουθία (g_n) από συνεχείς συναρτήσεις με $0 \le g_n \le 1$ ώστε $\int g_n d\mu \to \int \chi_{\Omega_2} d\mu$ για κάθε [5] $\mu \in M$. Έπεται ότι

$$\phi_{\chi_{\Omega_2}\chi_{\Omega_1}}(x,y) = \phi_{\chi_{\Omega_2}}(x, E(\Omega_1)^* y)$$

για κάθε Borel $\Omega_2 \subseteq K$. Αλλά

$$\phi_{\chi_{\Omega_1}\chi_{\Omega_2}}(x,y) = \phi_{\chi_{\Omega_1 \cap \Omega_2}}(x,y) = \langle E(\Omega_1 \cap \Omega_2)x, y\rangle$$
$$\text{και} \quad \phi_{\chi_{\Omega_2}}(x, E(\Omega_1)^* y) = \langle E(\Omega_2)x, E(\Omega_1)^* y\rangle$$

συνεπώς

$$\langle E(\Omega_1 \cap \Omega_2)x, y\rangle = \langle E(\Omega_2)x, E(\Omega_1)^* y\rangle = \langle E(\Omega_1)E(\Omega_2)x, y\rangle.$$

Αφού αυτή η σχέση ισχύει για κάθε $x, y \in H$, δείξαμε ότι $E(\Omega_1 \cap \Omega_2) = E((\Omega_1)E(\Omega_2)$, πράγμα που ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

[5] π.χ. $\int g_n \chi_{\Omega_1} d\mu_{x+y} \to \int \chi_{\Omega_2}\chi_{\Omega_1} d\mu_{x+y}$