- Αν δουλεύουμε στο $\mathbb{N}^2$ για είχαμε $k: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{C}$ και
$$(C_k f)(n) = \sum_m k(n,m)\cdot f(m) = [k][f]$$
↳ πολλαπλ. πινάκων.

- $C_n f$ είναι συνεχής άρα $C_n f \in L^2([0,1])$

- $\|C_n f\|_2 \leq \|k\|_{22}^2 \cdot \|f\|_2$, $\boxed{\|k\|_{22} = \left(\iint |k(x,y)|^2 dx\, dy\right)^{\frac{1}{2}}}$

- Άρα ο $C_k : (C([0,1]), \|\cdot\|_2) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_2)$ είναι φραγμένος τελεστής

- Γενικότερα, λόγω πυκνότητας ($C([0,1])$) $k \in L^2([0,1]\times[0,1])$ οπότε (Fubini) $\forall f \in L^2([0,1])$, $C_k f \in L^2([0,1])$

- Άρα $\boxed{C_k : L^2 \to L^2 \text{ φραγμένος τελεστής}}$

04/03/2015

Χώροι Hilbert

~~Αν H~~

Αν H χώρος Hilbert και $\emptyset \neq A \subset H$, τότε το σύνολο $A^\perp = \{x \in H : \langle x, y\rangle = 0 \ \forall y \in A\}$ είναι πάντα κλειστό σύνολο.

Θεώρημα

Έστω H χώρος Hilbert και M γνήσιος κλειστός υπόχωρος του. Τότε $M^\perp \neq \emptyset$ και $M \oplus M^\perp = H$.

Παράδειγμα

- $E=(c_{00},\langle\cdot,\cdot\rangle)$, $M=\{x\in c_{00} : \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x(n)=0\}$.
- Τότε M γνήσιος κλειστός υπόχωρος του E. Αλλά $\nexists$ $y\in c_{00}$, $y\neq 0$: $y\perp M$. (Λείπει η πληρότητα)

Πρόταση

- H χώρος Hilbert, $M\neq H$ κλειστός υπόχωρος, τότε $\exists$ $x_0\neq 0$: $x_0\perp M$.

Λήμμα (Πλησιέστερο Διάνυσμα)

Αν $x\notin M$ τότε $\exists!\, y\in M : \|x-y\| = \mathrm{dist}(x,M)$

Απ.

- $\mathrm{dist}(x,M)=\delta>0$, $\exists\ (y_n)_n\subset M$ βασική : $\|y_n-x\|\to\delta$
- Κανόνας # για y_n-x, y_m-x:

$\|(y_n-x)+(y_m-x)\|^2+\|(y_n-x)-(y_m-x)\|^2 = 2\|y_n-x\|^2+2\|y_m-x\|^2 \Rightarrow$

- $\|y_n-y_m\| = 2\|y_n-x\|^2+2\|y_m-x\|^2-4\left\|\frac{y_n+y_m}{2}-2x\right\|^2 \leq 2\|y_n-x\|^2$

$\cancel{\|y_n-y_m\| \to 2\delta^2+2\delta^2-4\delta^2}$

$+2\|y_m-x\|^2-4\delta^2 \Rightarrow \|y_n-y_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0 \Rightarrow (y_n)$ βασική.

- Άρα $\exists\ y\in M : y_n\to y$. Άρα $\|x-y_n\|\to\|x-y\| \Rightarrow$ $\|x-y\|=\delta$.

- Επίσης είναι μοναδικό το y.

Ισχυρισμός

Αν $y \in M$ ικανοποιεί $\|x-y\| = \operatorname{dist}(x,M)$ τότε $x-y \perp M$.

Απ.

Για τυχαίο $y' \in M$ αρκεί να δείξουμε ότι $\langle x-y, y' \rangle = 0$. Άρα αρκεί να κοιτάξουμε το $M_0 = [y,y'] \subset M$. ($\dim M_0 < \infty$).

- Επομένως $x \in H$ γράφεται στη μορφή $x = \overset{y}{P_M(x)} + (x - P_M(x))$ με $x - P_M(x) \perp M \Rightarrow \boxed{x = P_M(x) + P_{M^\perp}(x)}$
- Επίσης ισχύει $\boxed{\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|P_{M^\perp}(x)\|^2}$
- $\boxed{\|P_M(x)\| \leq \|x\| \quad \forall\, x \in H}$ και $\|P_M\| = \sup\{\|P_M(x)\| : \|x\| = 1\} \leq 1$ γενικά και $\boxed{\|P_M\| = 1 \text{ αν } M \neq \{0\}}$
- Άρα για $x \neq 0$ $\|P_M(x)\| = \|x\|$.

$M \longrightarrow P_M$

$Im(P) \longleftarrow P$

$\hookrightarrow \{Px : x \in H\} = \ker(I-P)$

Ορισμός

Μια οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subset H$ λέγεται $\boxed{\text{ορθοκανονική}}$ αν $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Αν επιπλέον η κλειστή γραμμική θήκη $\overline{[e_i]} = H$ η οικογένεια λέγεται $\boxed{\text{ορθοκανονική βάση.}}$

$\hookrightarrow \{e_i : i \in I\}$.

π.χ

- $H = \ell^2 \equiv \ell^2(\mathbb{N})$, $e_n = (0, \dots 1, \dots 0)$.
- Η $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθ. βάση και κάθε $x = (x(n)) \in \ell^2$ γράφεται ως $x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) \cdot e_n$.
- Δηλαδή $\| x - \sum_{n=1}^{N} x(n) e_n \|_2^2 \longrightarrow 0$, δλδ

$\overline{[e_n : n \in \mathbb{N}]} = c_{00}(\mathbb{N})$ που είναι πυκνός υπόχωρος του $\ell^2(\mathbb{N})$

Θεώρημα

Κάθε χώρος Hilbert έχει ορθοκανονική βάση. η οποία είναι αριθμήσιμη $\iff$ H διαχωρίσιμος.

Θεώρημα

Αν $\{e_i : i \in I\}$ ορθ. βάση του H τότε κάθε $x \in H$ γράφεται μοναδικά στη μορφή $x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$ και ισχύει $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$. (Parseval)

- Επομένως η επιλογή μιας ορθ. βάσης $\{e_i : i \in I\}$ ορίζει μια γραμ. ισομετρία $U : H \to \ell^2(I) : x \mapsto (\langle x, e_i \rangle)_{i \in I}$ και είναι επί [redacted]
- Εφαρμογές στη Θεωρία Fourier.

- $\forall\, x \in H$ η απεικόνιση $f_x : x \to \langle x, y\rangle$ είναι γραμμική και συνεχής με $\|f_x\| = \|x\|$.

- $f_x(y) = \langle x, y\rangle$, $|f_x(y)| \le \|x\| \cdot \|y\| \Rightarrow \|f_x\| \le \|x\|$. και για $y = \frac{x}{\|x\|}$ έχουμε ισότητα.

- Η απεικόνιση $H \to H^* : x \mapsto f_x$ είναι αντιγραμμική.

Θεώρημα (Riesz)

Έστω H χώρος Hilbert. $\forall$ συνεχή γραμμική απεικόνιση $f : H \to \mathbb{C}$ $\exists\, x \in H : f(y) = \langle y, x\rangle$ $\forall\, y \in H$. με $\|f\| = \|x\|$.

Απ.

- Έστω $f : H \to \mathbb{C}$ γραμ. και συνεχής.
- $\exists\, x \in H : f = f_x$;

~~Αν f=0~~

- Αν $f = 0$ τότε $x = 0$.
- Αν $f \neq 0$, θεωρούμε $M = \ker(f) = f^{-1}(\{0\})$ κλειστός υπόχωρος. με $M \neq H$.
- Άρα $\exists\, z \in H \setminus \{0\} : z \perp M$. Θ.δ.ο κάποιο πολλ/σιο του z κάνει τη δουλειά!

- $f(z) \neq 0$. Κοιτάμε το $y f(z) - z f(y)$ για $y \in H$.
- Με πράξεις $y f(z) - z f(y) \in M$ συνεπώς $\langle y f(z) - z f(y), z\rangle = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{f(y) = \frac{f(z)}{\|z\|^2} \langle y, z\rangle \quad \forall\, y \in H}$$

$$= f_x(y) \quad \text{με} \quad x = \overline{\frac{f(z)}{\|z\|^2}} \cdot z$$

- Μοναδικότητα (Εύκολα)

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert. Μία sesquilinear μορφή ϕ εί μία απεικόνιση $\phi: H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ που είναι γραμ. ως προς τ πρώτη μεταβλητή και αντιγραμ. ως προς την δεύτερη.

- $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x,y)| : \|x\| = 1 = \|y\|\}$, $\boxed{\text{Τετραγωνική μορφή}}$ $\boxed{\tilde{\phi}(x) = \varphi(x,}$

Παρ.

- $f: H_1 \to \mathbb{C}$ γραμ. , $g: H_2 \to \mathbb{C}$ αντιγραμ.
- Τότε η $\varphi(x,y) = f(x)\cdot g(y)$ είναι sesquilinear μορφή.
- Αλλιώς : $\varphi(x,y) = \langle x, x_0\rangle\langle y_0, y\rangle$ για $x_0 \in H_1$, $y_0 \in H_2$.
- Γενικότερα : $\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\cdot g_i(y)$

↳ Δεν είναι γενική γραφή όλων των sesq. μορφών.

Ταυτότητα Πολικότητας

Για $x, y \in H$.

$$\varphi(x,y) = \tilde{\phi}\left(\frac{x+y}{2}\right) - \tilde{\phi}\left(\frac{x-y}{2}\right) + i\phi\left(\frac{x+iy}{2}\right) - i\tilde{\phi}\left(\frac{x-iy}{2}\right)$$

Παρ.

- Αν $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ τότε η $\varphi_T(x,y) = \langle Tx, y\rangle$ είναι sesq. μ

- $|\varphi_T(x,y)| \leq \|Tx\|\cdot\|y\| \leq \|T\|\cdot\|x\|\cdot\|y\| \Rightarrow$

$\boxed{\sup\{|\varphi_T(x,y)| : \|x\| = 1 = \|y\|\} \leq \|T\|}$

Θεώρημα

$\to \|\varphi\| = \|T\|$

Όλες οι φραγμ. sesquilinear μορφές είναι της παραπάνω μορφής. , δλδ $\boxed{\varphi(x,y) = \langle Tx, y\rangle}$ $\forall\, x \in H_1, y \in H_2$ και $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$

Απ.

- Έστω $\varphi: H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ sesq. και φραγμένη. Ψάχνουμε $T: H_1 \to H_2$.

- Σταθεροποιούμε $x \in H_1$ και κοιτάμε $H_2 \longrightarrow \mathbb{C}$

$$f_x : y \longmapsto \overline{\varphi(x,y)}$$

Η απεικόνιση είναι γραμμική και φραγμένη αφού
$|\overline{\varphi(x,y)}| = |\varphi(x,y)| \leq \|\varphi\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall y.$ ΔΗΛ $|f_x(y)| \leq (\|\varphi\| \|x\|) \cdot \|y\|$

- $\|f_x\| = \; \leq \|\varphi\| \cdot \|x\|.$

- Η f_x είναι γραμ. και συνεχής: $H_2 \to \mathbb{C}$ άρα από Riesz: $\exists\, y_x \in H_2$:
$f_x(y) = \langle y, y_x \rangle \quad \forall y \in H_2 \iff \overline{\varphi(x,y)} = \langle y, y_x \rangle \iff$
$\boxed{\varphi(x,y) = \langle y_x, y \rangle} \quad \forall y \in H_2.$

- Κοιτάμε την $x \longmapsto y_x : H_1 \to H_2$ γραμμική.

- $\forall y \in H_2$, $\langle y_{x+\lambda x'}, y \rangle = \varphi(x+\lambda x', y) = \varphi(x,y) + \lambda \varphi(x', y) =$
$\langle y_x, y \rangle + \lambda \langle y_{x'}, y \rangle$

- $\langle y_{x+\lambda x'} - y_x - \lambda y_{x'}, y \rangle = 0 \quad \forall y \in H_2 \implies \boxed{y_{x+\lambda x'} = y_x + \lambda y_{x'}}$
↳ γραμ.

- $\forall y \in H_2$: $|\langle y_x, y \rangle| = |\varphi(x,y)| \leq (\|\varphi\| \cdot \|x\|) \cdot \|y\| \implies \boxed{\|y_x\| \leq \|\varphi\| \cdot \|x\|}$
↳ C-S

- Δηλαδή η $x \mapsto y_x$ είναι γραμ. και φραγμένη.
Την ονομάζουμε $T: x \to y_x : H_1 \to H_2$. και
$\langle Tx, y \rangle = \varphi(x,y) \quad \forall y \in H_2 \; \forall x \in H_1$.

- Επίσης είναι μοναδική. (Εύκολο).

(18)

05/03/2015

Υπενθύμιση

- $H \longrightarrow H^* =$ τοπολ. δυικός $= \{ f : H \to \mathbb{C} : \text{γραμ.} + \text{συν.} \}$.

$x \longmapsto f_x$

↳ αντιγραμμ. ισομ. επί.

- $f_x(y) = \langle y, x \rangle \quad \forall y \in H$

- Ορίζουμε $\boxed{\langle f_x, f_y \rangle := \langle y, x \rangle}$. Έτσι ορίζεται $\langle \cdot, \cdot \rangle$ στον H

Μάλιστα $\boxed{\langle f_x, f_x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2 = \|f_x\|^2}$

- Άρα ο $(H, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Hilbert.

$H^* \longrightarrow H^{**}$

$f \longmapsto \varphi_f \quad : \quad \varphi_f(g) = \langle g, f \rangle \quad , g, f \in H^*$.

Άρα $H \longrightarrow H^* \longrightarrow H^{**}$

$x \longmapsto f_x \longmapsto \varphi_{f_x}$: γραμ. ισομ. επί (ως σύνθεση).

Σύνδεση με Συναρτησιακή Ανάλ.

$H \longrightarrow H^{**}$

$x \xrightarrow[\text{καν. εμφύτευση}]{} \hat{x} \quad : \hat{x} : H^* \to \mathbb{C}$

$f \longmapsto \hat{x}(f) = f(x)$.

- $\forall f_y \in H^* \; , \; \hat{x}(f_y) = f_y(x) = \langle x, y \rangle$
- $-//- \; , \; \varphi_{f_x}(f_y) = \langle x, y \rangle$

$\Big\} \; \forall y \in H$

Άρα $\boxed{\hat{x} = \varphi_{f_x}}$

- Αν $M = \ker f$, $f: H \to \mathbb{C}$, $f \not\equiv 0$, $z \notin M$ τότε:

$\forall y \in H$, $\exists y_1 \in M$, $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ ώστε $\boxed{y = \lambda z + y_1} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}$:
$y - \lambda z \in M \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}$: $f(y) = \lambda f(z)$. Για $\boxed{\lambda = \frac{f(y)}{f(z)}}$

Συμπέρασμα

$\forall z \notin M$ μπορώ να γράψω $\forall y \in H$, $\boxed{y = \frac{z}{f(z)} + \underbrace{\left(y - \frac{1}{f(z)} \cdot z\right)}_{\in M}}$.

Ένας χώρος Hilbert συναρτήσεων.

$L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$: αποτελείται από κλάσεις ισοδυναμίας ως προς μ-σπ ισότητα.

Bergman: $G \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $f: G \to \mathbb{C}$ ολόμορφες και $\iint_G |f(x+iy)|^2 dx\,dy < \infty$. (Συμβ συνόλου: $A^2(G)$). ή και $B^2(G)$

- Στον χώρο αυτό ορίζουμε $\langle f, g \rangle = \iint_G f(x+iy) \cdot \overline{g(x+iy)}\, dx\,dy$ εσ. γιν. (Επάγει νόρμα με συμβ. $\|\cdot\|_B$).

πλήρης;

Έστω $(f_n)_n \subset A^2(G)$ που είναι $\|\cdot\|_B$ - βασική.

Λήμμα (Μέσης Τιμής)

ολ). σε ανοικτή περιοχή της B.

Αν f ολόμορφη γύρω από $\overline{B(w,\rho)} = B$. Τότε $f(w) = \frac{1}{\pi\rho^2}\iint_B f$.

Απ.

$$\frac{1}{\pi\rho^2}\iint_B f(x+iy)\,dx\,dy = \frac{1}{\pi\rho^2}\int_0^\rho \int_{-\pi}^{\pi} f(w + te^{i\theta})\, t\, dt\, d\theta = \frac{2}{\rho^2}\int_0^\rho \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(w+te^{i\theta})\, d\theta\right) t\,dt$$

(20)

$$= \frac{2}{\rho^2}\int_0^\rho f(w)\, t\, dt = f(w).$$

Πόρισμα

- $|f(w)| \leq \frac{1}{\rho\sqrt{\pi}}\iint_B |f|^2$ (Cauchy-Schwarch).

$\leq \frac{1}{\rho\sqrt{\pi}}\|f\|_B^2$.

- Άρα $\forall w \in G \;\exists R: \overline{B(w,R)} \subset G$. Έστω $0<\delta<\text{dist}(\overline{B(w,R)}$

- $\forall z \in \overline{B(w,R)}: \overline{B(z,\delta)} \subset G$

$\Downarrow$

$|f_n(z)-f_m(z)| \leq \frac{1}{\delta\sqrt{\pi}}\|f_n-f_m\|_B \Rightarrow \sup\{|f_n(z)-f_m(z)| : z \in \overline{B(z}$
$\leq \frac{1}{\delta\sqrt{\pi}}\|f_n-f_m\|_B$.

- Άρα η (f_n) είναι ομοιόμορφα-βασική σε κάθε κλειστή μπάλα $\subset G$.

- Άρα $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ}} f$, $f: G \to \mathbb{C}$ και συνεχής.

- Επιπλέον $\forall$ κλειστό τρίγωνο $\Delta \subset G$ έχουμε
$\int_\Delta f(z)\,dz = \lim_n \int_\Delta f_n(z)\,dz = 0$ αφού f_n ολόμορφες σε

- Άρα από Θ. Morera η f είναι ολόμορφη.

- Μένει ν.δ.ο $\|f_n - f\|_B \to 0$. κλπ

- Από την ανισ. $|f(z)| \le C\cdot\|f\|_B$ έπεται ότι η $f \mapsto f(z)$ είναι $\|\cdot\|_B$-συνεχής (φυσικά είναι γραμμική) (*)

- Στον $A^2(G)$, $\forall z \in G$ η απεικόνιση $A^2(G) \longrightarrow \mathbb{C}$
$f \longrightarrow f(z)$

και μαζί με το (*) και το Θ. του Riesz $\exists\, k_z \in A^2(G)$:
$f(z) = \langle f, k_z\rangle \quad \forall f \in A^2(G) \Leftrightarrow f(z) = \iint_G f\cdot \overline{k_z}$

Πρόταση
$\forall\, T \in B(H_1, H_2)\ \exists!\, T^* \in B(H_2, H_1)$ με $\langle Tx, y\rangle_2 = \langle x, T^*y\rangle_1$.
$\forall x, y$.

Απ.
- $H_1 \xrightarrow{T} H_2$
$H_2 \xrightarrow{T^*} H_1$ $\exists ?$: $\langle Tx, y\rangle_2 = \langle x, T^*y\rangle_1$

- Ονομάζουμε $\varphi: H_2 \times H_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ με $\varphi(y, x) = \langle y, Tx\rangle_2$ $\forall y \in H_2, \forall x \in H_1$
- Η φ είναι ~~σ~~ sesq. μορφή και φραγμ.

- $|\varphi(x,y)| = |\langle Tx, y\rangle|$ και $\|\varphi\| = \|T\|$.

- Άρα $\exists!\, T^*: H_2 \to H_1$: $\varphi(y,x) = \langle T^*y, x\rangle$ και μάλιστα.
$\boxed{\|T^*\| = \|\varphi\| = \|T\|}$

- $\boxed{\text{Στον } \mathbb{C}^n \text{ όταν } T = [a_{ij}] \text{ τότε } T^* = [\overline{a_{ji}}]}$

- Όταν θεωρούμε $T: E \to H$, E χώρος με εσ. γιν. μη πλήρης, τότε ο T^* ορίζεται διαφορετικά, μπορεί π.χ να έχει Π.Ο το $\{0\}$.

- $\forall y \in H_2$, $x \longmapsto \langle Tx, y\rangle : H_1 \to \mathbb{C}$ (γραμ. και συν. ότ. T γραμμ.).
- Οπότε όταν ο H_2 είναι πλήρης $\exists!\, T^*: \langle Tx,y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$.
- Ορίζουμε $D(T^*) = \{y \in H_2 : x \longmapsto \langle Tx,y\rangle\}$ είναι συνεχής σε κάθε $x \in D(T)\}$.
- και $\forall y \in D(T^*)$ ονομάζουμε $T^*y : \langle T^*y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle$ $\forall x \in D(T)$.

Άσκηση (Hellinger - Toeplitz).
Αν H Hilbert και $T: H \to H$ γραμμ. και $\langle Tx,y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ $\forall x,y \in H$, τότε η T είναι συνεχής.

Κατηγορίες Τελεστών

- Normal
  $A \in B(H)$ και $AA^* = A^*A$.

Αυτοσυζυγής
$A \in B(H)$ και $A = A^*$.

π.χ.
- $H = L^2([0,1])$, $A = M_f$ (όπου $M_f(g) = fg$).
- $\langle M_f^* g, h\rangle \overset{\text{ορ}}{=} \langle g, M_f h\rangle = \langle g, fh\rangle = \int g\overline{fh} = \int (\overline{f}g)\overline{h} = \langle \overline{f}g, h\rangle = \langle M_{\overline{f}}\, g, h\rangle$.
- Άρα $M_f^* = M_{\overline{f}}$ και συνεπώς ο M_f είναι αυτοσυζυγής σ.π.

$\Leftrightarrow f \overset{\sigma.\pi}{=} \bar{f}$. δλδ η f παίρνει πραγμ. τιμές σ.π.

Π.χ

- Στον $H = H^2$ (Hardy),
- $(Tf)(z) = z f(z)$. Περιμένει κανείς ότι: $\boxed{(T^* f)(z) = \bar{z} f(z)}$.

ΛΑΘΟΣ !!!
αφού η $T^* f$ δεν είναι ολόμορφη

Ποιος είναι ο T^*;

$\langle T^* f, g \rangle = \langle f, Tg \rangle$

Υπενθύμιση

- Αν $f_n(z) = z^n$, τότε η $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθ. βάση του H^2.
- $(Tf_n)(z) = z f_n(z) = z^{n+1} \Rightarrow Tf_n = f_{n+1}$.

- $\langle T^* f_m, f_n \rangle = \langle f_m, T f_n \rangle = \langle f_m, f_{n+1} \rangle = \begin{cases} 0, & m \neq n+1 \\ 1, & m = n+1 \end{cases}$

- Άρα $\langle T^* f_m, f_n \rangle = \begin{cases} \langle f_{m-1}, f_n \rangle, & m \geq 1 \\ 0, & m = 0 \end{cases} \quad \forall n.$

- Άρα $T^* f_m = \begin{cases} f_{m-1}, & m \geq 1 \\ 0, & m = 0 \end{cases} \quad \forall m.$

- Άρα $(T^* f)(z) = T\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m\right) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m z^{m-1}$

- $T^* T : f_n \longrightarrow f_{n+1} \longrightarrow f_n \quad , \; T^* T = I.$
- $TT^* : f_n \xrightarrow{n \geq 1} f_{n-1} \rightarrow f_n \quad , \; T^* T(f_n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ f_n, & n \geq 1 \end{cases}$
  $f_0 \xrightarrow{n=0} 0 \rightarrow 0$

ΔΔΣ T^*T είναι η προβολή στον υπόχωρο που παράγουν τα $\{f_n : n \geq 1\}$.

Θετικός Τελεστής

$A \in B(H)$, $\Leftrightarrow \langle Ax, x \rangle \geq 0 \ \forall x \in H$

Unitary

$V \in B(H_1, H_2)$, V αντιστρέψιμος και $V^{-1} = V^* \Leftrightarrow$
$VV^* = Id_{H_2}$, $V^*V = Id_{H_1}$

Παρατήρηση

V ισομετρία, $\|Vx\| = \|x\| \ \forall x \Leftrightarrow V^*V = Id_{H_1}$.

Απ.

($\Leftarrow$) Όταν $V^*V = Id_{H_1}$ τότε $\forall x$ $\|Vx\|^2 = \langle Vx, Vx \rangle =$
$\langle V^*Vx, x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$.

($\Rightarrow$) Αν ισομετρία τότε $\forall x$, $\langle V^*Vx, x \rangle = \langle x, x \rangle$.

- Κοιτάμε την $\varphi_V(x,y) = \langle Vx, y \rangle$. Δείξαμε ότι $\tilde{\Phi}_V = \tilde{\Phi}_I$ και από polirization $\langle V^*Vx, y \rangle = \langle x, y \rangle \ \forall x, y \Rightarrow$
$V^*V = Id_{H_1}$.

Σημείωση

Για να είναι ο V unitary θέλουμε να είναι και επί.

Απ.

Αν V ισομετρία και επί τότε $\exists V^{-1}$ και μάλιστα $V^*V = I \cdot V^{-1}$
$\Rightarrow V^* = V^{-1}$. Αντίστροφα; ΠΡΟΦΑΝΕΣ! $V^{-1} = V^*$