11/03/2015

$C^b(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχείς και φραγμένες $\}$.

$$C^b(\mathbb{R}) \longrightarrow B(L^2(\mathbb{R}))$$

$$f \underset{\text{γραμ.}}{\longmapsto} M_f : g \longmapsto fg$$

- Δείξαμε $\|M_f\| = \|f\|_\infty \rightsquigarrow$ ισομετρία
- Επίσης δείξαμε $\boxed{M_f^* = M_{\bar{f}}}$ και $M_{f_1 \cdot f_2}(g) = M_{f_1} \circ M_{f_2}(g)$. $\forall g \in L^2$.

ΔΛΣ $\boxed{M_{f_1 \cdot f_2} = M_{f_1} \circ M_{f_2}}$

Συναφές παράδειγμα.

- $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος σ-πεπ. μέτρου.
- $L^\infty(\mu) \longrightarrow B(L^2(\mu))$

$f \longmapsto M_f \rightsquigarrow$ διατηρεί $+, \cdot, *$ $(M_f^* = M_{\bar{f}})$.

και $\|M_f\| = \|f\|_\infty := \text{esssup}|f|$

Κοινό στοιχείο των $C^b(\mathbb{R})$, $L^\infty(\mu)$, $B(L^2(\mu))$ είναι ότι είναι C^*-άλγεβρες

- C^*-άλγεβρα: A μία (προσεταιριστική) μιγαδική άλγεβρα με νόρμα $\|\cdot\|$ τέτοια ώστε $(A, \|\cdot\|)$ Banach χώρος.

και:

- Ορίζεται $* : A \longrightarrow A$ αντιγραμ., αντιμορφ., ενέλιξη.

$$x \longmapsto x^*$$

- ΔΛΣ $\cdot (x + \lambda y)^* = x^* + \bar{\lambda} y^*$
  $\cdot (xy)^* = y^* x^*$ $\forall x, y \in A$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$
  $\cdot (x^*)^* = x$

και επιπλέον $\|x^* x\| = \|x\|^2$ $\forall x \in A$.

- Ομοίως αν $A = L^\infty(\mu)$.
- Ομοίως αν $A = B(H)$ όπου $AB = A \circ B$, $\langle A^* \xi, \eta \rangle = \langle \xi, A\eta \rangle$

$\|A^*A\| = \|A\|^2$

• $\|A^*A\| \le \|A^*\|\cdot\|A\|$ αφού $AB := A\circ B$ και $\|Ax\| \le \|A\|\cdot\|x\|$.

~~$\forall\ \xi,\eta,\ |\langle A^*A\xi,\eta\rangle| = |\langle A\xi, A\eta\rangle| \le \|A\xi\|\,\|A\eta\| \le \|A\|^2$~~

• $\|A\xi\|^2 = \langle A\xi, A\xi\rangle = \langle A^*A\xi,\xi\rangle \le \|A^*A\|\cdot\|\xi\|^2$ (C-S)
Για $\|\xi\|\le 1 \Rightarrow \|A\|^2 \le \|A^*A\|$.

Θεώρημα (Gelfand-Naimark)
(I) κάθε μεταθετική C^*-άλγεβρα είναι ισομετρικά $*$-ισομορφική με μία $C_0(X)$ όπου X τοπικά συμπαγής Hausdorff.

(II) κάθε C^*-άλγεβρα είναι ισομετρικά $*$-ισομορφική με μία κλειστή $*$-υπάλγεβρα του $B(H)$, H Hilbert.

Μη Παραδ.
1) $n\in\mathbb{N}$; T_n άνω τριγ. $n\times n$ πίνακες

2) $A(\mathbb{D}) = \{f:\overline{\mathbb{D}}\to\mathbb{C} : f$ συνεχής, $f|_{\mathbb{D}}$ ολόμορφη$\} \subset C(\overline{\mathbb{D}})$ C^*-άλγεβρα
Για $f\in A(\mathbb{D}) \Rightarrow \bar{f}$ ολόμορφη $\Leftrightarrow f$ σταθερή.

Παρατήρηση
• $\forall\ T \in B(H)$ γράφεται μοναδικά ως $T = T_1 + iT_2$ όπου $T_i = T_i^*$ (αυτοσυζυγής)

• Παίρνουμε $T_1 = \frac{T+T^*}{2}$, $T_2 = \frac{T-T^*}{2i}$

Άσκηση

T normal (φυσιολογικός) $\iff T_1 T_2 = T_2 T_1$

Προβολές

- **Ορθή προβολή**
- H Hilbert, E κλειστός υπόχωρος
- $\forall x \in H : x = x_1 + x_2$, $x_1 \in E$, $x_2 \perp E$
- $P_E : H \longrightarrow H$

  $x \longmapsto x_1$

Πρόταση

Μία φραγμένη γραμ. απεικόνιση $P : H \to H$ είναι ορθή προβολή $\iff P = P^* = P^2$.

Απ.

- $\langle Px, y\rangle = \langle Px, Py + (I-P)y\rangle = \langle Px, Py\rangle + \underbrace{\cancel{\langle \underset{\in E}{Px}, \underset{\perp E}{(I-P)y}\rangle}}_{0} = \langle Px, Py\rangle$

- Ορίζουμε $P^{\perp} = I - P$ (λογικό) και άρα:

  $\langle x, Py\rangle = \langle Px + P^{\perp}x, Py\rangle = \langle Px, Py\rangle + \langle \underset{\in E^{\perp}}{P^{\perp}x}, \underset{\in}{Py}\rangle = \langle Px, Py\rangle$.

- Άρα $\langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle \iff P = P^*$
- $P = P^2$ προφανές αφού $\forall x \in H$, $P(x) \in E \Rightarrow P^2(x) = P(x)$

  (αλλιώς $\langle x, Py\rangle = \langle Px, Py\rangle \underset{(P=P^*)}{=} \langle x, P^2 y\rangle$ $\forall x, y \Rightarrow P = P^2$).

- Αντίστροφα, έστω $P=P^*=P^2$.
- Ονομάζουμε $E=\mathrm{Im}(P)$.
- $x\in E$, $y\in \ker(P)$, άρα $\exists\, z\in H : x=Pz$.
- Άρα $\langle x,y\rangle = \langle Pz,y\rangle = \langle z,Py\rangle = 0$.
- Συνεπώς $\mathrm{Im}(P)\perp \ker(P)$ ~~και άρα~~ όμως: $\mathrm{Im}(P)+\ker(P)=H$

διότι $\forall x\in H$, $x = \underset{\mathrm{Im}(P)}{\underset{\cap}{Px}} + \underset{\ker(P)}{\underset{\cap}{(I-P)x}}$ ⇝ διότι $P((I-P)x) = Px - P^2x = 0$.

άρα P ορθή προβολή πάνω $\mathrm{Im}(P)$

- $\{\text{κλειστοί υποχ}\} \longleftrightarrow \{P=P^*=P^2\}$

$$E \longrightarrow P_E$$
$$\mathrm{Im}(P) \longleftarrow P$$

Unitary

$U: H_1 \to H_2$ ισομετρία και επί $\Leftrightarrow U^*U = I_{H_1}$ και $UU^* = I_{H_2}$.

Μη-παραδ.

1) - $H=\ell^2(\mathbb{Z}_+)$, ορθοκ. βάση $\{e_n : n\geq 0\}$.

- $S : H\to H : e_n \mapsto e_{n+1}$.

$S^* : H \to H : e_n \mapsto \begin{cases} e_{n-1}, & n\geq 1 \\ 0, & n=0 \end{cases}$

- Τότε $\boxed{S^*S = I_{H_1}}$ και $\boxed{SS^* = P_E}$, $E=[e_0]^\perp$

2) - $H=\ell^2(\mathbb{Z}_+)$

- $\left.\begin{array}{l} A : e_n \mapsto e_{2n} \\ B : e_n \mapsto e_{2n+1} \end{array}\right\} n\geq 0$

- Επεκτείνουμε γραμμικά στην $[e_n] = c_{00}(\mathbb{Z}_+)$

- Αφού $\| A(\sum_{n=0}^{N} \langle x, e_n \rangle e_n) \|^2 = \| \sum_{n=0}^{N} \langle x, e_n \rangle e_{2n} \|^2 \overset{\text{Πυθαγόρας}}{=} \sum |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|x\|^2$.

- Άρα ο A είναι ισομετρία και άρα επεκτείνεται σε ισομετρία στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$. (Ομοίως ο B).

- Παρατηρούμε ότι $A(H) \perp B(H)$ αφού $A(H) = \overline{[e_{2n} : n \geq 0]}$

  $B(H) = \overline{[e_{2n+1} : n \geq 0]}$

- Άρα έχουμε δύο ισομετρίες με κάθετα σύνολα τιμών.
- Η C^*-άλγεβρα συμβ. $C^*(A,B) = O_2$ (~~Kuntz~~).

Joachim Cuntz

Ορισμός

Ένας $V: H_1 \to H_2$ λέγεται μερική ισομετρία (partial isometry) αν $\exists$ κλειστός υπόχωρος $E \subset H_1$: $V|_E$ ισομετρία και $V|_{E^\perp} = 0$

Άσκηση

$\Leftrightarrow$ V ισομετρία αν περιορισθεί στο $(\ker V)^\perp$.

Παρατήρηση

Ο E λέγεται αρχικός χώρος και ο $F = V(E) = V(H_1)$ τελικός χώρος. Ο F είναι κλειστός υπόχωρος αφού η $V|_E$ είναι ισομετρία και ο E είναι πλήρης.

Απ.

- Έστω $y \in \overline{F}$, $\exists (y_n) \subset F : \|y_n - y\| \to 0$
- $\exists (x_n) \subset E : y_n = V(x_n)$
- $\|x_n - x_m\| = \|V(x_n - x_m)\| = \|y_n - y_m\| \Rightarrow (x_n)$ βασική $\Rightarrow \exists x \in E$: $x_n \to x$. $\Rightarrow y = Vx$.

Παρατ.

- Κάθε unitary είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο H_1, τελ. χώρο H_2.

- Κάθε ισομετρία ομοίως με αρχ. χώρο H_1, τελ. χώρο $V(H_1)$.

- Κάθε προβολή P ομοίως με αρχ. χώρο $E = Im(P)$ και τελ. χώρο $E = Im(P)$.

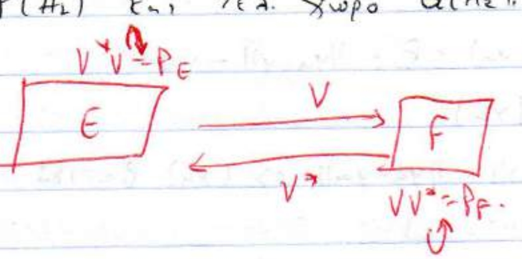
Παρατ. (Χρήσιμο)

- $H = E \oplus E^{\perp}$, $U : E \to E$ unitary.
- Ορίζουμε $V : H \to H$ με $V|_E = U$, $V|_{E^{\perp}} = 0$

- Τα $x \in H$ γράφονται $x = P_E(x) + P_{E^{\perp}}(x) \Rightarrow$
$$Vx = U(P_E(x)) + 0$$
και αρχ. χώρος = τελ. χώρος = E

Πρόταση

- Αν V μερ. ισομετρία με αρχ. χώρο $E \subset H_1$, τελ. χώρο $F \subset H_2$. Τότε $V^*V = P_E$, $VV^* = P_F$.
- Αντίστροφα αν ένας $V : H_1 \to H_2$ ικανοποιεί $V^*V = P$ προβ. τότε $VV^* = Q$ προβ. και η V είναι μερ. ισομετρία με αρχ. χώρο $P(H_1)$ και τελ. χώρο $Q(H_2)$.



Απ.

- Έστω V μερ. ισομ. από τον E στον F. Θ.δ.ο $V^*V = P_E$
- $Vx = V(P_E(x) + P_{E^\perp}(x)) = VP_E(x) + 0$. $\underset{\longrightarrow}{V_{|E}}$ ισομ.
- Άρα $\langle V^*Vx, y\rangle = \langle Vx, Vy\rangle = \langle VP_E(x), VP_E(y)\rangle = \langle P_E(x), P_E(y)\rangle =$
$\langle P_E^* P_E(x), y\rangle = \langle P_E^2(x), y\rangle = \langle P_E(x), y\rangle$ $\forall x, y$, άρα
$V^*V = P_E$

- Αντίστροφα, έστω $V^*V = P$ προβ.
- Θέτουμε $E = P(H_1)$: κλειστός υπόχωρος (διότι $\overset{P(H_1)}{\Vert}\ \ker(I-P)$ κλειστό)
- $\forall x \in H_1$, $\|Vx\|^2 = \langle Vx, Vx\rangle = \langle V^*Vx, x\rangle = \langle Px, x\rangle = \langle P^2x, x\rangle =$
$\langle Px, P^*x\rangle = \langle Px, Px\rangle = \|Px\|^2 \Rightarrow \|Vx\| = \|Px\|$.

i) Αν $x \in E$, τότε $Px = x$, άρα $\|Vx\| = \|x\|$ δηλ. $V_{|E}$ ισομ.

ii) $x \perp E \Leftrightarrow \underset{\substack{\Updownarrow \\ Vx = 0}}{Px = 0} \Rightarrow V_{|E^\perp} = 0$.

- Αν V μερ. ισομ. από τον E στον F, τότε ισχυρίζομαι ότι V^* μερ. ισομ. με αρχ. χώρο F και τελ. χώρο E.
Θ.δ.ο $V^*_{|F}$ ισομ., $V^*_{|F^\perp} = 0$.

- Πράγματι, έστω $y \in F = V(E)$, άρα $\exists!\, x \in E : y = V(x)$

i) Τότε $\|V^*y\| = \|V^*Vx\| \underset{V^*V = P_E}{=} \|P_E(x)\| \underset{x \in E}{=} \|x\| = \|Vx\| = \|y\|$. $\Rightarrow V^*_{|F}$ ισομ.

ii) Αν $z \perp F$, τότε $\forall x \in H_1$, $\langle V^*z, x\rangle = \langle z, \underset{F}{Vx}\rangle = 0 \Rightarrow V^*z = 0$.

($\Rightarrow$ όπως στο πρώτο μέρος $VV^* = P_F$).

Ισχυρισμός

Αν V φραγμ. τελεστής, τ.ε.ε.:

α) V^*V : ορθή προβολή

β) $VV^*V = V$

γ) $V^*VV^* = V^*$

δ) VV^* είναι προβολή.

$(VV^*V)^* = (V)^*$ $\Updownarrow$ $V^*VV^* = V^*$

Ειλικρινά μετά α) ⇔ β) αλλά για τον ~~…~~ V^*

Απ.

α)⇒β). Ονομάζουμε $P = V^*V$.

Τότε $\|V - VV^*V\|^2 = \|V - VP\|^2 = \|(V-VP)^*(V-VP)\| =$

$\|V^*V - V^*VP - PV^*V + PV^*VP\| = \|P - P^2 - P^2 + P^3\| = 0$

άρα $V = VV^*V$

β)⇒α). Θέτουμε $P = V^*V$.

Παρατηρούμε i) $P^* = (V^*V)^* = V^*V = P$

ii) $P^2 = (V^*V)(V^*V) = V^*(VV^*V) \overset{(\beta)}{=} V^*V = P$.

P προβολή (ορθή).

Ορισμός

Σε μια C^*-άλγεβρα A λέμε δύο προβολές P, Q ισοδύναμες αν $\exists\, V \in A$ με $V^*V = P$ και $VV^* = Q$.

12/03/2015

Πρόταση

Έστω $(E, \|\cdot\|_E)$ χ. με νόρμα, $(F, \|\cdot\|_F)$ Banach, D πυκνός υπόχωρος του E και $T: D \to F$ γραμ. απεικ. Τότε η T δέχεται συνεχή επέκταση $T_1: E \to F$ με $T_1|_D = T$ αν και μόνο αν T συνεχής. Τότε $\|T_1\| = \|T\|$.

Απ.

- Θέλουμε να ορίσουμε την $T_1 x$ $\forall x \in E$.
- $x \in \overline{D} \Leftrightarrow \exists (x_n) \subset D : x_n \to x$.
- Φυσιολογικό είναι: $T_1 x = \lim_n T x_n$.

Προβλήματα

1) $\exists$ το $\lim_n T x_n$;

2) $T_1 x$ καλά ορισμένο, δηλ αν $(y_n) \subset D$ με $y_n \to x$, τότε $\lim T y_n = T_1 x$.

Απ.

1) Ναι αφού (x_n) βασική και $(T x_n)$ βασική διότι

$\| T x_n - T x_m \| = \| T (x_n - x_m) \| \le \|T\| \cdot \|x_n - x_m\|$

και αφού ο F είναι πλήρης $\xleftrightarrow{\text{φραγμένος}}$ το $\lim_n T x_1$ υπάρχει.

2) $y_n \to x$, τότε $\| y_n - x_n \| \to 0$ (τριγ. ανισ.) $\Rightarrow$

$\| T y_n - T x_n \| \le \|T\| \|y_n - x_n\| \to 0 \Rightarrow \lim_n T x_n = \lim_n T y_n$.

Ορισμός

Ένας υπόχωρος $E \subset H$ (Hilbert) είναι αναλλοίωτος από ένα φραγμένο τελεστή $A \in B(H)$ αν $A(E) \subset E$. Θα λέμε ότι ο E ανάγει τον A αν οι $E, E^\perp$ είναι A-αναλλοίωτοι.

Παρατήρηση

Αν $A(E) \subset E$, τότε $A(\overline{E}) \subset \overline{E}$ αφού $\forall x \in \overline{E}$ $\exists (x_n) \subset E : x_n \to x$ $\Rightarrow \underset{\underset{E}{\Uparrow}}{A x_n} \to \underset{\underset{\overline{E}}{\Uparrow}}{A x}$.

~~Ορισμός~~

~~Θα λέμε ότι ο υπόχωρος E είναι~~

π.χ

- E κλ. υπόχ., $H = E \oplus E^\perp$, $A \in B(H)$, $P = P_E$

$A_{11}: E \longrightarrow E$

$x \longmapsto PAx$

$A_{12}: E^\perp \longrightarrow E$ και $A = \begin{array}{c|cc} & E & E^\perp \\ \hline E & A_{11} & A_{12} \\ E^\perp & A_{21} & A_{22} \end{array}$

$y \longmapsto PAy$

A_{21}: Ομοίως $(E \to E^\perp)$

A_{22}: Ομοίως $(E^\perp \to E^\perp)$

- Αν E A-αναλλ. τότε $\forall x \in E$, $Ax \in E \Rightarrow P^\perp Ax = 0 \Rightarrow$ $A_{21} = 0$ και αντίστροφα, αν: $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$

τότε $Ax = A_{11}x + 0 \in E$.

Παρατήρηση

Έπεται ότι $A(E) \subset E$ ανν $A_{21} = 0$ και ότι ο A ανάγεται από τον E ανν $A_{12} = A_{21} = 0$

Λήμμα

Ένας E είναι A-αναλλοίωτος $\Leftrightarrow AP = PAP$.

Απ.

- Αν $\boxed{A(E) \subset E} \Rightarrow \forall x \in H$, $Px \in E$, άρα $A(Px) \in E \Rightarrow$ $P^\perp APx = 0 \Leftrightarrow (I-P)AP = 0 \Leftrightarrow \boxed{AP = PAP.}$
- Αντίστροφα $AP = PAP \Rightarrow \forall x \in E$ $Ax = APx \Rightarrow PAPx \in E$

άρα $A(E) \subset E$.

- Αν $\boxed{A(E^{\perp}) \subset E^{\perp}} \iff (I-P)^{\perp} A(I-P) = 0 \iff PA(I-P) = 0 \iff$ $\boxed{PA = PAP}$

- Και με τις δύο σχέσεις μαζί έχουμε:

$$A(E) \subset E \quad \text{και} \quad A(E^{\perp}) \subset E^{\perp}$$
$$\Updownarrow$$
$$AP = PAP \quad \text{και} \quad PA = PAP$$
$$\Updownarrow$$
$$\boxed{AP = PA}$$
$$\Downarrow$$
$$APP = PAP \quad \text{και} \quad PAP = PPA$$

- $\boxed{A(E) \subset E} \iff AP = PAP \iff PA^* = PA^*P \quad (P = P^*) \iff \boxed{A^*(E^{\perp}) \subset E^{\perp}}$

Σχόλιο

ΔΛδ ένας υπόχωρος E ανάγει τον A ανν $AP = PA$.

Πρόβλημα Αναλλοίωτου υπόχωρου (Γενικά η απάντηση είναι ΟΧΙ)

Κάθε τελεστής σε χώρο Banach X έχει μη τετριμμένο κλειστό αναλλοίωτο υπόχωρο.

i) Αν $\dim X < \infty$, τότε ΝΑΙ αφού κάθε τελ. A έχει ιδιοδιάνυσμα.

ii) Χώρος μη διαχωρίσιμος ΝΑΙ

Απ.

Παίρνουμε $x \in X \setminus \{0\}$. Θεωρούμε $E = \overline{[x, Ax, A^2x, \dots]} \neq X$ αφού ο E είναι διαχωρίσιμος. Φυσικά είναι A-αναλλοίωτος.

Ανοικτό για $X = \ell^2$ (μάλλον όχι) ~> Καλή τύχη!

Το (μίνι) Φασματικό Θεώρημα

Κάθε φυσιολογικός τελεστής T σε έναν μιγ. χώρο Hilbert H με $\dim H<\infty$ είναι διαγωνοποιήσιμος δηλ. $\exists$ ορθοκ. βάση $\{e_k\}$ του H, $a_k \in \mathbb{C}$: $Te_k = a_k \cdot e_k$ $\forall k$. Ισοδύναμα ο T είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με διαγώνιο τελεστή δηλ. $A = UTU^{-1}$, A διαγώνιος, U ορθομ.

Λήμμα

- $T \in B(H)$, normal: $T^*T = TT^*$, x ιδιοδιάνυσμα του T: $\exists \lambda \in \mathbb{C}$: $Tx = \lambda x \Rightarrow T^*x = \bar{\lambda} x$.

Απ.

- $\|(T^* - \bar{\lambda} I)x\|^2 = 0$; ΝΑΙ
- Θέτουμε $S = T - \lambda I \Rightarrow S^* = T^* - \bar{\lambda} I$
- Τότε $\|S^*x\|^2 = \langle S^*x, S^*x\rangle = \langle SS^*x, x\rangle \overset{S \text{ normal}}{=} \langle S^*Sx, x\rangle = \langle Sx, Sx\rangle = 0$ αφού $Sx = Tx - \lambda x = 0$.

Άσκηση

- $Se_n = e_{n+1}$ στον ℓ^2.
- Ο S δεν έχει ιδιοδιανύσματα αλλά ο S^* έχει πολλά: παράγει τον ℓ^2., δηλ η κλειστή γραμμική θήκη των ιδιοδιανυσμάτων είναι ο ℓ^2.

$\Downarrow$

- ~~Άρα κάθε τελεστής ...~~
- Άρα οι ιδιόχωροι ενός φυσιολ. τελεστή T ανάγουν τον T και είναι και κάθετοι μεταξύ τους.
- Δηλ. $\lambda \in \mathbb{C}$: $M_\lambda = \{x \in H : Tx = \lambda x\}$: ιδιόχωρος με ιδιοτιμή λ.
  $= \ker(T - \lambda I)$

· Άρα $Tx=\lambda x \iff T^*x=\bar{\lambda} x$. και άρα $x\in M_\lambda$. Τότε
$M_\lambda = \ker(T-\lambda I) = \ker(T^*-\bar{\lambda} I)$.

· Άρα αν $x\in M_\lambda$, τότε $T^*x=\bar{\lambda} x \Rightarrow T^*x\in M_\lambda$ διότι
$T(T^*x) - \lambda T^*x = T^*(Tx-\lambda x)=0$.

· Ισοδύναμα το $\boxed{M_\lambda^\perp \text{ είναι } T\text{-αναλλ.}}$

· Αν $\lambda\neq\mu$, τότε $M_\lambda \perp M_\mu$

Απ.

· Έστω $x\in M_\lambda$, $y\in M_\mu$. Τότε $\lambda\langle x,y\rangle = \langle\lambda x,y\rangle=\langle Tx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle$
$= \langle x,\bar{\mu} y\rangle = \mu\langle x,y\rangle \Rightarrow (\lambda-\mu)\langle x,y\rangle=0 \Rightarrow \langle x,y\rangle=0$

Απ. (Θεωρήματος)

· $T:H\to H$, $\dim H = n<\infty$, T normal.

· Οι ιδιοτιμές είναι οι λύσεις της $\det(T-\lambda I)=0$, συνεπώς
$\{\lambda_1,\dots,\lambda_k\}$, $k\le n$. Θέτουμε $M_i = M_{\lambda_i}$ $\forall i$.

· Οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι M_i είναι κάθετοι ανά δύο και
$T_{|M_i} = \lambda_i I_{M_i}$, δηλ. $T_{|M_i} = \begin{bmatrix}\lambda_i & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i\end{bmatrix}$ διαγώνιος.

· Αν $\boxed{H_0 = \bigoplus_{i=1}^{k} M_{\lambda_i}}$ τότε ο $T_{|H_0}$ διαγωνοποιείται.

· Επίσης $T(H_0)\subset H_0$ αφού οι M_i είναι T-αναλλ. Αφού $\boxed{T \text{ normal}}$
$\Rightarrow \boxed{T(H_0^\perp)\subset H_0^\perp} = H_1$.

· Θέτουμε $T_1 = T_{|H_1}$. Αν λ ιδιοτιμή του T_1 τότε $\exists\, x\in H_1\setminus\{0\}$
ώστε $\underset{\overset{\shortparallel}{Tx}}{T_1 x} = \lambda x \Rightarrow \lambda$ ιδιοτιμή του T και x ιδιοδιάνυσμα του $T \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in H_0$ και $x \in H_0^{\perp} \Rightarrow x = 0$ Άτοπο. Άρα $H_{\perp} = \{0\} \Rightarrow$

$\boxed{H_0 = H}$

Τι γίνεται όταν $\dim H = \infty$;

1) $\exists$ άραγε ιδιοτιμές;

Απ. ΟΧΙ γενικά.

Άσκηση: $H = L^2([0,1])$, $(Tf)(x) = x f(x)$, $f \in L^2$. Ν.δ.ο ο T δεν έχει ιδιοτιμή. (Εδώ $T = T^*$)

2) Ακόμα και αν $\exists$ ιδιοτιμές πως μπορούμε να δείξουμε ότι οι ιδιόχωροι $\{M_\lambda : \lambda$ ιδιοτιμή$\}$ "παράγουν" τον H, δηλ. η κλειστή γραμμική θήκη ισούται με H.

Παρατήρηση

Αν ένας T είναι διαγωνοποιήσιμος, τότε T normal.

Απ.

- $\exists \{e_n\}$ ορθοκ. βάση του H από ιδιοδιανύσματα του T. Όμως από το Λήμμα $\exists \lambda_k \in \mathbb{C}$: $Te_k = \lambda_k \cdot e_k \Leftrightarrow T^* e_k = \bar{\lambda} e_k$. Άρα ο T^* είναι διαγωνοποιήσιμος και ως προς την ίδια βάση μάλιστα.

- Άρα $T^* T e_k = T^*(\lambda e_k) = |\lambda|^2 e_k$

$T T^* e_k = T(\bar{\lambda} e_k) = |\lambda|^2 e_k$.

Φασματικό Θεώρημα (1η Μορφή)

Ένας τελεστής $T \in B(H)$ είναι normal ανν $\exists$ χώρος μέτρου (X,μ), ορθομ. τελεστής $U: L^2(X,\mu) \to H$ και συνάρτηση $f \in L^\infty(X,\mu)$ ώστε $T = U M_f U^{-1}$ όπου M_f πολλ/κός τελεστής.