Φασματικό Θεώρημα (1η Μορφή)

Ένας τελεστής $T \in B(H)$ είναι normal ανν $\exists$ χώρος μέτρου (X,μ), ορθομ. τελεστής $U: L^2(X,\mu) \to H$ και συνάρτηση $f \in L^\infty(X,\mu)$ ώστε $T = U M_f U^{-1}$ όπου M_f πολ/κός τελεστής.

18/03/2015

• Σε χώρους H με $\dim H < \infty$, Φασμ. Θ.: T φυσιολογικός $\Rightarrow$ $\exists$ ορθοκ. βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ του H : $Te_k = a_k \cdot e_k$, $\forall k$, $a_k \in \mathbb{C}$

• Δηλ. $T \overset{\text{unitarily}}{\approx} D_a$, $D_a(e_k) = a_k \cdot e_k$

μέσω της επιλογής ορθοκ. βάσης του H.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "T"] & H \\ \mathbb{C}^n \arrow[u, "U"] \arrow[r, "D_a"'] & \mathbb{C}^n \arrow[u, "U"'] \end{tikzcd}$$

Γενίκευση: Αν H Hilbert και $T \in B(H)$ normal τότε και μόνο τότε $\exists$ (X,μ), $\exists$ $U: L^2(X,\mu) \to H$:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "T"] & H \\ L^2(\mu) \arrow[u, "U"] \arrow[r, dashed, "M_f"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & L^2(\mu) \arrow[u, "U"'] \end{tikzcd}$$

$\circlearrowright$: Δηλαδή το $U^{-1}TU$ είναι πολ/κός τελεστής από $L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu)$

• Παρατήρηση $T^*T = TT^*$ αναγκαία διότι κάθε M_f είναι normal ($M_f^* = M_{\bar f}$) αφού $M_f M_f^*(g) = M_f M_{\bar f}(g) = M_f(\bar f g) = f(\bar f g) = \bar f (f g) = M_f^* M_f(g)$ $\forall g$. Άρα και ο $U M_f U^{-1}$ είναι normal.

• Παρατήρηση

• Δεν αληθεύει ότι κάθε M_f είναι διαγωνοποιήσιμος: μπορεί να μην έχει ιδιοτιμές (π.χ. M_f όπου $f(x)=x$ στον $L^2([0,1])$).

• Όμως κάθε M_f είναι "προσεγγιστικά" διαγωνοποιήσιμος:

• Παρατήρηση

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $\perp$ ανά δύο προβολές $P_1, \dots, P_n$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ ώστε $\| M_f - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k \| < \varepsilon$

↑ Διαγώνιος με διαγώνια στοιχεία $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

• Διαγωνοποιείται ως προς την ένωση ορθοκ. βάσεων $\forall P_k(H), \forall k$

Απ.

• Έστω $f \in L^\infty(X,\mu)$: ουσ. φραγμ. και μετρήσιμη.

• Είναι σ.π. ίση με μια φραγμ. μετρήσιμη f_1 οπότε $M_f = M_{f_1}$.

• Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε f φραγμ: $f(X) \subset \mathbb{C}$ φραγμ.

• Άρα $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ μπάλες $V_1, \dots, V_n$ με ~~διάμετρο~~ $\leq \varepsilon$ διάμετρο ώστε $f(X) \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_k$.

• Τις κάνουμε ξένες: $\Delta_1 = V_1, \dots, \Delta_k = V_k \setminus \left(\bigcup_{i<k} V_i\right)$. Τα Δ_k είναι Borel, ξένα ανά δύο και καλύπτουν το $f(X)$.

• Ονομάζουμε $X_k = f^{-1}(\Delta_k)$ τα μετρ. ξένα ανά δύο.

• Έχουμε $X = \bigcup_{k=1}^{n} X_k$

$\forall k=1,\dots,n$, σταθεροποιώ ένα $\lambda_k \in \Delta_k$.

· Για $x \in X$ $\exists$ k: $x \in X_k \Rightarrow f(x) \in \Delta_k \subset V_k$.

· ~~Για αυτό το $\lambda_k \in \Delta_k$~~, $|f(x) - \lambda_k| < \varepsilon$, ονομάζουμε $f_\varepsilon = \sum \lambda_k \chi_{X_k}$ και παρατηρούμε ότι $\forall x \in X$, $\boxed{|f(x) - f_\varepsilon(x)| < \varepsilon.}$

· Δηλ. $\|f - f_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon$, άρα $\boxed{\|M_f - M_{f_\varepsilon}\|_\infty} = \|M_{(f-f_\varepsilon)}\|_\infty \le \|f - f_\varepsilon\|_\infty \boxed{<\varepsilon}$

· Έχουμε $M_{f_\varepsilon} = \sum \lambda_k M_{\chi_{X_k}}$ και $\boxed{M_{\chi_{X_k}} = P_k \text{ προβολή}}$ στον υπόχωρο $\{g \in L^2 : g(t) = 0 \text{ σ.π. } \forall t \notin X_k\}$.

Άλλη απόδειξη:

Ο $M_{\chi_{X_k}}$ είναι προβολή: $M_{\chi_{\Delta_k}} = M^*_{\chi_{\Delta_k}}$ διότι $\chi_{\Delta_k} = \overline{\chi_{\Delta_k}}$

$$M^2_{\chi_{\Delta_k}} = M_{\chi_{\Delta_k}} \quad \text{διότι } \chi^2_{\Delta_k} = \chi_{\Delta_k}$$

δηλ. $P^2 = P^* = P$.

Σχόλιο

Βλέπουμε ότι "$M_f = \int \lambda \, dP_\lambda$" με dP_λ: μέτρο με τιμές προβολές.

Παρατήρηση

· Όταν $T \in B(H)$ normal σε $\dim H < \infty$, διαγωνοποιήθηκε με στοιχεία τις ιδιοτιμές του.

· Στην γενική περίπτωση ελπίζουμε να ολοκληρώσουμε πάνω στο σύνολο των "προσεγγ. ιδιοτιμών".

· ~~Αν~~ λ ιδιοτιμή του $T \Leftrightarrow T - \lambda I$ όχι 1-1 $\overset{\dim H < \infty}{\Longleftrightarrow} T - \lambda I$ όχι αντιστρέψιμος.

· Ορίζουμε $\boxed{\sigma_p(T) = \{\text{ιδιοτιμές του } T\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ όχι } 1\text{-}1\}}$

Ορισμός (Φάσμα)

$$\boxed{\sigma(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ δεν έχει φραγμ. αντίστροφο} \}.}$$

π.χ

- Αν $(Tf)(x) = x f(x)$, $f \in L^2([0,1])$ τότε $\forall\, \lambda \in [0,1]$ ο $T - \lambda I$ δεν έχει φραγμ. αντίστροφο.

- Ενώ $\forall\, \lambda \notin [0,1]$, τότε ο $T - \lambda I$ έχει φρ. αντίστροφο τον τελεστή M_f όπου $f(x) = \frac{1}{x-\lambda}$, $x \in [0,1]$.

Παρατήρηση

- $\forall\, g \in L^2([0,1])$, $M_f (T - \lambda I) g = g$ διότι:

$((T-\lambda I) g)(x) = (x-\lambda) g(x)$ $\forall\, x \in [0,1]$ και

$(M_f (T-\lambda I) g)(x) = \frac{1}{x-\lambda} (x-\lambda) g(x) = g(x) \Rightarrow$

$M_f (T - \lambda I) = I$.

- Ομοίως $(T - \lambda I) M_f = I$.
- $\|M_f\| = \|f\|_\infty = \sup \left\{ \frac{1}{|x-\lambda|} : x \in [0,1] \right\} < \infty$ αφού $\lambda \notin [0,1]$

$$\| \qquad \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, [0,1])}$$

Πότε υπάρχει φραγμ. αντίστροφος;

- $A : H \to K$ γραμ. 1-1 και επί $\Rightarrow \exists\, A^{-1} : K \to H$ γραμμ. 1-1 και επί.
- Αν A φραγμ $\Rightarrow A^{-1}$ φραγμ;

Ισχυροποίηση της υπόθεσης: "A 1-1" $\longrightarrow$ "A κάτω φραγμ."

Κάτω φραγμένος: $\exists\, \delta > 0 : \forall\, x \in H\,;\ \|Ax\| \geq \delta \|x\| \ (\Rightarrow A\ 1\text{-}1)$

Πρόταση

$A \in B(H_1, H_2)$ έχει φραγμ. αντίστροφο $\Leftrightarrow$ είναι κάτω φραγμ. και έχει πυκνή εικόνα. (Ισχύει και χωρίς πληρότητα).

Απ.

$(\Rightarrow)$ Αν $\exists\, A^{-1} \in B(H_2, H_1)$ τότε ο A έχει πυκνή εικόνα (είναι επί) και είναι κάτω φραγμ. διότι $\forall\, x \in H_1$ ισχύει:
$\|x\| = \|A^{-1}Ax\| \leq \|A^{-1}\|\,\|Ax\|$ (A^{-1} φραγμ.) $\Rightarrow \|Ax\| \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|}\|x\|$.

$(\Leftarrow)$ · $D = A(H_1)$ πυκνό στον H_2.

· Ορίζουμε $\left.\begin{array}{l} B : D \to H_1 \\ \quad Ax \to x \end{array}\right\}$ καλά ορισμένη αφού $\forall\, y \in D\ \exists!\, x \in H_1 : y = Ax$ αφού A 1-1.

· Προφανώς B γραμμ. και $BAx = x\ \forall\, x \in H_1$ και $ABy = y\ \forall\, y \in D$.

Ισχυρισμός (B φραγμ.)

· $\forall\, y \in D\ \exists!\, x \in H_1 : y = Ax$ οπότε $\|By\| = \|BAx\| = \|x\| \leq \frac{1}{\delta}\|Ax\| = \frac{1}{\delta}\|y\|$ (A κάτω φρ.)

· Άρα B φραγμ. με $\|B\| \leq \frac{1}{\delta}$

· Άρα ο B επεκτείνεται σε φραγμ. τελεστή $\tilde{B} : H_2 \to H_1$ με $\|\tilde{B}\| \leq \frac{1}{\delta}$.

Θεώρημα

Όταν H_1, H_2 είναι πλήρεις τότε:
Αν ο $A \in \underline{B}(H_1, H_2)$ έχει φραγμ. αντίστροφο ανν είναι 1-1 και επί.

(Αποτυγχάνει όταν ένας από τους δύο δεν είναι πλήρης).

Απ. (Για χώρους Hilbert)

- Αρκεί ν.δ.ο A^* έχει φραγμ. αντίστροφο διότι αν $\boxed{B = (A^*)^{-1} \text{ τότε } B^* = A^{-1}.}$

- Θ.δ.ο ο A^* είναι κάτω φραγμ. με πυκνή εικόνα.

πυκνή εικόνα: $\{A^*y : y \in H_2\}$: πυκνό στον $H_1 \iff$ αν $x \perp A^*(H_2)$ τότε $x = 0$.

Πράγματι: Έστω $x \perp A^*(H_2)$. Τότε

- $\forall y \in H_1$: $0 = \langle x, A^*y \rangle = \langle Ax, y \rangle$, δλδ $Ax \perp H_2 \Rightarrow$ $Ax = 0. \overset{A\ 1\text{-}1}{\Longrightarrow} x = 0$

$\|A^*y\| \geq \delta\|y\|$

A^* κάτω φραγμ: Δλδ $\exists \delta > 0 : \forall y \in H_2$; *

Ισχυρισμός: Αρκεί ν.δ.ο $\exists \delta > 0$; $\|A^*y\| = 1 \Rightarrow \|y\| \leq \frac{1}{\delta}$.

[διότι τότε, $\forall z \in H_1 \setminus \{0\}$ θέτουμε $y = \frac{z}{\|A^*z\|}$ οπότε $\|A^*y\| = 1$ άρα $\left\|\frac{z}{A^*z}\right\| \leq \frac{1}{\delta} \Rightarrow$ +

Παρατήρηση

$A^*z \neq 0$ διότι $A(H_1)$ πυκνό άρα A^* είναι 1-1.]

Απ. Ισχυρ.

- Θέτουμε $S=\{y\in H_2 : \|A^*y\|=1\}$. Θ.δ.ο. S φραγμ.

Παρατήρηση

- $\forall z\in H_2$, τότε $\forall y\in S$ ισχύει:
- $\exists x\in H_1 : z = Ax$, άρα $|\langle z,y\rangle| = |\langle Ax,y\rangle| = |\langle x,A^*y\rangle| \le \|x\|\cdot\|A^*y\| = \|x\|$.

Άρα:

- $\forall z\in H_2$, $\sup\limits_{y\in S}|\langle z,y\rangle|<\infty$ (Το S είναι "ασθενώς φραγμ.")
  Θ.δ.ο. S είναι $\|\ \|$-φραγμ.
- Έστω $k\in\mathbb{N}$. Θέτουμε $F_k = \{z\in H_2 : \sup\limits_{y\in S}|\langle z,y\rangle|\le k\}$.

Παρατήρηση

$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k = H_2$. και κάθε F_k κλειστό.

Baire: $H_2=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$, H_2 πλήρης, F_k κλειστά $\Rightarrow \exists k : (F_k)^\circ\neq\emptyset$.

- ΔΛΣ $\exists \varepsilon>0\ \exists z_0\in H_2 : F_k\supset B(z_0,\varepsilon)$.
- Έστω $z\in H_2$, $\|z\|=1$. Θέτουμε $z'=z_0+\frac{\varepsilon}{2}z \Rightarrow z'\in B(z_0,\varepsilon)$
  διότι $\|z'-z_0\|=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.
- Άρα $z'\in F_k \Rightarrow \forall y\in S$, $|\langle z',y\rangle|\le k. \Rightarrow \forall y\in S$, $|\langle \frac{\varepsilon}{2}z,y\rangle| =$
  $|\langle z'-z_0,y\rangle| \le |\langle z',y\rangle| + |\langle z_0,y\rangle| \le 2k \Rightarrow \forall y\in S$, $\boxed{\cancel{|\langle z,y\rangle|\le\frac{2k}{\varepsilon}}}$
  $\forall z\in H_2$, $\|z\|=1$. $\boxed{|\langle z,y\rangle|\le\frac{4k}{\varepsilon}}$.

- Άρα $\forall y\in S$ $\|y\|=\sup\{|\langle z,y\rangle| : \|z\|=1\}\le\frac{4k}{\varepsilon}$, δηλ.
  $\boxed{S\subset \overline{B(0,\frac{4k}{\varepsilon})}}$

- $T \in B(H_2, H_1)$
- Φάσμα του T: $\sigma(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I$ δεν έχει αντίστροφο$\}$
- Σημειακό Φάσμα: $\sigma_p(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I$ όχι 1-1$\}$.

- Το $\sigma(T) \neq \emptyset$ λόγω Θ. Liouville σε πλήρεις χώρους. (όπως το Θεμ. Θεωρ. Αλγ.)

- Ενώ το $\sigma_p(T)$ μπορεί $= \emptyset$.

- $\sigma(T)$ κλειστό και φρ-μ. $\subset \mathbb{C}$.

Σχόλιο (Όταν δουλεύουμε με δύο χώρους)
- Όταν έχουμε $T : H_1 \to H_2$ μπορούμε πάντα $H = H_1 \oplus H_2$.
- Τότε $\widetilde{T} = \begin{bmatrix} 0 & T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : H \to H$.
  η απεικόνιση $T \to \widetilde{T}$ γραμμική
- Αλλά $\begin{bmatrix} 0 & T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & S \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & TS \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
  $= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Παρατήρηση
- Ο I είναι αντιστρέψιμος.
- Αρκετά κοντά του όλοι είναι αντιστρέψιμοι:

Θεώρημα

Αν $\| I - T \| < 1$ τότε T αντιστρέψιμος.

Απ.

• $\sum_{k=0}^{\infty}(I-T)^k$: συγκλίνει απόλυτα διότι $\sum_{k=0}^{\infty}\|(I-T^k)\| \le \sum_{k=0}^{\infty}\|I-T\|^k = \frac{1}{1-\|I-T\|}$. Άρα συγκλίνει (πληρότητα). Απόδειξη:

• Θέτουμε $S_n = \sum_{k=0}^{n}(I-T)^k$, τότε η S_n είναι βασική διότι $\|S_n - S_m\| = \|\sum_{k=m+1}^{n}(I-T)^k\| \le \sum_{k=m+1}^{n}\|I-T\|^k < \varepsilon$ για αρκετά μεγάλο m.

Πληρότητα $\exists\, S = \lim_n S_n \in B(H)$.

• $(I-T)S_n = (I-T) + \dots + (I-T)^{n+1}$. Τότε

$(I-T)S_n - S_n = (I-T)^{n+1} - I \Rightarrow$

• $(I-T)S - S = 0 - I \Rightarrow \boxed{\cancel{ST=I}}$

$TS = I$

ομοίως, $ST = I$.

19/03/2015

• Ο χώρος των τελεστών είναι χώρος Banach

• $(E, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα.

• $(F, \|\cdot\|)$ Banach

• Τότε ο $(B(E,F), \|\cdot\|)$ είναι πλήρης με $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\|=1\}$.

(όπου $B(E,F)$ "ποτέ" χώρος Hilbert αν $\dim F \ge 2$).

Απ.

• Έστω $(T_n)_n \subset B(E,F)$ βασική: $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0 : m,n \ge n_0,\ \|T_m - T_n\| < \varepsilon$.

• Άρα $\forall x \in E,\ \|x\|=1$ έχουμε $\|T_n x - T_m x\| \le \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon.\ \forall m,n \ge n_0$.

- Άρα η $(T_n x)_n$ είναι βασική και F πλήρης $\Rightarrow \exists \lim_n T_n x = Tx$ με $\|\cdot\|_F$.

- Εύκολα ελέγχει κανείς ότι ορίζεται $T: x \mapsto Tx$ και ότι είναι γραμμική.

- $\boxed{\|T_n - T\| \xrightarrow[n]{} 0}$

$\forall\, n, m \geq n_0$, $\|T_n x - T_m x\| < \varepsilon \|x\| \Rightarrow \|T_n x - T_m x\| < \varepsilon$ για $\|x\| = 1$.

- Άρα για $m \to \infty$, $\|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon \quad \forall x : \|x\| = 1$, $n \geq n_0$.

- Έχουμε $\|T_n - T\| = \sup\{\|T_n x - Tx\| : x \in E, \|x\| = 1\} \leq \varepsilon$.

- Άρα για $n \geq n_0$ $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$.

- $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, όπου $|z| < 1$.

- Όταν $A \in B(H)$ με $\|I - A\| < 1$ τότε $\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (I - A)^{-1}$.

- $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I$ δεν έχει φραγμ. αντίστροφο$\}$.

$\cup\!|$

$\sigma_p(A) \equiv$ οι ιδιοτιμές του $A = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(A - \lambda I) \neq \{0\}\}$.

Το $\sigma(A)$ φραγμένο από $\|A\|$.

Απ.

Αν $\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|A\|$ τότε $\|\frac{A}{\lambda}\| < 1 \Rightarrow$ ο $I - \frac{A}{\lambda}$ έχει αντίστροφο.

τον $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n$, άρα και ο $\lambda I - A$ έχει αντίστροφο.

- Άρα $\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} \le \|A\|$.

- Ορίζουμε $\boxed{\rho(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}}$ φασματική ακτίνα.

Παρατήρηση

- $\rho(A) < \|A\|$ για $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$, $\|A\| = 1$.

- Όμως $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{0\}$. διότι αν $\lambda \neq 0$ τότε ο $\lambda - A = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ έχει αντίστροφο.

- Άρα $\sigma(A) = \{0\} \Rightarrow \rho(A) = 0$ ενώ $\|A\| = 1$.

Το $\sigma(A)$ είναι κλειστό.

- Έστω $\lambda_0 \notin \sigma(A)$. Τότε $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ ισχύει $\left|1 - \frac{z-\lambda}{z-\lambda_0}\right| = \left|(z-\lambda_0)^{-1}\left((z-\lambda_0) - (z-\lambda)\right)\right| = \left|(z-\lambda_0)^{-1}(\lambda-\lambda_0)\right|$.

αντίστοιχα ~~όμοια~~. ($A - \lambda = A - \lambda I$ για ευκολία).

- $\|I - (A-\lambda)(A-\lambda_0)^{-1}\| = \|((A-\lambda_0) - (A-\lambda))(A-\lambda_0)^{-1}\| = \|(\lambda-\lambda_0)\| \cdot \|(A-\lambda_0)^{-1}\| < 1$ για αρκετά μικρό λ_0.

- Άρα ο $(A-\lambda)(A-\lambda_0)^{-1}$ έχει αντίστροφο $\Rightarrow$ ο $A-\lambda$ έχει αντίστροφο

- Δηλ. $\exists$ μπάλα B γύρω από το λ_0 στην οποία το $A - \lambda I$ έχει αντίστροφο $\forall \lambda \in B$. $\Rightarrow$ $\mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ ανοιχτό.

$\sigma(A) \neq \emptyset$

- Έστω $\sigma(A) = \emptyset \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{C}\ \exists\ o (A-\lambda I)^{-1}$.
- Έστω $F : \lambda \longmapsto \cancel{(\lambda I - A)^{-1}} (A-\lambda I)^{-1}$.
- Θ.Δ.ο η F έχει μιγ. παραγ. $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. και $\lim_{|\lambda| \to \infty} \|F(\lambda)\| = 0. \Rightarrow$ από Θ. Liouville $F \equiv 0$. Άτοπο!

αφού $F(0) = A^{-1} \neq 0$.

Παραγωγίσιμη

- $f(\lambda) = \frac{1}{z-\lambda}$, $z \in \mathbb{C}$ σταθερό.
- $\left| \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} - \frac{1}{(z-\mu)^2} \right| = \left| \frac{1}{(z-\mu)(z-\lambda)} - \frac{1}{(z-\mu)^2} \right| \xrightarrow[\lambda \to \mu]{} 0$

$\downarrow$ αντίστοιχα

- $\left\| \frac{(A-\lambda)^{-1} - (A-\mu)^{-1}}{\lambda - \mu} - (A-\mu)^{-2} \right\| = \Big\| \frac{(A-\lambda)^{-1}((A-\mu) - (A-\lambda)) \cdot (A-\mu)^{-1}}{\lambda-\mu}$

$- (A-\mu)^{-2} \Big\| = \| (A-\lambda)^{-1}(A-\mu)^{-1} - (A-\mu)^{-2} \|$. *

- Θ.Δ.ο $\lambda \to \mu \Rightarrow (A-\lambda)^{-1} \to (A-\mu)^{-1}$ οπότε η $* \to 0$ και έχουμε δείξει ότι η F έχει παράγωγο.

- Έχουμε, $\|B^{-1} - C^{-1}\| = \|B^{-1}(B-C)C^{-1}\| = \|(B^{-1} - C^{-1})(B-C)C^{-1} + C^{-1}(B-C)C^{-1}\| \leq \|B^{-1} - C^{-1}\| \|B-C\| \cdot \|C^{-1}\| + \|B-C\| \cdot \|C^{-1}\|^2 \Rightarrow$

$\|B^{-1} - C^{-1}\| (1 - \|B-C\| \|C^{-1}\|) \leq \|B-C\| \cdot \|C^{-1}\|^2$.

- Άρα για $B \to C \Rightarrow \|B-C\| \to 0 \Rightarrow \|B^{-1} - C^{-1}\| \to 0$.

- Άρα αν $F(\lambda)=(A-\lambda I)^{-1}$ τότε $\dfrac{F(\lambda)-F(\mu)}{\lambda-\mu} \xrightarrow[\lambda\to\mu]{\|\cdot\|} (A-\mu I)^{-2}$.

Hahn-Banach

- Έστω $\varphi : B(H) \to \mathbb{C}$ γραμ. και συνεχής.
- Ονομάζουμε $f(\lambda)=\varphi(F(\lambda))=\varphi((A-\lambda I)^{-1})$.

- Άρα $\dfrac{f(\lambda)-f(\mu)}{\lambda-\mu} \xrightarrow[\lambda\to\mu]{} \varphi((A-\mu I)^{-2}) \Rightarrow$ η f είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$.

- Επιπλέον $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} f(\lambda)=0$.

- Υπολογίζουμε $\lambda I - A = \lambda\left(I-\frac{A}{\lambda}\right) \Rightarrow (\lambda I-A)^{-1} \overset{(\lambda>\|A\|)}{=} \frac{1}{\lambda}\left(I-\frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^{n}$.

- Άρα $\|(\lambda I-A)^{-1}\| \le \frac{1}{|\lambda|}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{A}{\lambda}\right\|^{n} = \frac{1}{|\lambda|}\cdot\frac{1}{1-\|\frac{A}{\lambda}\|} = \frac{1}{|\lambda|-\|A\|} \Rightarrow$

$\lim\limits_{|\lambda|\to\infty}|f(\lambda)| \le \lim\limits_{|\lambda|\to\infty}\|(\lambda-A)^{-1}\|=0$.

- Άρα δείξαμε: $\forall\, T\in B(H)$, $\sigma(T)\neq\emptyset$ και συμπαγές $\subset \mathbb{C}$ με $\rho(T)\le\|T\|$.

-

- Ο $R_\lambda(T)=(\lambda I-T)^{-1}$ ορίζεται στο $\mathbb{C}\setminus\sigma(T)$.

- Ο $(\lambda I-T)$ έχει αντίστροφο $\Leftrightarrow$ T κάτω φραγμ. και έχει πυκνή εικόνα.

- $\boxed{\sigma(T)=\sigma_a(T)\cup\sigma_c(T)}$

με $\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T$ όχι πυκνής εικόνα$\}$.

$\sigma_a(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T$ όχι κάτω φρ.$\} \supset \{\lambda : \lambda I - T$ όχι 1-1$\} = \sigma_p(T)$.

- $\lambda I - T$ όχι κάτω φρ. $\Leftrightarrow \exists\ (x_n) : \|x_n\| = 1$ και $\|(\lambda I - T)x_n\| \to 0$.
  (x_n "προσεγγιστικά" ιδιοδιανύσματα).

Πρόταση

Αν T normal τότε $\sigma(T) = \sigma_a(T)$

Απ.

- Έστω $\lambda \notin \sigma_a(T)$, θ.δ.ο $\lambda \notin \sigma(T)$. $\Leftrightarrow$ ο $\lambda I - T$ έχει αντίστροφο $\Leftrightarrow \lambda I - T$ είναι κάτω φρ. με πυκνή εικόνα.

- Αρκεί ν.δ.ο ο $\lambda I - T$ έχει πυκνή εικόνα.
- Έστω $y \perp (\lambda I - T)(H)$. θ.δ.ο $y = 0$.
- Έχουμε $\lambda I - T$ είναι κάτω φρ, δηλ $\exists\ \delta > 0$: $\forall x \in H$, $\|(\lambda I - T)x\| \geq \delta\|x\|$.
- Άρα T normal $\Rightarrow \lambda I - T$ normal. ~~(Άρα T normal)~~

- Άρα $\|(\lambda I - T)x\| = \|(\lambda - T)^* x\| \geq \delta\|x\|$. $\Rightarrow (\lambda I - T)^*$ είναι κάτω φρ.

- Αν $y \perp (\lambda I - T)(H)$ τότε $\forall x \in H$ $0 = \langle y, (\lambda I - T)x\rangle = \langle(\lambda I - T)^* y, x\rangle \Rightarrow (\lambda I - T)^* y = 0 \Rightarrow y = 0$.

Πρόταση

Αν $A = A^*$ τότε ο αριθμός $\|A\|$ ή $-\|A\|$ ανήκει στο $\sigma(A)$.

Απ.

- Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Υπολογίζουμε: $\|A^2x - \lambda^2 x\|^2 = \langle A^2x - \lambda^2 x, A^2 x - \lambda^2 x\rangle =$
$\|A^2x\|^2 - 2\langle A^2x, \lambda^2 x\rangle + \|\lambda^2 x\|^2 = \|A^2x\|^2 - 2\lambda^2 \cdot \|Ax\|^2 + \lambda^4\|x\|^2$

- $\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1\}$; άρα $\exists\ (x_n) : \|x_n\| = 1 : \|Ax_n\| \to \|A\|$
$\lambda = \|A\|$.

- Άρα $\|A^2x_n - \lambda^2 x_n\|^2 = \|A^2x_n\|^2 - 2\lambda^2\|Ax_n\|^2 + \lambda^4 \leq (\|A\|\cdot\|Ax_n\|)^2$
$-2\lambda^2\|Ax_n\|^2 + \lambda^4 \to 0$ καθώς $\|Ax_n\| \to \lambda$.

- Δείξαμε $\lambda^2 \in \sigma_a(A^2) \subset \sigma(A^2) \Rightarrow$ ο $\lambda^2 I - A^2$ δεν έχει αντίστροφο $\Leftrightarrow$ ο $(\lambda I - A)(\lambda I + A)$ δεν έχει αντίστροφο.
- Άρα κάποιος από τους δύο δεν έχει αντίστροφο, δηλ $\lambda \in \sigma(A)$ ή $-\lambda \in \sigma(A)$ με $\lambda = \|A\|$.

Πρόταση

Αν $A = A^*$ τότε $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Απ.

- $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, τότε $\forall x \in H \setminus \{0\}$, $0 < |\lambda - \bar{\lambda}| \cdot \|x\|^2 = |\langle (A - \lambda I)x, x\rangle -$
$\langle (A - \bar{\lambda} I)x, x\rangle| = |\langle (A - \lambda I)x, x\rangle - \langle x, (A - \lambda I)x\rangle| \leq 2\|(A - \lambda I)x\| \cdot \|x\| \Rightarrow$
$\|(A - \lambda I)x\| \geq \frac{|\lambda - \bar{\lambda}|}{2} \cdot \|x\| \quad \forall x \neq 0$

- Άρα ο $A - \lambda I$ είναι φρ. $\Rightarrow \lambda \notin \sigma_a(A) \Rightarrow \lambda \notin \sigma(A)$.

A normal.

$\Delta\lambda\varsigma$ $A = A^* \in B(H)$ τότε $\sigma(A) \sim [-\|A\|, \|A\|]$

- Θεωρούμε το πολυώνυμο $p(\lambda) = \sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^k$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$A = A^*$
- Τότε $p(A) = a_0 I + a_1 A + \dots + a_N A^N \in B(H)$.
- Τότε $p(A)^* = \bar{a}_0 I + \bar{a}_1 A + \dots + \bar{a}_N A^N$.
- Τότε $p(A)$ είναι normal.

Κρίσιμο:

$\| p(A) \| = \sup \{ |p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A) \} \leq \{ |p(\lambda)| : \lambda \leq \|A\| \}$.

Weierstrass: Αν $f : [-\|A\|, \|A\|] \to \mathbb{C}$ συνεχής, τότε $\exists$ (p_n) ακολ. πολυωνύμων : $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο $\Delta = [-\|A\|, \|A\|]$.

- Τότε $\| p_n(A) - p_m(A) \| \leq \| p_n - p_m \|$ στο Δ.

Άρα η $(p_n(A))$ συγκλίνει ως προς $\|\cdot\|$.

Ορισμός

$f(A) = \lim_n p_n(A)$.