26/03/2015

- Έστω $A=A^*$.

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0 : \mathcal{P} &\longrightarrow B(H) \\ p &\longmapsto p(A) \end{aligned}\right\}$$ συναρτησιακός λογισμός για πολυώνυμα.

- Σκοπός μας είναι να επεκτείνουμε τον φ_0 σε πιο γενικές συναρτήσεις.

- $\underbrace{\sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^n}_{f(\lambda)} \rightsquigarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$ (δυναμοσειρές)

- Ομοίως $f(A) = \sum_{n=0}^{N} a_n A^n \rightsquigarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$ όταν $\exists$ το $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n A^n$.

Holomorphic function calculus.

- Σκοπός μας είναι να επεκτείνουμε τον φ_0 σε συνεχείς συναρτήσεις, δηλ. $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ συνεχείς.

- Το κάνουμε ως εξής:
- $\forall f \in C(\sigma(A))$, $\exists$ (p_n) πολυώνυμα: $p_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$ στο $\sigma(A)$. (Stone-Weierstrass)

- $\forall n$, θεωρούμε $p_n(A)$.

- Θέλουμε να δείξουμε ότι $\boxed{\lim_n p_n(A) = f(A)}$

- Αρκεί ν.δ.ο η $(p_n(A))$ είναι βασική.

Θεώρημα

$\forall$ πολυώνυμο p, $\|p(A)\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\}$

Πόρισμα

$\forall f \in C(\sigma(A))$, $\forall (p_n)$ πολ. με $\|p_n - f\|_{\sigma(A)} \to 0$ η $(p_n(A))$ συγκλίνει στον $B(H)$

Απ. Πορ.

- Ονομάζουμε $\mathcal{P}(\sigma) = \{$συναρτήσεις $p : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ που είναι πολυώνυμα$\}$.

- Έχουμε την απεικόνιση $\Phi_0 : (\mathcal{P}(\sigma), \|\cdot\|_{\sigma(A)}) \to (B(H), \|\cdot\|)$.
$p \longrightarrow p(A)$.

- Η Φ_0 είναι γραμ. και ισομετρία $\Rightarrow \exists!$ επέκταση της Φ_0 σε $\Phi_c : (\mathcal{P}(\sigma(A)), \|\cdot\|_c) \to (B(H), \|\cdot\|)$ που είναι ισομετρία.

- $\forall f \in C(\sigma(A))$ παίρνουμε $(p_n) : \|p_n - f\|_\sigma \to 0$ και

$$\underset{\underset{f(A)}{\parallel}}{\Phi_c(f)} = \lim_n \underset{\underset{\lim_n p_n(A)}{\parallel}}{\Phi_0(p_n)}.$$

π.χ

- $e^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$.

- Αν $p_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}$, τότε η $(p_n(A))$ είναι βασική.

Για $n>m$:

$$\| p_n(A) - p_m(A) \| = \| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{A^k}{k!} \| \le \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\|A\|^k}{k!} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$ αφού

η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|}$.

Λήμμα 1 (Φασματικής Απεικόνισης)

· $(A = A^* \in B(H)$, p πολ/μο$)$

$$\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Απ.

· Έστω $\mu \in \mathbb{C}$. Πότε ο $p(A) - \mu I$ (αντιστρέψιμος);

· $p(A) - \mu I = c_0 I + c_1 A + \dots + c_n A^n - \mu I =$
$(c_0 - \mu) I + c_1 A + \dots + c_n A^n = c(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \dots (\lambda - \lambda_n)$, $c, \lambda_i \in \mathbb{C}$
$(q(A) = p(A) - \mu I)$

· Τότε αν $(A - \lambda_i I)$ αντιστρέψιμος $\Rightarrow q(A)$ αντιστρ.

· Άρα $q(A) = (A - \lambda_k I) B \Rightarrow I = (A - \lambda_k I) B q(A)^{-1}$ ή
$I = q(A)^{-1} B (A - \lambda_k I)$ και άρα ο $(A - \lambda_k I)$ έχει αντίστροφο.

· Άρα $\mu \notin \sigma(p(A)) \Leftrightarrow$ κάθε $(A - \lambda_k I)$ αντιστρ.
$\mu \in \sigma(p(A)) \Leftrightarrow \exists \lambda_k : A - \lambda_k I$ όχι αντιστρ. $\Leftrightarrow$
$\exists \lambda : p(\lambda) = \mu$ ώστε $A - \lambda I$ όχι αντιστρ.

Απ. Θεωρήματος

1η περ.

Έστω $p(\lambda) = \sum a_k \lambda^k$, $a_k \in \mathbb{R}$.

- Τότε $p(A)$ αυτοσυζυγής αφού $p(A)^* = \left(\sum a_k A^k\right)^* =$
$\sum \overline{a_k} A^* = \sum \overline{a_k} A = \sum a_k A = p(A)$.

- Τότε $\|p(A)\| = \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(p(A))\} = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\}$

2η περ.

Έστω $p(\lambda) = \sum a_k \lambda^k$, $a_k \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Τότε $q(\lambda) = \overline{p(\lambda)}\, p(\lambda) = \left(\sum \overline{a_k} \lambda^k\right)\left(\sum a_m \lambda^m\right)$. πολ/μο
με πραγμ. συντελεστές (παραγωγίζουμε ~~και βάζ~~ουμε στο 0 και βρίσκουμε τους συντελεστές)

- Άρα ο $q(A)$ είναι αυτοσυζυγής οπότε από την 1η περ.
$\|q(A)\| = \sup\{|q(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} = \sup\{|p(\lambda)|^2 : \lambda \in \sigma(A)\}$

- Όμως $\|q(A)\| = \|p^*(A)^* \cdot p(A)\| = \|p(A)\|^2 \Rightarrow$
$\|p(A)\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\}$. ●

Παρατήρηση 1

- Το $p(A)$ εξαρτάται μόνο από τις τιμές του p πάνω στο $\sigma(A)$.

- Δλδ αν p, q πολ. $\forall \lambda \in \sigma(A)$ $p(\lambda) = q(\lambda)$ τότε
$\|p(A) - q(A)\| = \sup\{|p(\lambda) - q(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} = 0$.

Παρατήρηση 2.

Η επέκταση του ϕ_0 σε ϕ_c δεν λειτουργεί εν γένει για $A \neq A^*$.

π.χ

• $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ και $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$. Η f είναι συνεχής στο $\sigma(A) = \{0\}$

ενώ ο τελεστής $f(A)$ δεν ορίζεται, δηλ $\nexists B : B^2 = A$

(Άσκηση)

• Ομοίως για τον $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \cdots \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \cdots \\ \vdots & & & & \vdots \end{pmatrix}$ $\nexists B : B^2 = A$.

δηλ $A = UI$,
$U \in B(\ell^2(\mathbb{N}))$
shift.

• Ενώ αν $U \in B(\ell^2(\mathbb{Z}))$ $\exists X : X^2 = U$.

Έχουμε:

$A = A^*$ σταθερό, $\phi_c : (C(\sigma(A)), \|\cdot\|_{\sigma(A)}) \longrightarrow (B(H), \|\cdot\|)$

$f \longrightarrow f(A)$

• γραμ. και ισομετρία, προφανώς όχι επί (γιατί;)

• μορφισμός αφού $\phi_c(fg) = \phi_c(f) \cdot \phi_c(g)$

$(fg)(A) = f(A) \cdot g(A)$.

• $*$-μορφισμός αφού $\phi_c(\bar{f}) = (\phi_c(f))^*$

$\bar{f}(A) = (f(A))^*$

Απ.

Ο των f, g πολ. $f(\lambda)=\sum a_k \lambda^k$, $g(\lambda)=\sum b_m \lambda^m$

- $(fg)(\lambda) = \sum_{k,m} a_k b_m \lambda^{k+m}$

- Άρα $(fg)(A) = \sum_{k,m} a_k b_m A^{k+m} = \sum_k a_k A^k \cdot \sum_m b_m A^m$.

- Άρα ο $\boxed{\Phi_0 \text{ διατηρεί γινόμενο και } *}$

$\Downarrow$

$\boxed{\Phi_c \text{ επίσης}}$

- Αφού $\Phi_c(fg) = \lim_n \Phi_c(p_n q_n)$ με $p_n \to f$, $q_n \to g$

$= \lim_n \Phi_0(p_n q_n) = \lim_n \Phi_0(p_n) \cdot \lim_n \Phi_0(q_n) = \Phi_c(f) \cdot \Phi_c(g)$.

Παρατήρηση

- $\forall\, p$ πολ/μο, $p(A) \cdot A = A \cdot p(A)$ άρα $\forall\, f \in C(\sigma(A))$, $f(A) \cdot A = A \cdot f(A)$.

ΔΙΣ:

$\forall\, B \in B(H)$: $\boxed{AB = BA}$ ισχύει ότι $\boxed{f(A)B = B f(A)}$

ΔΙΣ: $\{A\}' = \{B \in B(H) : AB = BA\}$ είναι $*$-άλγεβρα με $I \in \{A\}'$ και είναι $\|\cdot\|$ κλειστή.

Δείξαμε : $\forall\, f \in C(\sigma(A))$, $f(A)$ μετατίθεται με το $\{A\}'$.

δηλ. $\boxed{f(A) \in \{A\}''}$

Απ.

Αν f πολ/μο, $B \in \{A\}'$ τότε $BA^2 = (BA)A = (AB)A = A(BA) = A^2 B$. (Επαγωγή $BA^k = A^k B$)

άρα $Bf(A) = f(A)B$ $\forall f$ πολ/μο, άρα λόγω συνέχειας $Bf(A) = f(A)B$ $\forall f$ συνεχή στο $\sigma(A)$.

Πρόταση (Φασματικής Απεικ.)

$\forall f \in C(\sigma(A))$, $\sigma(f(A)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\} := f(\sigma(A))$.

Απ.

- Έστω $\mu \notin \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$, οπότε η $g(\lambda) = f(\lambda) - \mu$ δεν μηδενίζεται στο $\sigma(A)$.

- Άρα η $h(\lambda) = \frac{1}{g(\lambda)}$ είναι συνεχής στο $\sigma(A)$.

- Οπότε ορίζεται ο τελεστής $h(A)$.
- Έχουμε $h(\lambda) \cdot (f(\lambda) - \mu) = 1$ $\forall \lambda \in \sigma(A)$

$$\Downarrow$$

$$\phi_c(h) \cdot \phi_c(f - \mu) = \phi_c(1)$$

$$\boxed{h(A) \cdot (f(A) - \mu I) = I}$$

Ομοίως $(f(\lambda) - \mu) h(\lambda) = 1 \Rightarrow \boxed{(f(A) - \mu I)\, h(A) = I}$

- Άρα ο $(f(A) - \mu I)$ έχει αντίστροφο τον $h(A)$.

Ανάποδα.

~~Αντίστροφα,~~

- Έστω $\mu \in \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$. Θ.δ.ο ο $f(A) - \mu I$ δεν μηδενίζεται.

- Γράφουμε $f(A) - \mu I = f(A) - f(\lambda_0) I$, $\lambda_0 \in \sigma(A)$.
- $f(A) - f(\lambda_0) I = \lim_n p_n(A)$, όπου (p_n) πολ/μα με $p_n \to f - f(\lambda_0)$ ομοιομ. στο $\sigma(A)$
- Άρα $p_n(\lambda_0) \to 0$. Θέτουμε $q_n(\lambda) = p_n(\lambda) - p_n(\lambda_0)$
- $q_n \to f - f(\lambda_0)$ ομοιομ. και $q_n(\lambda_0) = 0$. $\forall n$.

- Έχουμε $f(A) - f(\lambda_0) I = \lim_n q_n(A)$ και επιπλέον $q_n(\lambda_0) = 0$ $\forall n$, οπότε $0 \in \{q_n(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\} = \sigma(q_n(A))$. $\forall n$, οπότε ο $q_n(A)$ όχι αντιστρ. $\forall n \Rightarrow$ ο $f(A) - f(\lambda_0) I$ όχι αντιστρ. διότι αν είχε αντίστρ. τότε:

- $B(f(A) - \mu I) = I$
- $\| I - B q_n(A) \| = \| B(B^{-1} - q_n(A)) \| \leq \|B\| \| B^{-1} - q_n(A) \| = \|B\| \cdot \| (f(A) - \mu I) - q_n(A) \| < 1$ για n αρκετά μεγάλο.
$\Rightarrow$ ο $B q_n(A)$ αντιστρ. $\Rightarrow q_n(A)$ αντιστρ. Άτοπο.
- ~~Αφού $q_n(A) \to f(A)$~~