- Αντίστροφα, αν $\xi \in U_x(L^2(\sigma(A),\mu_x))$ τότε $\xi = U_x(f) = f(A)x$ για κάποια $f \in L^2(\sigma(A),\mu_x)$.

- Τότε $\exists$ πολυώνυμα (p_n): $\|p_n - f\|_2 \xrightarrow[n]{} 0$ (προσεγγίζουμε την f με συνεχή g με την $\|\cdot\|_2$ και την g με πολυώνυμα από Weierstrass ~~με~~ ομοιόμορφα και κάνουμε τριγ. ανισ.).

- Άρα $\|U_x(p_n) - U_x(f)\| \xrightarrow[n]{} 0$, δηλ. $p_n(A)x \to f(A)x = \xi$.

- Άρα $U_x(L^2(\sigma(A),\mu_x)) = \overline{[A^n x : n \geq 0]}^{\|\cdot\|_H} = \overline{\{p(A)x : p \in \mathcal{P}\}}^{\|\ \|_H}$.

- $\boxed{\text{Άρα η } U_x \text{ είναι επί} \iff \forall\, \xi \in H\ \exists\, (p_n)_n \text{ πολυώνυμα ώστε } \|\xi - p_n(A)x\| \xrightarrow[n]{} 0 \iff [A^n x : n \geq 0] \text{ πυκνό στο } H.}$

Συμπέρασμα

Αν $\exists\, x \in H$: (*) $[A^n x : n \geq 0]$ πυκνό στο H, τότε ο U_x είναι ισομετρία επί και άρα unitarily ισοδύναμος με τον M_{f_1} στον $L^2(\sigma(A),\mu_x)$.

Ορισμός

- Το x λέγεται <u>κυκλικό</u> για τον A $\iff$ (*)

- Το x λέγεται <u>υπερκυκλικό</u> για τον A $\iff$ $\{A^n x : n \geq 0\}$ πυκνό στον H.

Π.χ

1) $H = L^2([0,1])$, $(Af)(t) = tf(t)$, $f \in H$

Ισχυρισμός

Το $\xi(t) = 1 \ \forall t$ είναι κυκλικό για τον A.

- $[A^n \xi ; n \geq 0] = \{ p(A)\xi : p \in \mathcal{P} \}$.

- $(p(A)\xi)(t) = p(t)\xi(t) = p(t) \ \forall t \in [0,1]$, δηλ. $p(A)\xi = p$ και άρα το $\{ p(A)\xi : p \in \mathcal{P} \}$ είναι πυκνό στον $L^2([0,1])$.

2) $H = L^2([0,1]) \oplus L^2([0,1]) = \{ f \oplus g : f, g \in L^2([0,1]) \}$.
Επίσης $\langle f \oplus g , f' \oplus g' \rangle = \langle f, f' \rangle + \langle g, g' \rangle$.

- Θέτουμε $\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = f \oplus g$.

Ορίζουμε:

- $B \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{f_1} f \\ M_{f_1} g \end{bmatrix}$ όπου $(M_{f_1} f)(t) = tf(t) \ \forall t \in [0,1]$,

με $B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$.

- Ο B δεν έχει κυκλικό διάνυσμα, δηλ. $\forall \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \in H$ το $[B^n \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} : n \geq 0]$ δεν είναι πυκνό. Διότι

$\langle B^n \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{g} \\ -\bar{f} \end{bmatrix} \rangle = 0 \ \forall n$ και $\begin{bmatrix} \bar{g} \\ -\bar{f} \end{bmatrix} \neq 0$.

Απ.

$$\langle \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{g} \\ -\bar{f} \end{bmatrix} \rangle = \langle \begin{bmatrix} A^n & 0 \\ 0 & A^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{g} \\ -\bar{f} \end{bmatrix} \rangle =$$

$\Leftrightarrow A^n x \perp A^m y \quad \forall\, n,m \in \mathbb{N}.$

Ισχυρισμός

$\exists$ μεγιστική οικογ. $\{x_i : i \in I\}$ πολύ κάθετων διανυσμάτων

↳ (δηλ. δεν περιέχεται σε άλλη οικογ. από πολύ κάθετα διαν.)

Απ.

- Θεωρούμε όλες τις οικογένειες των πολύ κάθετων διαν. με διάταξη την σχέση $\subseteq$.

- Αν C είναι μια αλυσίδα από τέτοιες οικογένειες, τότε η C έχει άνω φράγμα το $\cup C$.

- Από το λήμμα του Zorn $\exists$ μεγιστικό στοιχείο, δηλ. $\exists$ μεγ. οικογένεια που αποτελείται από πολύ κάθετα διαν.

- Ονομάζουμε $H_i = \overline{\{A^n x_i : n \geq 0\}}$ κυκλικοί και A-αναλ., $\perp$ ανά δύο.

Ισχυρισμός

$$\bigoplus_{i \in I} H_i = H$$

$$\| $$

$\bigvee_{i \in I} H_i \equiv$ ο μικρότερος κλ. υπόχωρος που $\supseteq$ κάθε H_i.

Απ.

- Έστω όχι: $\exists\, x \in H \setminus \{0\}$, $x \perp \bigoplus_{i \in I} H_i$, δηλ. $x \perp H_i$, $\forall i$, τότε όμως

$$\forall\, n,m \in \mathbb{N},\ \forall i,\ \langle A^n x, A^m x_i \rangle = \langle x, \underset{\substack{\Uparrow \\ H_i}}{A^{m+n} x_i} \rangle = 0$$

- Άρα $\{x, x_i : i \in I\}$ οικ. από ποιο κάθ. διαν. και $\supset \{x_i : i \in I\}$. Άτοπο.

Έχουμε τα εξής:

$$
\begin{tikzcd}
H \arrow[d, "A"'] & = & \oplus H_i \arrow[d, "A"] \\
H & = & \oplus H_i
\end{tikzcd}
$$

Σημείωση:

- Από εδώ και το εξής υποθέτουμε ότι ο H είναι διαχωρίσιμος
- Ο πότε η οικ. $\{x_i : i \in I\}$ είναι αριθμήσιμη και γράφουμε $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$.

- Άρα $\oplus H_k \ni x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} Ax_1 \\ Ax_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$.
  με $\sum \|x_k\|^2 < \infty$

- Άρα $A \sim \begin{bmatrix} A|_{H_1} & & 0 \\ & A|_{H_2} & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$, $A|_{H_i} \overset{\text{Unitarily}}{\sim} M_{f_i}$

Άσκηση $\left\{x : x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ όπου } \forall x_k \in H_k \text{ και } \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2 < +\infty\right\}$

Ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος που περιέχει κάθε H_i είναι το σύνολο $\{x : x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ όπου $\sum \|x_k\|^2 < \infty$ $\forall x_k \in H_k\}$.

- $\forall k \in \mathbb{N}$ έχουμε μέτρο μ_k στο $\sigma = \sigma(A)$ και ένα unitary $U_k : L^2(\sigma, \mu_k) \to H_k : U_k M_{f_k} = A U_k$ (1)
  όπου $f_k(\lambda) = \lambda$ $\forall \lambda \in \sigma$, $f_k \in L^\infty(\sigma, \mu_k)$.

Παρατήρηση

- $\sigma(A) \subset [-\|A\|, \|A\|]$. $a := 3\|A\|$ → Έστω;
- Ορίζουμε $X_k = \sigma(A) + ka = \{\lambda + ka,\ \lambda \in \sigma(A)\}\ \forall k \in \mathbb{N}$.

- Βλέπουμε ότι X_k είναι ξένα ανά δύο κλειστά $\subset \mathbb{R}$.
- $\forall\, Y \subset \mathbb{R}$ Borel ορίζουμε $\mu(Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k((Y \cap X_k) - ka)$.

- Είναι προφανές ότι το μ είναι σ-πεπερ. μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$ → αφού κάθε μ_k πεπερ.

- $\forall\, k \in \mathbb{N}$, ορίζουμε $W_k : L^2(\mathbb{R}, \mu) \longrightarrow L^2(\sigma(A), \mu_k)$
$$g \longmapsto W_k g.$$
με $(W_k g)(\lambda) = g(\lambda + ka)$, $\lambda \in \sigma(A)$.

Ισχυρισμός

Η W_k είναι γραμμ., επί και $\|W_k g\|_{\mu_k} = \|g|_{X_k}\|_\mu$.

Επί: Έστω $h \in L^2(\sigma, \mu)$. Θέτουμε $g(t) = \begin{cases} h(t-ka), & \text{αν } \exists k : t \in X_k \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$

- $\int_{\mathbb{R}} |g(t)|^2 d\mu(t) = \int_{X_k} |h(t-ka)|^2 d\mu(t) = \int |h(\lambda)|^2 d\mu_k(\lambda) < \infty$

και $W_k g = h$.

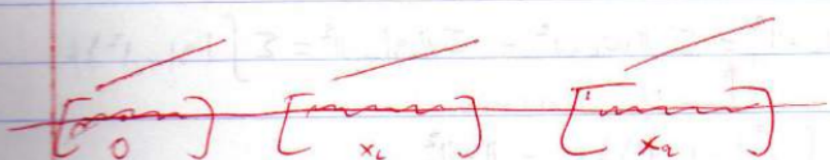
- $\|W_k g\| = \|g|_{X_k}\|_\mu$: Έστω $g = g|_{X_k} + g|_{X_k^c} = g_1 + g_2$.

- $\|g\|^2 = \|g|_{X_k}\|^2 + \|g|_{X_k^c}\|^2$, $W_k g_2 = 0$ διότι η g_2 μηδενίζεται στο X_k, άρα $\|W_k g\| = \|W_k g_1\| \overset{?}{=} \|g_1\|$

Απόδ της (;)

- Έστω $g_i = \chi_Y$, $Y \subset \mathbb{R}$ Borel. Ισχύει $Y \subset X_k$ (σχεδόν)
- $W_k \chi_Y = \chi_{Y_k}$, $Y_k = \{\lambda - x_k : \lambda \in Y\}$.
- $\|W_k \chi_Y\|^2 = \|\chi_{Y_k}\|^2 = \mu_k(Y_k) = \mu(Y) = \|\chi_Y\|^2$.
- Ομοίως για απλές μετρήσιμες που είναι πυκνές στον $L^2(\mathbb{R},\mu)$. ∎
- Τώρα, $\forall k \in \mathbb{N}$, $f_k : \sigma \to \sigma$, $f_k(\lambda) = \lambda$. Ορίζω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

με $f(t) = \begin{cases} f_k(t - x_k), & \text{αν } \exists k : t \in X_k \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$



- Προφανώς η f είναι φραγμένη μετρήσιμη $\Rightarrow f \in L^\infty(\mathbb{R},\mu)$
- $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t\}$

Ισχυρισμός

$\forall k,\ W_k M_f = M_{f_k} W_k$ (3)

Απ.

$\forall g \in L^2(\mathbb{R},\mu)$, $\lambda \in \sigma(A)$, $(W_k M_f g)(\lambda) = (W_k f g)(\lambda) =$
$(fg)(\lambda + x_k) = f(\lambda + x_k) \cdot g(\lambda + x_k) = f_k(\lambda)\, g(\lambda + x_k) = f_k(\lambda)(W_k g)(\lambda)$
$= (M_{f_k} W_k g)(\lambda)$. $\forall k$.