- Όμως ο W_x είναι επί, άρα το Σ περιέχει κάθε $U_x(L^2(\sigma,\mu_x))$.
- Επίσης το Σ είναι κλειστός υπόχωρος διότι W ισομετρία $\Rightarrow$ $\Sigma = \bigoplus H_x = H$ $\Rightarrow$ W unitary. και ισχύει $WM_f = AW$ διότι $\forall g$: $WM_f g = \Sigma U_x W_x M_f g = \Sigma U_x M_{f_x} W_x g = \Sigma A U_x W_x g = A(\Sigma U_x W_x g) = A(Wg)$.

- Άρα $\forall A = A^* \in B(H)$, διαχωρίσιμο H φτιάξαμε μ Borel στο $\mathbb{R}$ και μία $f \in L^\infty(\mathbb{R},\mu)$: $A \overset{\text{unitarily}}{\sim} M_f$ μέσω W.

22/04/2015

Ασκήσεις 1 (Σχόλια)

Θέμα 1°

π.χ

- $E = c_{00}$, $(Tx)(n) = n x(n)$, $x = (x(n)) \in c_{00}$
- Τότε $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$ $\forall x,y \in E$, ο
- Ο T όχι φραγμ. αφού $Te_n = ne_n \Rightarrow \|T\| \geq n$ $\forall n$.

Θέμα 2°

- $(A_K f)(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y)\,dy$ — γενίκευση πολ/σμού πινάκων
- $\left((A_K f)(n) = \sum_m K(n,m) f(m)\right)$

- Ισχύει $\|A_K f\|_2 \leq \|K\|_{2\epsilon} \cdot \|f\|_2$. $\forall f \in L^2([0,1]) \Rightarrow \|A_K\| \leq \|K\|_2$

$= ;$

- Αν $k(x,y) = a(x)b(y)$, $a,b \in L^2([0,1])$ τότε
$\|A_k\| = \|k\|_{2,2} = \|a\|_2 \cdot \|b\|_2$.

Έστω πραγματικές

- Αλλά αν $k(x,y) = a_1(x)b_1(y) + a_2(x)b_2(y)$ τότε δεν έχουμε ισότητα:

$$(A_k f)(x) = \int k(x,y) f(y) dy =$$

$$a_1(x) \langle f, b_1 \rangle + a_2(x) \langle f, b_2 \rangle$$

- Δηλ. $A_k f = a_1 \langle f, b_1 \rangle + a_2 \langle f, b_2 \rangle$
- Αν $a_1 = b_1 = \chi_{[0,\frac{1}{2}]}$, $a_2 = b_2 = \chi_{[\frac{1}{2},1]}$ τότε
$\langle f, b_1 \rangle a_1 =$ προβολή της f στον $[\chi_{[0,\frac{1}{2}]}]$ $\Rightarrow$

- $A_k f =$ προβολή της f στον $[\chi_{[0,\frac{1}{2}]}, \chi_{[\frac{1}{2},1]}] \Rightarrow$
$\|A_k\| = 1$ (ορθή προβολή)
ενώ $\int |k(x,y)|^2 dy = 2$

$$\| \quad \int |a_1(x) b_1(y) + a_2(x) b_2(y)|^2 dx dy = 2$$

$$\| \quad \int |a_1(x) b_1(y)|^2 + |a_2(x) b_2(y)|^2 dx dy = 1 + 1$$

(Γενικότερα αρκεί $a_1 = b_1$ με $\|a_1\|_2 = 1$
$a_2 = b_2$ με $\|a_2\|_2 = 1$ και $\langle a_1, a_2 \rangle = 0$).

Θέμα 3°

- $(Vf)(x) = \int_x^1 f(t) dt = \int_0^1 k(x,t) f(t) dt$ με $k(x,t) = \begin{cases} 0, & t < x \\ 1, & t \geq x \end{cases}$

όχι ισότητα.

για $(t,x) \in [0,1]^2$. $\Rightarrow \|V\| \leq \|k\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Θέμα 4°

- Μόνο της η $\|f'\|_2$ είναι ημινόρμα [redacted]

-

Θέμα 6°

- Αν A φραγμένος : $a_{ij} = \langle Ae_j, e_i \rangle \Rightarrow |a_{ij}| \le \|A\| \Rightarrow \sup_{i,j} |a_{ij}| \le \|A\|$.
- Το αντίστροφο δεν ισχύει αφού π.χ. για $a_{ij} = 1 \ \forall i,j$ θα έπρεπε $A: \ell^2 \to \ell^2$

  $e_1 \to (1,1,1,1,\dots) \notin \ell^2$

- Άλλο παράδειγμα: $a_{ij} = \begin{cases} 1, & j \ge i \\ 0, & j < i \end{cases}$; $Ae_i = (1,1,\dots,\overset{i}{1},0,0,\dots) \in \ell^2$ αλλά $\|Ae_i\| \to \infty$.

- Halmos. ή με συντελεστές Fourier.

Θέμα 7°

a). Θέλουμε ν.δ.ο. αν $\forall$ $\{e_n\}$ o.κ. βάση του H $\exists M_\varepsilon : \|Ae_n\| \le M_\varepsilon \ \forall n$ τότε $\exists M : \|Ax\| \le M\|x\| \ \forall x$.

Απ.

- Έστω ότι ο A δεν είναι φραγμένος. $\Rightarrow \exists e_1 : \|e_1\| = 1$ και $\|Ae_1\| > 1$
- $H = [e_1] \oplus [e_1]^\perp$

- Ο $A|_{[e_2]^\perp}$ δεν είναι φραγμένος, διότι αν ήταν τότε $\forall x \in H$: $x = \langle x, e_2 \rangle e_2 + x'$ όπου $x' \perp e_2 \Rightarrow \|Ax\| \leq \sqrt{2}\|x\|(\|Ae_2\| + M)$
$\Rightarrow A$ φραγμένος.

- $\exists\, e_2 \in [e_1]^\perp$, άρα $e_2 \perp e_1$, με $\|e_2\| = 1$ και $\|Ae_2\| \geq 2$.
και συνεχίζουμε επαγωγικά, διότι από Λήμμα Zorn $\exists$ ο.κ βάση E του H που $\supset \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$.

- Όμως ο $A|_E$ δεν είναι φραγμένος αφού $\|Ae_n\| \xrightarrow[n]{} \infty$.

Για το β)

- Υπάρχει παντού ορισμένη: $A : \ell^2 \to \ell^2$ γραμμική με $Ae_n = 0$ $\forall n$.

Απ.

- $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ γρ. ανεξ. στο ℓ^2, οπότε $\exists$ αλγεβ. βάση B του γραμ. χώρου ℓ^2 με $B \supset \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$.

- Έστω $e_0 \in B \setminus \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$

Παρατήρηση

- $[e_n : n \in \mathbb{N}] = c_{00} \neq \ell^2$.
- Άρα $\exists\, e_0 \notin [e_n : n \in \mathbb{N}]$, $\|e_0\| = 1$.
- Έστω $e_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n \cdot \frac{\sqrt{3}}{\pi}$.

- Το $\{e_0, e_1, \dots\}$ είναι ορθοκανονικό $\Rightarrow$ γρ. ανεξ. και το επεκτείνουμε σε αλγεβρική βάση B του ℓ^2.
- Ορίζουμε $Ax = 0$ $\forall x \in B \setminus \{e_0\}$
$Ae_0 = e_0$

και την επεκτείνουμε σε γραμ. απεικ. $A: \ell^2 \to \ell^2$.

- Η A δεν είναι συνεχής γιατί αν ήταν, αφού $[e_n : n \in \mathbb{N}]$
- είναι πυκνό στον ℓ^2 και $A|_{[\ldots]} = 0 \Rightarrow Ax = 0 \ \forall x \in \ell^2$. Άτοπο.

Θεωρία

Πρόταση

Έστω $A = A^* \in B(H)$. Αν $\sigma(A) \subset \mathbb{R}_+$, τότε $\exists!$ αυτοσυζυγής $B \in B(H)$ με $\sigma(B) \subset \mathbb{R}_+$ ώστε $B^2 = A$. Γράφουμε $B = A^{\frac{1}{2}}$.

Απ.

Η συνάρτηση $f(t) = \sqrt{t}$ είναι καλά ορισμένη και συνεχής στο $\sigma(A)$. Επομένως αν θέσουμε $B = f(A)$, έχουμε $B = B^*$, $\sigma(B) = f(\sigma(A)) \in \mathbb{R}_+$ και $B^2 = A$.

Σχόλιο

Ο B μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον A.

Μοναδικότητα

- Έστω C positive ($\delta\eta\lambda$. $C = C^*$, $\sigma(C) \subset \mathbb{R}_+$) τελεστής ώστε $C^2 = A$.

- Υπάρχουν θετ. τελ. Z, D: $Z^2 = B$, $D^2 = C$
- Σταθεροποιούμε $x \in H$ και θέτουμε $y = (C-B)x$. Τότε
$$\|Dy\|^2 + \|Zy\|^2 = \langle D^2 y, y \rangle + \langle Z^2 y, y \rangle = \langle (B+C) y, y \rangle = \langle (B+C)(B-C)x, y \rangle$$
$$= \langle (B^2 - C^2) x, y \rangle = 0$$
- Αφού $Dy = 0 \Rightarrow Cy = D^2 y = 0$. Ομοίως $By = 0$. $\Rightarrow (C-B)y = 0$.

- Άρα $\|(C-B)x\|^2 = \langle (C-B)x, (C-B)x\rangle = \langle y, (C-B)x\rangle = \langle (C-B)y, x\rangle = 0$
- Αφού το x είναι αυθαίρετο $\Rightarrow B = C$. ∎

Ορισμός

Ένας $A \in B(H)$ λέγεται θετικός αν $\langle Ax, x\rangle \geq 0 \ \forall x \in H$.

Λήμμα

Ένας αυτοσυζυγής A στον H είναι θετικός ανν $\sigma(A) \subset \mathbb{R}_+$ (ό,τι positive ≡ θετικός).

Απ.

- Έστω $\sigma(A) \subset \mathbb{R}^+_+$. Τότε ορίζεται ο $B = A^{\frac{1}{2}}$. $\forall x \in H$ $\langle Ax, x\rangle = \langle B^2 x, x\rangle = \langle Bx, Bx\rangle = \|Bx\|^2 \geq 0$.

- Αντίστροφα, έστω A θετικός. Αν $\lambda \in \sigma(A)$, $\exists (x_n) \subset H$: $\|x_n\| = 1$: $\|(A-\lambda I)x_n\| \to 0$. αφού $A = A^*$.

- Τότε $\|\langle Ax_n, x_n\rangle - \lambda\| \to 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$

Παρατήρηση

- Η υπόθεση $A = A^*$ δεν μπορεί να παραλειφθεί: Π.χ. για $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- $\sigma(A) = \{0\}$ αλλά $\langle Ax, x\rangle = -1$ για $x = (-1, 1)$

Θεώρημα

Έστω $T \in B(H)$. Τ.Ε.Ι.Ι.

i) T θετικός

ii) $\exists\, B \in B(H)$ θετικός : $B^2 = T$

iii) $\exists\, S \in B(H)$ ώστε $SS^* = T$

iv) $T = T^*$ και $\sigma(T) \subset \mathbb{R}_+$.

23/04/2015

- $T \in B(H_1, H_2)$, αν $T = M_f$
- $f : X \to \mathbb{C}$, $f = u|f|$, $|u(x)| = 1$ σ.π
- Άρα $\boxed{M_f = M_u M_{|f|}}$.

Αν όχι φυσιολογικός;
Τότε όχι!

- $H_1 \xrightarrow{T} H_2$, $H_1 \xleftarrow{T^*} H_2$
- $T^*T : H_1 \to H_1$, θετικός αφού $\langle T^*Tx, x\rangle = \|Tx\|^2 \geq 0$.
- Ορίζουμε $\boxed{|T| = \sqrt{T^*T}}$

Άσκηση

Ν.Β. δύο 2×2 πίνακες ώστε να μην ισχύει η ανισότητα $|A+B| \leq |A| + |B|$.

- $\forall\, x \in H_1$, $\|Tx\|^2_{H_2} = \langle T^*Tx, x\rangle_{H_1} = \langle |T|^2 x, x\rangle_{H_1} = \langle |T|x, |T|x\rangle_{H_1}$.

Άρα $\forall\, x \in H_1$, $\boxed{\| |T|x \|_{H_1} = \|Tx\|_{H_2}}$

- Δλδ $Tx=0 \Leftrightarrow |T|x=0$ ⇕

$$\boxed{\ker T = \ker|T|}$$

- Επίσης $V_0 : |T|(H_1) \to T(H_1)$, $|T|x \mapsto Tx$ (H_1, H_2) "$V_0 = T|T|^{-1}$" καλά ορισμένη, ισομετρία, επί.

- V_0 επεκτείνεται : $V_1 : \overline{|T|(H_1)} \to \overline{T(H_1)}$: unitary

- Ξαναεπεκτείνουμε : $V : H_1 \to H_2$ με $V|_{\overline{|T|(H_1)}^{\perp}} = 0$.

- $V(|T|x) = Tx \quad \forall x \in H_1$.
  $V(\xi) = 0 \quad \forall \xi \perp |T|(H_1)$

- Άρα ο V είναι μερική ισομετρία $H_1 \to H_2$. με:
  αρχικό χώρο : $\overline{|T|(H_1)}$
  τελικό χώρο : $\overline{T(H_1)}$

- $\boxed{V|T| = T}$ η πολική αναπαράσταση του T.

Μοναδικότητα.: Αν $T = UX$, $X \geq 0$, U ~~unitary~~ μερική ισομετρία με αρχικό χώρο $\overline{X(H_1)}$, τότε $V = U$, $X = |T|$.

Απ.

- $U^*U \equiv$ προβολή στον $\overline{X(H_1)}$
- Άρα $\forall x \in H_1$, $U^*U(Xx) = Xx$ δηλ $U^*UX = X$.
- Όμως $T = UX$: $T^*T = (XU^*)(UX) = X^2 \Rightarrow |T| = X$.

- Άρα $T = UX = V|T|$ και $X = |T| \Rightarrow UX = VX$ και $\forall \xi \in H_1$:
$U(X\xi) = V(X\xi) \Rightarrow (U-V)|_{\overline{X(H_1)}} = 0$.

- Άρα οι U, V ταυτίζονται στον κοινό τους αρχικό χώρο, στο ορθογώνιο συμπλήρωμα είναι $0 \Rightarrow U = V$. ∎

- Ο V έχει αρχικό χώρο $\overline{|T|(H_1)}$.
τελικό χώρο $\overline{T(H_1)}$.

$\ker T^* = \left(\overline{T(H_1)}\right)^{\perp}$;

- $\eta \in \ker T^* \Leftrightarrow T^*\eta = 0 \Leftrightarrow \forall x \in H_1$, $\langle T^*\eta, x\rangle_{H_1} = 0 \Leftrightarrow \forall x \in H_1$
$\langle \eta, Tx\rangle_{H_2} = 0 \Leftrightarrow \eta \perp T(H_1) \Leftrightarrow \eta \perp \overline{T(H_1)}$. (Εντάξει).

- Οπότε $\overline{|T|(H_1)} = (\ker |T|)^{\perp}$
$\overline{T(H_1)} = (\ker T^*)^{\perp}$.

- Άρα η V είναι μερ. ισομ. με αρχ. χώρο $(\ker|T|)^{\perp} = (\ker T)^{\perp}$
τελ. χώρο $(\ker T^*)^{\perp}$.

Σχόλιο

- $T = V|T| \neq |T|V$.
- $T^* = |T|V^*$.

Διαστολές (Dilations)

- $A \in B(H)$. Θέλουμε να τον "διαστείλουμε" σε unitary.

- Θέλουμε να βρούμε $K \supset H$, $U \in B(K)$: $U = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & A & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix}$

89

- ΔΝΟ αν $P \in B(K)$ η προβολή στον H, θέλουμε $\boxed{PU|_H = A}$.

- Τότε $\|A\| = \|PU|_H\| \le \|U|_H\| \le \|U\| = 1$
- Αναγκαία συνθήκη $\|A\| \le 1$

- $$U^{n} = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & A^{n} & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix}$$ "power dilation"

- ΔΝΟ, αν U είναι dilation μιας συστολής A ($\|A\| \le 1$) τότε $PU|_H = A$ (P: προβ. στον H) και $PU^n|_H = A^n$ $\forall n$.

$$\Downarrow$$

$$\forall\, q(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n \Rightarrow \boxed{Pq(U)|_H = q(A)}$$

- Όμως αφού ο U είναι unitary $\Rightarrow$
$\|q(U)\| = \sup\{|q(\lambda)| : \lambda \in \sigma(U)\}$,

- U unitary $\Rightarrow \sigma(U) \subset \mathbb{T}$ διότι $\left.\begin{array}{l}\|U\| \le 1 \Rightarrow \sigma(U) \subset \overline{\mathbb{D}} \\ \|U^{-1}\| \le 1 \Rightarrow \sigma(U^{-1}) \subset \overline{\mathbb{D}}\end{array}\right\} \Rightarrow \sigma(U) \subset \mathbb{T}$

$\Rightarrow \|q(U)\| \le \sup\{|q(\lambda)| : |\lambda| = 1\}$.

$$\Downarrow$$

$\boxed{\|q(A)\| \le \sup\{|q(\lambda)| : |\lambda| = 1\}}$. (Ανισ. Von Neumann)

Ορισμός

- $B \in B(K)$ είναι διαστολή ενός $A \in B(H)$ αν $H \subset K$ κλ. υποχ. και $\forall n$ $P_H B^n|_H = A^n$

Παρατήρηση

- B επεκτείνει A αν $B(H) \subset H$.

$$B = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & A & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

- Έχουμε ταυτόχρονη διαστολή της ημιομάδας $\{A^n : n \geq 0\}$ σε $\{B^n : n \geq 0\}$.

- Σε δύο βήματα:

1) Συστολή διαστέλλεται σε ισομετρία
2) Ισομετρία επεκτείνεται σε unitary.

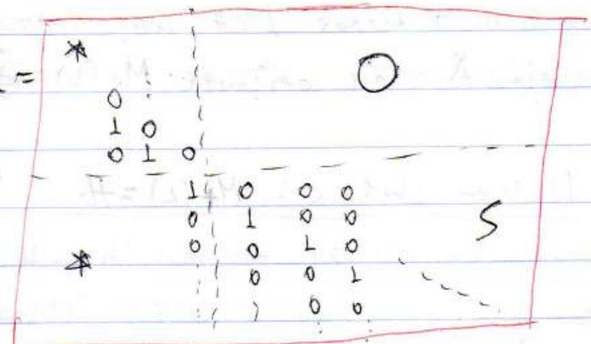
- Ισομ. επεκτείνεται σε unitary.

Π.χ

- $H = \ell^2(\mathbb{Z}_+)$, $Se_n = e_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{Z}_+$.

$K = \ell^2(\mathbb{Z})$, $Ue_n = e_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

- Άρα $U =$



$$\begin{array}{ccc} & \ell^2(\mathbb{Z}_-) & \ell^2(\mathbb{Z}_+) \\ \text{δηλ. } U = & \begin{bmatrix} * & 0 \\ * & S \end{bmatrix} \end{array}$$

Ορισμός

Ένας $S \in B(H)$ λέγεται (μονόπλευρος) shift όταν:

α) $\|Sx\| = \|x\|$ $\forall x \in H$.

β) $\exists$ ~~[illegible]~~ κλ. υποχ $L \subset H$: $S^n(L)$ κάθετα ανά δύο $\forall n$ και $\bigoplus_n S^n(L) = H$.

- $\dim L \equiv$ η πολλ/τα του S.

- ο L λέγεται περιπλανώμενος υπόχωρος για τον S.

- Ο $\bigoplus_n S^n(L) = H$ είναι ο μικρότερος κλ. υποχ που περιέχει το $\{S^n x : n \geq 0, x \in L\}$.

- Γενικά, αν ένας κλειστ.υποχ $L \subset H$ είναι περιπλανώμενος για μια ισομετρία A, τότε ορίζουμε $M_+(L) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A^n(L)$ $\uparrow$ καθ. ανά δύο

- Οπότε ο A είναι shift $\Leftrightarrow M_+(L) = H$.

Παρατήρηση.

$L = M_+(L) \ominus A(M_+(L)) := M_+(L) \cap (A(M_+(L)))^\perp$

Απ.

- $L \subset M_+(L)$
- $L \perp A(L)$
  $\perp A^2(L)$
  $\vdots$
  $\Rightarrow L \perp A(L \oplus A(L) \oplus A^2(L) \oplus \dots) = A(M_+(L)) \Rightarrow$
  $L \subset M_+(L) \cap (A(M_+(L)))^\perp$

- Αντίστροφα, αν $\xi \in M_+(L) \cap (A(M_+(L)))^{\perp}$, Θ.δ.ο $\xi \in L$.
- $\cdot\ \xi \in M_+(L)$: $\xi = \sum_{n=0}^{\infty} A^n(x_n)$

$\xi \perp A(M_+(L))$: $\langle \xi, A^m(\eta)\rangle = 0 \quad \forall\ \eta \in L,\ \forall m \geq 1$

- Άρα $\sum_{n=0}^{\infty} \langle A^n(x_n), A^m(\eta)\rangle = 0 \ \forall\ \eta \in L, \forall\ m \geq 1,\ n \neq m.$

$= \langle A^m(x_m), A^m(\eta)\rangle = 0$

$\Downarrow$

$\langle x_m, \eta\rangle = 0 \ \forall \eta \in L \Rightarrow x_m = 0$

$\Rightarrow \xi = A^0(x_0) = x_0 \in L.$ ∎

- Ειδικότερα, αν S: shift, οπότε $M_+(L) = H$ τότε $L = H \ominus S(H) = (S(H))^{\perp}$ $= \ker(S^*)$.

Πρόταση

Η πολλ/τα ενός shift ($= \dim(L)$) καθορίζεται mod unitary equiv.

- Δ.Σ. $S \in B(H)$, $S' \in B(H')$. $S \overset{\text{Unit}}{\rightsquigarrow} S' \Leftrightarrow \dim(S^*) = \dim(S'^*)$.

Απ.

- Αν $\exists\ V: H \to H'$ unitary με $VS = S'V$ τότε $x \in \ker S^* \Leftrightarrow$ $V^* x \in \ker(S')^*$

- Αντίστροφα, έστω $L = \ker S^*$, $L' = \ker(S')^*$ και $\dim(L) = \dim(L')$.
- $\exists\ W: L \to L'$ unitary
- $H = \bigoplus_n S^n(L)$, $H' = \bigoplus_n (S')^n(L')$

- Ορίζουμε $V: H \to H'$ ως εξής: $V\left(\sum_{n \geq 0} S^n(x_n)\right) = \sum_{n \geq 0} (S')^n(W x_n)$

·

- Παρατηρούμε ότι η σειρά $\sum_{n\geq 0}(S')^n(Wx_n)$ συγκλίνει διότι οι όροι είναι καθ. ανά δύο (αφού $Wx_n \in L'$) και
$$\sum_{n\geq 0} \|(S')^n(Wx_n)\|^2 = \sum_{n\geq 0} \|Wx_n\|^2 = \sum_{n\geq 0} \|x_n\| < \infty$$
S'^n ισομ. $\quad$ W ισομ. $\quad$ $\|$ $\quad$ S^n ισομ.
$$\sum_{n\geq 0} \|S^n(x_n)\|^2$$

- Άρα η V είναι καλά ορισμένη, ισομετρία.
- Είναι επίσης επί αφού $\forall\, z \in H'$, $z = \sum_{n=0}^{\infty} S'^n(z_n) = \sum_{n=0}^{\infty} S'^n(Wx_n)$ όπου $x_n = W^{-1}(z_n)$, Σας $z = \sum_{n=0}^{\infty} S^n(x_n)$.

- Επιπλέον έχουμε, $\forall\, x = \sum_{n=0}^{\infty} S^n(x_n) \Rightarrow Sx = \sum_{n=0}^{\infty} S^{n+1}(x_n) \Rightarrow$
$VSx = \sum_{n=0}^{\infty} (S')^{n+1}(Wx_n) = S'\left(\sum_{n=0}^{\infty} (S')^n(Wx_n)\right) = S'(Vx) \Rightarrow$
$\boxed{VS = S'V}$