- Παρατηρούμε ότι η σειρά $\sum_{n\geq 0} (S')^n(Wx_n)$ συγκλίνει διότι οι όροι είναι καθ. ανά δύο (αφού $Wx_n \in L'$) και

$$\sum_{n\geq 0} \|(S')^n(Wx_n)\|^2 = \sum_{n\geq 0} \|Wx_n\|^2 = \sum_{n\geq 0} \|x_n\| < \infty$$

S'^n ισομ. $\quad W$-ισομ. $\quad \| \quad S^n$ ισομ.

$$\sum_{n\geq 0} \|S^n(x_n)\|^2$$

- Άρα η V είναι καλά ορισμένη, ισομετρία.
- Είναι επίσης επί αφού $\forall\, z \in H'$, $z = \sum_{n=0}^{\infty} S'^n(z_n) = \sum_{n=0}^{\infty} S'^n(Wx_n)$ όπου $x_n = W^{-1}(z_n)$, δηλ. $z = \sum_{n=0}^{\infty} S^n(x_n)$.

- Επιπλέον έχουμε, $\forall\, x = \sum_{n=0}^{\infty} S^n(x_n) \Rightarrow Sx = \sum_{n=0}^{\infty} S^{n+1}(x_n) \Rightarrow$
$VSx = \sum_{n=0}^{\infty} (S')^{n+1}(Wx_n) = S'\left(\sum_{n=0}^{\infty} (S')^n(Wx_n)\right) = S'(Vx) \Rightarrow$
$\boxed{VS = S'V}$

29/04/2015

<u>Διαστολή</u>

- Αν $H \subset K$ κλ. υποχ. ενός χώρου Hilbert, τότε κάθε $B \in \mathcal{B}(K)$ ορίζει $A \in \mathcal{B}(H)$:

$$A : H \xrightarrow{B} K \xrightarrow{P} H$$
$$x \longmapsto Bx \longmapsto PBx$$

όπου P ορθή προβολή του K στον H, A συμπίεση, B Ι-διαστολή

- Τότε $A = PB|_H$ ή $AP = PBP$ ή $\langle Ax, x\rangle = \langle Bx, x\rangle$ $\forall\, x \in H$.

Π.χ

- $H = \ell^2(\mathbb{Z}_+) \subset K = \ell^2(\mathbb{Z})$
- $S \in B(H)$: $Se_n = e_{n+1}$ $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+$
- $U \in B(K)$: $Ue_n = e_{n+1}$ $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.
- $U_{|H} = S$ αλλά $U^*_{|H} \neq S^*$ διότι $U^* e_0 = e_{-1}$ ενώ $S^* e_0 = 0$
- Εδώ $S^* = PU^*P$: συμπίεση
- Ως προς τον $K = H^\perp \oplus H$ έχουμε $U = \begin{bmatrix} X & 0 \\ Y & S \end{bmatrix}$, $U^* = \begin{bmatrix} X^* & 0 \\ Y^* & S^* \end{bmatrix}$.
- Ο H είναι U-αναλλοίωτος.
- Ώστε $U^m = \begin{bmatrix} * & 0 \\ * & S^m \end{bmatrix}$ $\forall\, m \in \mathbb{Z}_+$.

- Γενικά, όταν $AP = PBP$ δεν συμβαίνει ότι $A^m P = PB^m P$.

Π.χ

- Έστω $A \in B(H)$ συστολή ($\|A\| \leq 1$). Θέτουμε $D = (I - A^*A)^{\frac{1}{2}}$, $D_* = (I - A^*A)^{\frac{1}{2}}$ και $B = \begin{bmatrix} A & D_* \\ D & -A^* \end{bmatrix}$

Σημείωση: Ο D ορίζεται αφού $\|A\| \leq 1$ και άρα $A^*A \leq I \Rightarrow I - A^*A \geq 0$ θετικός.

- $B^*B = \begin{bmatrix} A^* & D \\ D_* & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & D_* \\ D & -A^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^*A - D^2 & A^*D_* - DA^* \\ * & D_*^2 + AA^* \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ αφού $A^*D_* - DA^* = ;$

- $A^* D_*^2 - D^2 A^* = 0 \Rightarrow^{\text{επαγωγικά}} A^* D_*^{2n} = D^{2n} A^* \ \forall n \Rightarrow$
- $A^* p(D_*^2) = p(D^2) A^*$, p πολ.

- Ομοίως $BB^* = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$

- Τότε ο B είναι unitary διάσταση του A αλλά ο B^2 είναι unitary διάσταση του A^2 αφού αν $D_* D = 0$.

- ΔΠΣ $BB = \begin{bmatrix} A^2 + D_* D & * \\ * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^2 & * \\ * & * \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$D_* D = 0$

- Όταν μπορούμε να γράψουμε $K = H_- \oplus H \oplus H_+$ και $B = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & A & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix}$ τότε $\forall m \in \mathbb{Z}$ ο B^m είναι διαστολή του A^m.

- Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν: υπάρχουν B^*-αναλ. κλ. υποχ. M, N του K με $N \subset M$ και $H = M \ominus N = M \cap N^\perp$ (γράφουμε $H_- = N$ και $H_+ = M$).

Ορισμός

Ένας $B \in \mathcal{B}(K)$ λέγεται διαστολή ενός $A \in \mathcal{B}(H)$ αν $H \subset K$ και $A^n = PB^n|_H \ \forall n \in \mathbb{N}$

- ΔΛΣ ο B είναι διαστολή του A αν η ημιομάδα $\{B^n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ταυτόχρονα 1-διαστολή της ημιομάδας $\{A^n : n \in \mathbb{N}\} \subset B(H)$.

Θ.Σ.

Θεώρημα

- Κάθε συστολή $A \in B(H)$ δέχεται διαστολή σε unitary $B \in B(K)$.

- Αναγκαία συνθήκη για να είναι ο B unitary είναι: $\|A\| = \|PBP\| \le \|B\| \le 1$

- Πορεία:
  - Κάθε συστολή διαστέλλεται σε ισομετρία.
  - Κάθε ισομετρία γράφεται σε unitary $\oplus$ unilateral shift (με πολλ)
  - Κάθε unilateral shift επεκτείνεται σε bilateral shift (με πολλ.).

- Έστω A ισομετρία.
- Θέτουμε $L = \ker A^* = (A(H))^{\perp}$ διότι $x \in \ker A^* \Leftrightarrow A^* x = 0 \Leftrightarrow$ $\langle A^* x, y \rangle = 0 \ \forall y \Leftrightarrow \langle x, Ay \rangle = 0 \ \forall y \Leftrightarrow x \in (A(H))^{\perp}$

- Ισχυρισμός: ο L είναι A-περιπλανώμενος: $A^n x \in A^n(L)$ και $A^m(y) \in A^m(L)$, $n > m$, $n - m = k$.
- Τότε $\langle A^n x, A^m y \rangle = \langle A^m A^k x, A^m y \rangle \quad (A^m \text{ ισομ}) = \langle A^k x, y \rangle = 0$ αφού $y \in A(H)$, $A^k x \in (A(H))^{\perp}$

Θεώρημα (Διάσπαση Wold).

- Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ ισομετρία, τότε $\exists!$ διάσπαση $H = H_s \oplus H_u$ σε A-αναλλοίωτους υπόχωρους: $A|_{H_s} = A_s$ είναι shift (αν δεν είναι μηδενικός) και $A|_{H_u} = A_u$ είναι unitary (αν δεν είναι μηδενικός).
- Επιπλέον ο $L = \ker A^*$ είναι ένας A-περιπλανώμενος υπόχωρος.
- Έχουμε $H_s = M_+(L) = \bigoplus_{n \geq 0} A^n(L) = \{x \in H : A^{*n} \to 0\}$ και $H_u = \bigcap_{n \geq 0} A^n(H)$.

Απ.

- A ισομετρία στον H
- Έστω $L = \ker A^* (\neq 0)$ (αλλιώς A unitary).
- Θέτουμε $H_s = \bigoplus_{n \geq 0} A^n(L) = M_+(L)$.

Ισχυρισμός

- $H_s = \{x \in H : (A^*)^n x \xrightarrow[n \to \infty]{} 0\}$ (αν A unitary $\Rightarrow A^*$ unitary $\Rightarrow \|A^{*n} x\| = \|x\|$).

Απ. Ισχ.:

- Θέτουμε $P(L)$ την προβολή στον L. ($P(L) = I - AA^*$ διότι ο A είναι μερ. ισομ.).

Τότε: $P(A^n(L)) = A^n P(L) (A^*)^n$ αφού: αν $T = A^n$ αρκεί ν.δ.ο. $P(T(L)) = TP(L)T^*$.

- $\xi = T\eta$ με $\eta \in L$.
- Τότε $TP(L)T^*\xi = TP(L)T^*T\eta \overset{T^*T = I}{=} TP(L)\eta = T\eta = \xi$.

• Επίσης αν $\xi \perp T(L)$ τότε $T^*P(L)T\xi = 0$ διότι
$\forall y \in H$, $\langle T^*P(L)T\xi, y\rangle = \langle P(L)T\xi, Ty\rangle = \langle \xi, T(P(L)T^*y)\rangle$ $\underset{T(L)}{\in}$ $\overset{\shortparallel}{0}$

• Άρα $P(A^n(L)) = A^n P(L)(A^*)^n = A^n(I - AA^*)(A^*)^n = A^n(A^*)^n - A^{n+1}(A^*)^{n+1}$

• Όμως $x \in H_s = \bigoplus_{n\geq 0} A^n(L) \Rightarrow x = \sum_{n\geq 0} P(A^n(L))x$

$$\boxed{H_s = \bigoplus_{n\geq 0} A^n(L) \qquad P(H_s)y = \sum_{n\geq 0} P(A^n(L))y \ \forall y.}$$

• Δλδ $x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} P(A^n(L))x =$

$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \left(A^n(A^*)^n x - A^{n+1}(A^*)^{n+1}x\right) = \lim_{N\to\infty} (x - A^N(A^*)^N x)$

• Δλδ $x \in H_s \iff A^N(A^*)^N x \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \iff (A^*)^N x \to 0$ (διότι A^N ισομ.).

<u>Ισχυρισμός</u>

$y \in (H_s)^\perp$ <u>ανν</u> $y \in \bigcap_{n\geq 0} A^n(H)$

<u>Απ. Ισχ.</u>

• $y \in \perp H_s \iff y \perp A^n(L)\ \forall n\geq 0 \iff P(A^n(L))y = 0\ \forall n\geq 0. \iff$
$A^n(I - AA^*)(A^*)^n y = 0\ \forall n\geq 0 \iff A^n(A^*)^n y = A^{n+1}(A^*)^{n+1} y\ \forall n\geq 0$
$\iff y = A^n(A^*)^n y\ \forall n\geq 0.$

• Όμως $A^n(A^*)^n = P(A^n(H))$ και τότε <u>$y \in A^n(H)\ \forall n\geq 0$.</u>

- Άρα $H = H_s \oplus H_u$
- Θέλουμε $P = P(H_u)$.
- Ξέρουμε ότι $\forall x$, $p(x) = \lim_n A^n (A^*)^n x$
- Άρα $P(A(H_u))x = (APA^*)x = \lim_n A(A^n (A^*)^n) A^* x =$

$$\lim_n A^{n+1}(A^*)^{n+1} x = Px.$$

- ΔΛΣ $P(A(H_u)) = P \Leftrightarrow APA^* = P \Rightarrow$
$$PA = (APA^*)A = AP$$

- Άρα ο H_u ανάγει τον A διότι $AP = PAP$ και $A^*P = PA^*P$.

- Τέλος $\forall x \in H_u$, $P(A(H_u))x = Px = x \Rightarrow x \in A(H_u)$ ΔΛΣ ο $A|_{H_u}$ είναι επί του H_u.

- Άρα
$$\boxed{A = \begin{array}{c} H_s \oplus H_u \\ \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_u \end{bmatrix} \end{array}}$$

Μοναδικότητα.

- Υποθέτουμε $H = H_s \oplus H_u$ όπου K_s, K_u είναι A-αναλ.
$$= K_s \oplus K_u$$
$A|_{K_s}$ shift, $A|_{K_u}$ unitary.
$$\Downarrow$$
- Αν $L' = K_s \ominus A(K_s)$: L' είναι A-περιπλανώμενος
- Αρκεί ν.δ.ο $L' = L$, διότι τότε $\underset{n \geq 0}{\oplus} A^n(L') = \underset{n \geq 0}{\oplus} A^n(L)$
$$\qquad \| \qquad\qquad\qquad \|$$
$$\qquad K_s \qquad\qquad\quad H_s.$$

- Ξέρουμε: $L = H \ominus A(H) = (K_s \oplus K_u) \ominus (A(K_s \oplus K_u)) =$
$(K_s \oplus K_u) \ominus (A(K_s) \oplus A(K_u)) = (K_s \oplus \cancel{K_u}) \ominus (A(K_s) \oplus \cancel{K_u}) =$
$K_s \ominus A(K_s) = L'$

Ιστορία

- Συμπληρωματικό Βιβλίο: F. Riesz + B. Sz-Nagy
- B. Sz-Nagy + C. Foias → Αρμονική Ανάλυση Τελ. (1955)
  ↳ 2η Έκδοση (2009)

30/04/2015

~~Αμφίπλευρο~~

Ορισμός

Αμφίπλευρο shift είναι ένας unitary τελεστής $U \in B(H)$ που έχει περιπλανώμενο υπόχ. L: $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} U^n(L) = H$.

Π.χ

Ο $U \in B(\ell^2(\mathbb{Z}))$ όπου $Ue_n = e_{n+1}$ $(n \in \mathbb{Z})$. Έστω $L = [e_{-1}]$.

- Αν $U \in B(H)$ αμφίπλευρο shift με περ. υπόχ. L, θέτουμε $H_+ = \bigoplus_{n \geq 0} U^n(L)$ και $S \in B(H_+)$ με $S = U|_{H_+}$ → unil. shift.

- Έστω $U \in B(H)$ αμφ. shift, $L \subset H$ περ. υπόχ.
- $U^n(L) \perp$ ανά δύο, $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} U^n(L) = H$.
- Δηλ. κάθε $x \in H$, $x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} U^n x_n$ όπου $x_n \in L$ και $\sum \|x_n\|^2 < \infty$

$$\sum \|x_n\|^2 = \sum \|U^n x_n\|^2 = \left\|\sum U^n x_n\right\|^2 = \|x\|^2.$$

- Ισχύει $U(H_+)\subseteq H_+$ διότι $x=\sum_{n\geq 0} U^n x_n \Rightarrow Ux=\sum_{n\geq 0} U^{n+1} x_n$ αλλά $H_+^{\perp}$ δεν είναι U-αναλλοίωτος.

- Ορίζουμε $S = U|_{H_+} : H_+ \to H_+$ και είναι shift διότι ο $\ker S^* = H_+ \ominus S(H_+) = L$ είναι S-περιπ. και $\bigoplus_{n\geq 0} S^n(L) = \bigoplus_{n\geq 0} U^n(L) = H_+$.

Πρόταση

Κάθε unilateral shift $S\in B(H)$ επεκτείνεται σε bilateral shift $U\in B(K)$ $(K\supset H)$.

Απ.

- Ορίζουμε $K=\ell^2(\mathbb{Z})\otimes L = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} L_n = \{(y_n)_{n\in\mathbb{Z}} : y_n\in L,\ \sum_n \|y_n\|^2<\infty\}$.

(κάθε $L_n=L$).

- Έστω $S\in B(H)$ unil. shift, $L=\ker S^*$.
- Ξέρουμε ότι $\bigoplus_{n\geq 0} S^n(L) = H \Leftrightarrow$ κάθε $x\in H$, $x=\sum_{n\geq 0} S^n x_n$

- Ορίζουμε $W : x=\sum_{n\geq 0} S^n x_n \mapsto (\dots,0,0,\boxed{x_0},x_1,x_2,\dots)$.
- $U((\dots,y_{-1},\boxed{y_0},y_1,\dots)) = (\dots,y_{-2},\boxed{y_{-1}},y_0,\dots)$.

- Ώστε $WS(\sum_{n\geq 0} S^n x_n) = W(\sum_{n\geq 0} S^{n+1}x_n) = (\dots,0,0,\boxed{0},x_0,x_1,\dots)$
$= UW(\sum_{n\geq 0} S^n x_n)$.

Πρόταση

Κάθε ισομετρία $T \in B(H)$ επεκτείνεται σε unitary $V \in B(K)$ όπου $K \supseteq H$.

Απ

- Πρώτα $T = T_s \oplus T_u$ στον $H = H_s \oplus H_u$ όπου T_u unitary και T_s shift.

- Επεκτείνουμε τον T_s σε ~~unitary~~ bil. shift U_s στον $K_s \supseteq H_s$.
- Ορίζουμε $K = K_s \oplus H_u$ και $V = U_s \oplus T_s$
- Δλδ ως προς τον $K = (K_s \ominus H_s) \oplus H_s \oplus H_u$ έχουμε:

$$V = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & T_s & 0 \\ * & * & T_u \end{bmatrix}$$

~~Αποδ~~

Διαστολή - Συστολής.

- $A \in B(H)$ συστολή, $\|A\| \le 1$
- $\exists$; $V \in B(K)$ ισομετρία, $K \supseteq H$: $P_H V^n|_H = A^n \ \forall n$;

- Λοιπόν; Θεωρούμε $\tilde{H} = \bigoplus_{n \ge 0} H_n$ $(H_n = H)$
- ~~Έστω~~ Ορίζουμε $V : \tilde{H} \to \tilde{H}$: $(x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto (Ax_0, D_A x_0, x_1, x_2, \dots)$

Δλδ
$$V = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ D_A & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & I & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}$$ όπου $D_A = (I - A^*A)^{\frac{1}{2}}$.

- $\tilde{H} = \{ x = (x_0, x_1, x_2, \ldots) : x_k \in H ,\ \sum \|x_k\|^2 < \infty \}$.
- $V(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (Ax_0, D_A x_0, x_1, x_2, \ldots)$

$$D_A^2 = I - A^*A.$$

V ισομετρία.

$\|Vx\|^2 = \|Ax_0\|^2 + \|D_A x_0\|^2 + \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \ldots =$

$\langle A^*Ax_0, x_0 \rangle + \langle D_A^2 x_0, x_0 \rangle + \ldots = \|x_0\|^2 + \|x_1\|^2 + \ldots$

$P_H V^n|_H = A^n$.

- $V^n(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (A^n x_0, *, *, \ldots) \Rightarrow$

$P_H V^n|_H (x_0, x_1, \ldots) = A^n x_0$.

- Αν $D_A = 0 \Rightarrow V = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \\ 0 & I & & \\ 0 & 0 & \cdots & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}$

Ορισμός

Θα λέμε ότι η διαστολή είναι minimal όταν ο H_m είναι ο μικρότερος V-αναλλ. υποχ. του K που περιέχει τον H: θέτουμε $H_m = \bigvee_{n \geq 0} V^n(H)$ (κλ. γρ. θήκη ένωσης) και $V_m = V|_{H_m}$.

Θεώρημα

- Κάθε συστολή $A \in B(H)$ έχει μια minimal ισομετρική διαστολή $V \in B(K)$.
- Είναι ουσιαστικά μοναδική.

Απ.

- $A: H \to H$ συστολή
- Τότε $\exists\ V: K \to K$ ισομετρία : $P_H V^m|_H = A^m \quad \forall m \geq 0$.
- Παρατηρούμε ότι $H + V(H) + V^2(H) + \dots \subset K$
- $H_0 = [x, Vx_1, V^2x_2, \dots]$, $\subset K$, $x_i \in H$.
- Θεωρούμε $H_m = \overline{H_0} \subset K$ που είναι εξ κατασκευής V-αναλ. και $H_m \supset H$.
- Ορίζουμε $V_m = V|_{H_m}$ ισομετρία και $\forall x \in H$ ισχύει

$V_m^k x = V^k x \Rightarrow P_H V_m^k x = P_H V^k x = A^k x \Rightarrow \boxed{P_H V_m^k|_H = A^k} \ \forall k \in \mathbb{N}$

Μοναδικότητα:

- Έστω $V' \in B(K')$, $K' \supset H$ άλλη μία minimal διαστολή.
- $K' = [x_0, V'x_1, V'^2x_2, \dots]$ και $P_H V'^k|_H = A^k$.
- $\underbrace{\sum_{k=0}^{n} V^k x_k}_{x} \xrightarrow{W} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} V'^k x_k}_{x'}$ είναι ισομετρία (γιατί;)
- Επιπλέον η κλειστή θήκη των $\{x\}$ είναι ο K και η κλειστή θήκη των $\{x'\}$ είναι ο K' $\Rightarrow$ W επί.
- Είναι φανερό ότι V και V' είναι διαστολές του ίδιου A.

Π.χ

- Η αρχή του μεγίστου: $H = \mathbb{C}$, $A_w: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $|w| \leq 1$.
$z \mapsto wz$

- Διαστέλλουμε τον A σε unitary:

(109)

- $\mathbb{C} \rightsquigarrow \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\oplus\dots$

$$H_+ \overset{\shortparallel}{=} \bigoplus_{n\geq 0} H_n \quad (\text{όπου } H_n = \mathbb{C}).$$

- Δηλ. $H_+ = \ell^2(\mathbb{Z}_+)$.
- Ο A διαστέλλεται σε isometry V στο $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$.
- Ο V επεκτείνεται σε unitary $\mathcal{U}$ στο $\ell^2(\mathbb{Z})$.

- Έχουμε $V = \begin{pmatrix} w & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ (1-|w|^2)^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & \cdots & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$

- $\mathcal{U} = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & A_w & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{U}^k = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & A_w^k & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix} \ \forall\, k\geq 0$

$\Rightarrow p(\mathcal{U}) = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & p(A_w) & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix}$ p πολυώνυμο.

- $\|p(A_w)\| \leq \|p(\mathcal{U})\|$ $\quad (A_w z = wz,\ p(A_w)z = p(w)z)$.

$\overset{\shortparallel}{}$

$\|p\|_{\overline{\mathbb{D}}} = \sup\{|p(z)| : |z|\leq 1\}$.

- Όμως $\|p(\mathcal{U})\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda\in\sigma(\mathcal{U})\}$ (θα το δείξουμε για φυσιολογικούς).

- Αφού $\mathcal{U}$ unitary $\Rightarrow \sigma(\mathcal{U}) \subset \mathbb{T}$
- Άρα $\forall$ πολυώνυμο p, $\boxed{\sup\{|p(\lambda)| : \lambda\in\overline{\mathbb{D}}\} \leq \sup\{|p(\lambda)| : \lambda\in\mathbb{T}\}}$.