Θεωρία Τελεστών 2015
Ασκήσεις 1
Παράδοση: 2 Απριλίου

Άσκηση 1 Αν H χώρος Hilbert και $S, T : H \to H$ γραμμικές απεικονίσεις με $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$ για κάθε $x, y \in H$ δείξτε ότι οι T, S είναι συνεχείς και $S = T^*$. [Υπόδειξη: Θεώρημα κλειστού γραφήματος.]

Με ένα παράδειγμα δείξτε ότι η υπόθεση της πληρότητας του H δεν μπορεί να παραλειφθεί.

Άσκηση 2 Έστω $k \in L^2([0,1] \times [0,1])$. Δείξτε ότι για κάθε $f \in L^2[0,1]$ το ολοκλήρωμα $\int_0^1 k(x,y)f(y)dy$ υπάρχει σχεδόν για κάθε $x \in [0,1]$ και ορίζει μια $A_k f \in L^2([0,1])$. Αποδείξτε την ανισότητα

$$\int_0^1 |(A_k f)(x)|^2 dx \leq \|k\|_2^2 \int_0^1 |f(y)|^2 dy.$$

Εξετάστε αν ισχύει η ισότητα $\|A_k\| = \|k\|_2$. Βρείτε τον A_k^*.

Άσκηση 3 Αν $f \in C[0,1]$, θέτουμε

$$(Vf)(x) = \int_x^1 f(t)dt \quad (x \in [0,1]).$$

Δείξτε ότι η απεικόνιση V επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή από τον $L^2[0,1]$ στον $L^2[0,1]$.

Άσκηση 4 Αν $C^1(0,1)$ είναι οι συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f : (0,1) \to \mathbb{C}$, θεωρούμε την απεικόνιση

$$D : (C^1(0,1), \|\cdot\|_2) \to (L^2(0,1), \|\cdot\|_2) : f \to f'$$

(όπου $\|\cdot\|_2$ η νόρμα του $L^2(0,1)$. Δείξτε ότι η D ΔΕΝ είναι συνεχής. Αν ορίσουμε $\|f\|_D \equiv \sqrt{\|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2}$, τότε η $\|\cdot\|_D$ είναι νόρμα που προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο και η απεικόνιση

$$D : (C^1(0,1), \|\cdot\|_D) \to (L^2(0,1), \|\cdot\|_2) : f \to f'$$

ΕΙΝΑΙ συνεχής.

Άσκηση 5 Αν P, Q είναι προβολές σε ένα χώρο Hilbert H, δείξτε ότι ο τελεστής $P + Q$ ειναι προβολή αν και μόνον αν $PQ = 0$, αν και μόνον αν $QP = 0$, αν και μόνον αν $\|P + Q\| \leq 1$.

Άσκηση 6 Δείξτε ότι αν $A \in \mathcal{B}(\ell^2)$ και $a_{i,j} = \langle Ae_j, e_i\rangle$ τότε $\sup\{|a_{i,j}| : i, j \in \mathbb{N}\} < +\infty$. Όμως δεν είναι αλήθεια ότι κάθε $\infty \times \infty$ πίνακας $[a_{i,j}]$ που ικανοποιεί την σχέση $\sup\{|a_{i,j}| : i, j \in \mathbb{N}\} < +\infty$ ορίζει φραγμένο τελεστή στον ℓ^2. Δώστε ένα τέτοιο παράδειγμα.

Δείξτε ότι υπάρχει $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ με $\langle Te_j, e_i\rangle = \frac{1}{i+j}$ για κάθε i, j.

Άσκηση 7 Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert . Αν μια γραμμική απεικόνιση $A : H \to H$ ικανοποιεί $\sup\{\|Ae_n\|| : n \in \mathbb{N}\} < +\infty$ για κάθε ορθοκανονική βάση $\{e_n\}$ του H, τότε η A είναι αναγκαστικά συνεχής.

Υπάρχει όμως μια ασυνεχής γραμμική απεικόνιση $A : H \to H$ και μια ορθοκανονική βάση $\{f_n\}$ του H ώστε $Af_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.