Θεωρία Τελεστών
Ασκήσεις 2
Παράδοση: 24 Απριλίου 2015

Άσκηση 1 Έστω $D_a \in \mathcal{B}(\ell^2)$ ο διαγώνιος τελεστής $D_a e_n = a(n)e_n$ $(n \in \mathbb{N})$ όπου $a = (a(n)) \in \ell^\infty$.

(α) Δείξτε ότι ο D_a είναι φυσιολογικός και $\|D_a\| = \|a\|_\infty$.

(β) Δείξτε ότι η απεικόνιση $\ell^\infty \to \mathcal{B}(\ell^2) : a \to D_a$ είναι ισομετρικός *-μορφισμός αλγεβρών.

(γ) Βρείτε το σύνολο ιδιοτιμών $\sigma_p(D_a)$ και το φάσμα $\sigma(D_a)$.

(δ) Αν p πολυώνυμο, δείξτε ότι $\|p(D_a)\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma_p(D_a)\}$.

Άσκηση 2 Έστω $T \in \mathcal{B}(L^2([0,1])$ ο τελεστής $Tf(t) = tf(t)$ $(f \in L^2([0,1]),$ $t \in [0,1])$. Δείξτε ότι $\sigma_p(T) = \emptyset$ και βρείτε το $\sigma(T)$.

Άσκηση 3 Αν $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ δείξτε ότι $\sigma(A) \subseteq [a,b]$ όπου $a = \inf\{\langle Ax, x\rangle : \|x\| = 1\}$ και $b = \sup\{\langle Ax, x\rangle : \|x\| = 1\}$. Να συμπεράνετε ότι $\|A\| = \max\{|a|, |b|\}$.

Άσκηση 4 Δείξτε ότι δεν υπάρχει τελεστής $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$ ώστε $T^2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Γενικότερα, δείξτε ότι το unilateral shift $S \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ δεν έχει τετραγωνική ρίζα. Τί συμβαίνει για το bilateral shift $U \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z})$;

Άσκηση 5 Θεωρούμε τον <u>χώρο</u> Hilbert $H = L^2(\mathbb{T})$ με το εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\overline{g(e^{it}}dt$. Έστω $\lambda = e^{i\theta}$ σταθερά. Ορίζουμε τους τελεστές[1] U, V όπου

$$(Uf)(e^{it}) = e^{it}f(e^{it}) \quad \text{και} \quad (Vf)(e^{it}) = f(\lambda e^{it}), \quad f \in L^2(\mathbb{T}).$$

Αποδείξτε ότι οι τελεστές αυτοί είναι ορθομοναδιαίοι και ικανοποιούν τη σχέση του Weyl, $UV = \lambda VU$.

Βρείτε το φάσμα και τις ιδιοτιμές τους (α) όταν $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$ και (β) όταν $\frac{\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$.

Θεωρώντας γνωστό ότι η οικογένεια $\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}$ όπου $f_k(e^{it} = e^{ikt}$ είναι ορθοκανονική βάση του $L^2(\mathbb{T})$, βρείτε τους πίνακες των U, V ως προς αυτήν.

Αν $T : H^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T})$ ο περιορισμός του U στον (κλειστό, U-αναλλοίωτο) υπόχωρο $H^2(\mathbb{T})$ που παράγεται από τα $\{f_k : k \geq 0\}$ (δηλ. είναι η *κλειστή* γραμμική τους θήκη), δείξτε ότι $\sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}$.

Έχει ο τελεστής T ιδιοτιμές; Ο συζυγής του;

[1] Αν προτιμάτε, γράψτε $H = L^2([0, 2\pi])$, $Uf(t) = e^{it}f(t)$ και $Vf(t) = f(t + \theta)$. Είναι το ίδιο.