Θεωρία Τελεστών
Ασκήσεις 3
Παράδοση: πριν την εξέταση Ιουνίου 2015

Άσκηση 1 Θεωρούμε τον χώρο Hilbert $H = L^2(\mathbb{T})$ με το εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\overline{g(e^{it}}dt$.

Θεωρούμε γνωστό ότι η οικογένεια $\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}$ όπου $f_k(e^{it}) = e^{ikt}$ είναι ορθοκανονική βάση του $L^2(\mathbb{T})$ και ότι η γραμμική τους θήκη (δηλ. τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα) είναι πυκνή στον $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$. Ονομάζουμε P την απεικόνιση που ορίζεται στα τριγωνομετρικά πολυώνυμα από τον τύπο

$$P\left(\sum_{k=-n}^{n} c_k f_k\right) = \sum_{k=0}^{n} c_k f_k$$

Δείξτε ότι η P επεκτείνεται σε φραγμένη απεικόνιση του $(L^2(\mathbb{T}), \|\cdot\|_2)$, αλλά δεν επεκτείνεται σε φραγμένη απεικόνιση του $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$.

(Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το γεγονός ότι υπάρχει σταθερά M ώστε $\left\|\sum_{|k|\le n, k\neq 0} \frac{1}{k} f_k\right\|_\infty \le M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.)

Άσκηση 2 **[Sarason]** Θεωρούμε δύο κλειστούς κάθετους υπόχωρους M_1, M_2 ενός χώρου Hilbert H, θέτουμε $M = M_1 \oplus M_2$ και $P = P(M_2)$. Ορίζουμε

$$\mathcal{A} = Alg(M_1, M) = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : A(M_1) \subseteq M_1 \text{ και } A(M) \subseteq M\}.$$

(Σημειώνουμε ότι η άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι μπλοκ-άνω τριγωνική ως προς τη διάσπαση $H = M_1 \oplus M_2 \oplus M^\perp$).

Δείξτε ότι η απεικόνιση $A \to PAP|_{M_2}$ διατηρεί το γινόμενο στην $\mathcal{A}$.

Αντίστροφα, αν $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι υπάλγεβρα και $P = P(N)$ μια προβολή ώστε η απεικόνιση $A \to PAP|_N$ να διατηρεί το γινόμενο στην $\mathcal{A}$, δείξτε ότι τότε ο κλειστός υπόχωρος N είναι **ημιαναλλοίωτος** για την $\mathcal{A}$, δηλαδή ότι υπάρχουν $\mathcal{A}$-αναλλοίωτοι υπόχωροι $K \subseteq L$ ώστε $N = K \cap L^\perp$.

Άσκηση 3 Έστω $E : \mathcal{S} \to \mathcal{B}(H)$ ένα φασματικό μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(K, \mathcal{S})$. Για κάθε $f : K \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη, δείξτε ότι η ένωση V όλων των ανοιχτών $U \subseteq \mathbb{C}$ που ικανοποιούν $E(f^{-1}(U)) = 0$ ικανοποιεί $E(f^{-1}(V)) = 0$ (οπότε είναι το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο με την ιδιότητα αυτή). Ονομάζουμε την f ουσιωδώς φραγμένη (ως προς E) αν το συμπλήρωμα του V είναι φραγμένο σύνολο, και θέτουμε $\|f\|_E = \mathrm{essup}|f| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in V^c\}$.

Θεωρούμε την άλγεβρα Banach $(\mathcal{L}^\infty(K), \|\cdot\|_\infty)$ των φραγμένων μετρήσιμων συναρτήσεων $f : K \to \mathbb{C}$.

Δείξτε ότι το σύνολο $\mathcal{N}(E) = \{f \in \mathcal{L}^\infty(K) : \|f\|_E = 0\}$ αποτελεί ιδεώδες της $\mathcal{L}^\infty(K)$ που είναι κλειστό.

Ονομάζουμε $L^\infty(E)$ την άλγεβρα πηλίκο $\mathcal{L}^\infty(K)/\mathcal{N}(E)$ και την εφοδιάζουμε με τη νόρμα $\|[f]\| = \|f\|_E$ (όπου $[f] = f + \mathcal{N}(E)$).

Δείξτε ότι η απεικόνιση $[f] \to \int f dE$ είναι (καλά ορισμένη και) ισομετρία.

Αρκεί να ασχοληθείτε με δύο από τις ασκήσεις αυτές.