Καλώς ήρθατε στη Θεωρία Τελεστών!

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH175/

Εαρινό Εξάμηνο 2014-15

M. Reed & B. Simon, *Methods of modern mathematical physics, I. Functional analysis.* Second edition. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1980.

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ορισμός

Έστω E $\mathbb{K}$-γραμμικός χώρος ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Ένα **εσωτερικό γινόμενο (inner product ή scalar product)** *στον E είναι μια απεικόνιση*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$$

τέτοια ώστε

$$\begin{array}{ll} (i) & \langle x, x \rangle \geq 0 \\ (ii) & \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0 \\ (iii) & \overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle \\ (iv) & \langle x_1 + \lambda x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \lambda \langle x_2, y \rangle \end{array}$$

για κάθε $x, x_1, x_2, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

άρα $\quad (iv)' \; \langle x, y_1 + \lambda y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y_2 \rangle$.

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Πρόταση (Ανισότητα Cauchy-Schwarz)

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, για κάθε $x, y \in E$ ισχύει

$$|\langle x, y\rangle| \leq \langle x, x\rangle^{1/2} \langle y, y\rangle^{1/2}.$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνον αν τα x, y είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Πρόταση

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, η απεικόνιση $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ όπου $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ είναι νόρμα στον E, δηλαδή ικανοποιεί, για κάθε $x, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \\
(ii) \quad & \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \\
(iii) \quad & \|x\| = 0 \iff x = 0.
\end{aligned}$$

Χώροι Hilbert

Δύο στοιχεία $x, y \in \mathscr{H}$ σ'έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο λέγονται *κάθετα* αν $\langle x, y \rangle = 0$. Αν $\emptyset \neq A \subseteq \mathscr{H}$, το σύνολο

$$A^{\perp} = \{x \in \mathscr{H} : \langle x, y \rangle = 0 \text{ για κάθε } y \in A\}$$

είναι πάντα κλειστός υπόχωρος του $\mathscr{H}$.

Θεώρημα

Έστω $\mathscr{H}$ χώρος Hilbert και M κλειστός γνήσιος υπόχωρος του $\mathscr{H}$. Τότε

$$M^{\perp} \neq \{0\}.$$

Μάλιστα, ισχύει

$$M \oplus M^{\perp} = \mathscr{H}.$$

Το πλησιέστερο διάνυσμα

Έστω $F = [e_1, \dots, e_n]$ όπου $\{e_k\}$ ΟΚ. Κάθε $y \in F$ γράφεται $y = \sum_{k=1}^n \langle y, e_k \rangle e_k$. Τώρα:
$(x-y) \perp F \iff \langle x-y, e_k \rangle = 0 \ \forall k, \iff$
$\langle y, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle \ \forall k, \iff y = y_o$.
Αν $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$x - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = \left(x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right) + \left(\sum_{k=1}^n (\langle x, e_k \rangle - \lambda_k) e_k \right) = z + y_1$$

παρατηρούμε ότι $z \perp F$ (γιατί $\langle z, e_k \rangle = 0$ για $k = 1, \dots n$) και $y_1 \in F$, άρα $y_1 \perp z$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι $\|y_1 + z\|^2 = \|y_1\|^2 + \|z\|^2$ δηλαδή

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\|^2 &= \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^n (\langle x, e_k \rangle - \lambda_k) e_k \right\|^2 \\ &= \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle - \lambda_k|^2 \quad (1) \end{aligned}$$

$$M \oplus M^{\perp} = \mathscr{H}.$$

Επομένως κάθε $x \in \mathscr{H}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο

$$x = P_M(x) + P_{M^{\perp}}(x)$$

όπου $P_M(x) \in M$ και $P_{M^{\perp}}(x) \in M^{\perp}$,και ισχύει

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|P_{M^{\perp}}(x)\|^2$$

λόγω του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Επομένως $\|P_M(x)\|^2 \leq \|x\|^2$. Η απεικόνιση

$$P_M : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$$

λέγεται η **ορθή προβολή επί του** M. Είναι καλά ορισμένη, γραμμική και συνεχής. Μάλιστα $\|P_M\| = 1$ όταν $M \neq \{0\}$.

Χώροι Hilbert: Καθετότητα

Πρόταση

(α) (Κανόνας Παραλληλογράμμου)

$$\textit{για κάθε } x, y \in E, \; \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

(β) (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

$$\textit{αν } x, y \in E \textit{ και } \langle x, y \rangle = 0, \; \textit{τότε } \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Ορθοκανονικές βάσεις

Ορισμός

Μία οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq \mathscr{H}$ *λέγεται* **ορθοκανονική** *αν* $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. *Αν επιπλέον η κλειστή γραμμική θήκη* $\overline{[e_i : i \in I]}$ *είναι όλος ο χώρος* $\mathscr{H}$, *τότε η οικογένεια λέγεται* **ορθοκανονική βάση** *του* $\mathscr{H}$.

Σημ: Μια ορθοκανονική βάση συνήθως δεν είναι βάση με την αλγεβρική έννοια.

Θεώρημα

Κάθε χώρος Hilbert έχει μία ορθοκανονική βάση, η οποία είναι αριθμήσιμη αν και μόνον αν ο χώρος είναι διαχωρίσιμος.

Ορθοκανονικές βάσεις

Θεώρημα

Αν $\{e_i : i \in I\}$ είναι ορθοκανονική βάση του χώρου Hilbert $\mathscr{H}$, τότε κάθε $x \in \mathscr{H}$ γράφεται μοναδικά

$$x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i \quad \textit{και ισχύει} \quad \|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$$

Το άθροισμα των σειρών αυτών είναι εξ'ορισμού το όριο του δικτύου των μερικών αθροισμάτων. Στην διαχωρίσιμη περίπτωση, λόγω της καθετότητας των όρων ο ορισμός αυτός ταυτίζεται με τον συνηθισμένο.
Επομένως η επιλογή μιας ορθοκανονικής βάσης $\{e_i : i \in I\}$ ορίζει μια γραμμική ισομετρική απεικόνιση

$$U \ : \ \mathscr{H} \ \to \ \ell^2(I) \ : \ x \ \to \ (\langle x, e_i \rangle)_{i \in I}$$

η οποία είναι επί του $\ell^2(I)$.

Παράδειγμα: μετασχηματισμός Fourier.
Έστω $k \in \mathbb{Z}$ και $f_k(t) = \exp(2\pi i k t)$, $t \in [0,1]$.
Θεώρημα Η $\{f_k : k \in \mathbb{Z}\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $L^2([0,1])$.
Δηλαδή για κάθε $f \in L^2([0,1])$, έχουμε

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} \langle f, f_k \rangle f_k \quad \text{και ισχύει} \quad \|f\|_2^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |\langle f, f_k \rangle|^2.$$

Εδώ η πρώτη σειρά συγκλίνει ως προς τη νόρμα του $L^2[0,1]$.
Γράφουμε

$$\hat{f}(k) = \langle f, f_k \rangle = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i k t} dt \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Δημιουργείται έτσι μια απεικόνιση

$$F : L^2[0,1] \to \ell^2(\mathbb{Z}) : f \to \hat{f}$$

που είναι ισομετρία και επί.

Ο δυικός ενός χώρου Hilbert

Για κάθε $x \in \mathscr{H}$, η απεικόνιση

$$f_x : \mathscr{H} \to \mathbb{C} : y \to \langle y, x \rangle .$$

είναι γραμμική και συνεχής, και $\|f_x\| = \|x\|$.
Η απεικόνιση

$$\mathscr{H} \to \mathscr{H}^* : x \to f_x$$

είναι *αντιγραμμική* (conjugate linear).

Θεώρημα (Riesz - Fréchet, 1907)

Έστω $\mathscr{H}$ χώρος Hilbert. Για κάθε συνεχή γραμμική μορφή $f : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ υπάρχει μοναδικό $x \in \mathscr{H}$ ώστε $f(y) = \langle y, x \rangle$ για κάθε $y \in \mathscr{H}$, και $\|f\| = \|x\|$. Επομένως ο τοπολογικός δυϊκός ενός χώρου Hilbert $\mathscr{H}$ είναι αντιγραμμικά ισόμορφος με τον $\mathscr{H}$.

Sesquilinear μορφές – ο συζυγής ενός τελεστή

Ορισμός

Έστω $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ χώροι Hilbert. Μία **sesquilinear *μορφή*** *ϕ είναι μια απεικόνιση $\phi : \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2 \to \mathbb{C}$ που είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή και αντιγραμμική ως προς την δεύτερη. Η ϕ λέγεται* ***φραγμένη*** *αν ο αριθμός*

$$\|\phi\| = \sup\{|\phi(x,y)| : x \in \mathscr{H}_1, y \in \mathscr{H}_2, \|x\| = \|y\| = 1\}$$

είναι πεπερασμένος. Αν $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_2 = \mathscr{H}$, η αντίστοιχη ***τετραγωνική μορφή*** *$\tilde{\phi}$ είναι η απεικόνιση $\tilde{\phi}(x) = \phi(x,x)$.*

Όταν $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_2 = \mathscr{H}$, ισχύει η **ταυτότητα πολικότητας (polarization)**: για κάθε $x, y \in \mathscr{H}$,

$$\phi(x,y) = \tilde{\phi}\left(\frac{x+y}{2}\right) - \tilde{\phi}\left(\frac{x-y}{2}\right) + i\tilde{\phi}\left(\frac{x+iy}{2}\right) - i\tilde{\phi}\left(\frac{x-iy}{2}\right).$$

Sesquilinear μορφές – ο συζυγής ενός τελεστή

Παράδειγμα. Αν $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ θέτουμε
$\phi_T(x,y) := \langle Tx, y\rangle \quad (x \in \mathscr{H}_1, y \in \mathscr{H}_2)$.

Πρόταση

Κάθε φραγμένη sesquilinear μορφή $\phi : \mathscr{H}_1 \times \mathscr{H}_2 \to \mathbb{C}$ ορίζει έναν μοναδικό $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ από την σχέση

$$\langle Tx, y\rangle = \phi(x,y) \quad \text{για κάθε } x \in \mathscr{H}_1 \text{ και } y \in \mathscr{H}_2.$$

Πρόταση

Για κάθε $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ υπάρχει μοναδικός $T^* \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$ (ο συζυγής του T) ώστε

$$\langle Tx, y\rangle_2 = \langle x, T^* y\rangle_1 \quad (x \in \mathscr{H}_1, y \in \mathscr{H}_2).$$

Πυκνά ορισμένοι τελεστές

Πρόταση

Έστω $(E, \|.\|_E)$ *χώρος με νόρμα,* $(F, \|.\|_F)$ *χώρος Banach,* D *πυκνός υπόχωρος του* E *και*

$$T : D \to F$$

γραμμική απεικόνιση.
Η T *δέχεται συνεχή επέκταση*

$$T_1 : E \to F \quad \delta\eta\lambda.\ T_1|_D = T$$

αν και μόνον αν είναι συνεχής.

Η επέκταση T_1 *είναι μοναδική (αν υπάρχει) και* $\|T_1\| = \|T\|$.

Αναλλοίωτοι υπόχωροι

Ένας υπόχωρος $E \subseteq \mathscr{H}$ είναι **αναλλοίωτος (invariant)** από έναν φραγμένο τελεστή $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ αν $Ax \in E$ για κάθε $x \in E$. Τότε ο *κλειστός* υπόχωρος $\overline{E}$ είναι και αυτός A-αναλλοίωτος. Θα λέμε ότι ο υπόχωρος E **ανάγει (reduces)** τον A όταν και ο E και ο $E^{\perp}$ είναι A-αναλλοίωτοι.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Έπεται ότι $A(E) \subseteq E$ αν και μόνον αν $A_{21} = 0$, και ότι ο A ανάγεται από τον E αν και μόνον αν $A_{12} = A_{21} = 0$.

Λήμμα

Ένας κλειστός υπόχωρος E είναι A-αναλλοίωτος αν και μόνον αν $AP = PAP$. Ο E ανάγει τον A αν και μόνον αν $A(E) \subseteq E$ και $A^*(E) \subseteq E$, ισοδύναμα αν και μόνον αν $AP = PA$.

Modern approaches to the invariant subspace problem, by Isabelle Chalendar and Jonathan R. Partington, Cambridge University Press, 2011

Το (μινι) Φασματικό Θεώρημα

Λήμμα

Έστω $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ φυσιολογικός τελεστής. Αν $x \in \mathscr{H}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του T με ιδιοτιμή λ, τότε $T^*x = \bar{\lambda}x$.
Έπεται ότι οι ιδιόχωροι ενός φυσιολογικού τελεστή (αν υπάρχουν) τον ανάγουν, και είναι κάθετοι μεταξύ τους.

Θεώρημα

Κάθε φυσιολογικός τελεστής T σ'έναν (μιγαδικό) χώρο Hilbert $\mathscr{H}$ διάστασης $n < \infty$ είναι διαγωνοποιήσιμος, δηλαδή υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{e_k : k = 1, \ldots, n\}$ του $\mathscr{H}$ και $a_k \in \mathbb{C}$ ώστε $Te_k = a_k e_k$ $(k = 1, \ldots, n)$.
Ισοδύναμα, ο T είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος (unitarily equivalent) με έναν διαγώνιο τελεστή, δηλαδή υπάρχει ορθομοναδιαίος τελεστής $U : \mathscr{H} \to \mathbb{C}^n$ ώστε ο UTU^{-1} να είναι διαγώνιος.

Το Φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα (Φασματικό Θεώρημα - Πρώτη μορφή)

Ένας τελεστής $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ *είναι φυσιολογικός αν και μόνον αν είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με έναν πολλαπλασιαστικό τελεστή, δηλαδή αν υπάρχουν: χώρος μέτρου* (X, μ), *ορθομοναδιαίος τελεστής* $U : L^2(X, \mu) \to \mathscr{H}$ *και συνάρτηση* $f \in L^\infty(X, \mu)$ *ώστε*

$$T = UM_f U^{-1}.$$

P.R. Halmos [1963]. What does the spectral theorem say? Amer. Math. Monthly 70.

Το Φάσμα

Ορισμός

*Το **φάσμα** ενός φραγμένου τελεστή T σ'έναν χώρο Banach είναι το σύνολο*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ο } T - \lambda I \text{ δεν έχει (φρ.) αντίστροφο }\}.$$

Το φάσμα $\sigma(A)$ ενός φραγμένου τελεστή A είναι συμπαγές μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Πρόταση

Έστω $A = A^* \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Τότε $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ και

$$\|A\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Ο συναρτησιακός λογισμός

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} c_k \lambda^k \quad \overset{\Phi_0}{\rightsquigarrow} \quad p(A) = \sum_{k=0}^{n} c_k A^k.$$

Πρόταση (Θεώρημα Φασματικής Απεικόνισης I)

Αν $A \in \mathscr{B}(H)$ και p είναι πολυώνυμο, τότε

$$\sigma(p(A)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Θεώρημα

Αν $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ και $A = A^*$ τότε

$$\|p(A)\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} \equiv \|p\|_{\sigma(A)}.$$

Ο συναρτησιακός λογισμός

... άρα η απεικόνιση

$$\Phi_o : (\mathscr{P}(\sigma(A)), \|.\|_{\sigma(A)}) \to (\mathscr{B}(\mathscr{H}), \| : p \to p(A).\|)$$

είναι όχι μόνο *-μορφισμός *-αλγεβρών, αλλά και ισομετρία χώρων με νόρμα. Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις είναι η μοναδική συνεχής επέκταση

$$\Phi_c : (C(\sigma(A)), \|.\|_{\sigma(A)}) \to (\mathscr{B}(\mathscr{H}), \|.\|) : f \to f(A)$$

της απεικόνισης $\Phi_o : p \to p(A)$.
Είναι ισομετρικός *-μορφισμός.

Λήμμα

Για κάθε μη μηδενικό $x \in H$ υπάρχει θετικό κανονικό πεπερασμένο μέτρο Borel μ_x στο $\sigma(A)$ και ισομετρία $U_x : L^2(\sigma(A), \mu_x) \to H$ ώστε $U_x M_f = f(A) U_x$ για κάθε $f \in C(\sigma(A))$ (και ειδικότερα $AU_x = U_x M_{f_1}$ όπου $f_1(\lambda) = \lambda$).

Αποδ. Σταθεροποιούμε ένα μη μηδενικό $x \in H$ και θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση

$$\phi_x : C(\sigma(A)) \to \mathbb{C} : f \to \langle f(A)x, x \rangle.$$

Παρατηρούμε ότι η ϕ_x είναι *θετική* γραμμική μορφή, δηλαδή $\phi_x(f) \geq 0$ για κάθε $f \geq 0$. Από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz υπάρχει (μοναδικό) θετικό πεπερασμένο κανονικό μέτρο Borel μ_x στο $\sigma(A)$ ώστε

$$\int f d\mu_x = \phi_x(f) = \langle f(A)x, x \rangle \quad \text{για κάθε } f \in C(\sigma(A)).$$

Όμως $C(\sigma(A)) \subseteq L^2(\sigma(A), \mu_x)$. Ορίζουμε

$$U_{ox} : (C(\sigma(A)), \|.\|_2) \to (H, \|.\|_H) : f \to f(A)x$$

Ισχυρίζομαι ότι είναι ισομετρία. Πράγματι, για κάθε $f \in C(\sigma(A))$,

$$\begin{aligned}\|f(A)x\|_H^2 &= \langle f(A)x, f(A)x\rangle = \langle f(A)^* f(A)x, x\rangle = \langle (\bar{f}f)(A)x, x\rangle \\ &= \int \bar{f} f d\mu_x = \|f\|_2^2\end{aligned}$$

Άρα επεκτείνεται σε μια ισομετρία

$$U_x : L^2(\sigma(A), \mu_x) \to H$$

που ικανοποιεί $U_x(f) = f(A)x$ όταν η f είναι συνεχής.

Τέλος, για κάθε $g \in C(\sigma(A))$ έχουμε

$$(U_x M_f)(g) = U_x(fg) = (fg)(A)x = f(A)(g(A)x) = (f(A)U_x)(g).$$

άρα $U_x M_f = f(A)U_x$.

Το φασματικό θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές

Το σύνολο τιμών $\mathrm{im}(U_x)$ της ισομετρίας U_x του Λήμματος είναι ακριβώς ο **κυκλικός υπόχωρος**

$$H_x = \overline{[A^n x : n = 0, 1, \ldots]} = \overline{[x, Ax, A^2 x, \ldots]}$$

του x για τον A.

Ορισμός

Ένα διάνυσμα $x \in H$ λέγεται ***κυκλικό (cyclic)*** *για τον τελεστή $A \in \mathscr{B}(H)$ αν ο κυκλικός υπόχωρος (cyclic subspace) που ορίζει είναι όλος ο H, ισοδύναμα αν ο γραμμικός χώρος $[A^n x : n = 0, 1, \ldots]$ είναι πυκνός στον H.*

Πρόταση

Αν ένας αυτοσυζυγής τελεστής $A \in \mathscr{B}(H)$ έχει κυκλικό διάνυσμα, υπάρχει πεπερασμένο θετικό κανονικό μέτρο Borel μ στο $\sigma(A)$ ώστε ο A να είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος με τον τελεστή M_{f_o} του πολλαπλασιασμού επί την ανεξάρτητη μεταβλητή, $(M_{f_o}(g))(x) = xg(x)$, στον $L^2(\sigma(A), \mu)$.

Το φασματικό θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές

Παράδειγμα

Έστω $H = L^2([0,1]) \oplus L^2([0,1])$ [1] *και έστω* $A = M_{f_o} \oplus M_{f_o}$ *όπου* $f_o(\lambda) = \lambda$ $(\lambda \in [0,1])$. *Τότε ο* A *είναι αυτοσυζυγής τελεστής χωρίς κυκλικό διάνυσμα.*

Λήμμα

Αν $A \in \mathscr{B}(H)$ *είναι αυτοσυζυγής, υπάρχει μια οικογένεια* $\{H_i : i \in I\}$ *από κάθετους ανά δύο υποχώρους του* H, *ώστε*

(ι) *κάθε* H_i *να είναι* A*-αναλλοίωτος, δηλ.* $A(H_i) \subseteq H_i$

(ιι) *κάθε* H_i *να είναι* A*-κυκλικός, δηλ. να περιέχει ένα* A*-κυκλικό διάνυσμα*

(ιιι) *το ευθύ άθροισμα* $\oplus_i H_i$ *(δηλαδή ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του* H *που περιέχει κάθε* H_i*) να είναι όλος ο* H.

---

[1] με το εσωτερικό γινόμενο $\langle f_1 \oplus g_1, f_2 \oplus g_2 \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle + \langle g_1, g_2 \rangle$

Το φασματικό θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές

Θεώρημα (Φασματικό Θεώρημα για αυτοσυζυγείς τελεστές)

Έστω $A \in \mathscr{B}(H)$ αυτοσυζυγής τελεστής. Υπάρχει χώρος μέτρου (X, μ), συνάρτηση $f \in L^\infty(X, \mu)$ και ορθομοναδιαίος τελεστής $U : L^2(X, \mu) \to H$ ώστε $A = UM_f U^{-1}$.

Μάλιστα όταν ο χώρος H είναι διαχωρίσιμος, μπορεί να επιλέξει κανείς $X = \mathbb{R}$ και μ ένα σ-πεπερασμένο μέτρο Borel.

Τετραγωνική ρίζα

Πρόταση

Έστω $A = A^* \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Αν $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$ τότε υπάρχει μοναδικός αυτοσυζυγής $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ με $\sigma(B) \subseteq \mathbb{R}^+$ ώστε $B^2 = A$. Γράφουμε $B = A^{1/2}$.

Αποδ. Η συνάρτηση $f(t) = \sqrt{t}$ είναι καλά ορισμένη (πραγματική) και συνεχής στο $\sigma(A)$. Επομένως αν θέσουμε $B = f(A)$, έχουμε $B = B*$, $\sigma(B) = f(\sigma(A)) \subseteq \mathbb{R}^+$ και $B^2 = A$.

Ο B μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον A. Πράγματι, αν ένας $T \in \mathscr{B}(H)$ μετατίθεται με τον A τότε θα μετατίθεται και με κάθε πολυώνυμο του A, άρα και με την $f(A) = B$, που είναι όριο πολυωνύμων του A.

Μοναδικότητα: $\longrightarrow$

Μοναδικότητα της τετραγωνικής ρίζας

Έστω C positive (δηλ. $C = C^*$ και $\sigma(C) \subseteq \mathbb{R}_+$) τελεστής ώστε $C^2 = A$.
Υπάρχουν positive τελεστές D και Z με $D^2 = C$ και $Z^2 = B$.
Σταθεροποιούμε ένα $x \in H$ και θέτουμε $y = (C - B)x$. Τότε

$$\begin{aligned} \|Dy\|^2 + \|Zy\|^2 &= \langle D^2 y, y\rangle + \langle Z^2 y, y\rangle = \langle (B + C)y, y\rangle \\ &= \langle (B + C)(B - C)x, y\rangle \overset{(*)}{=} \langle (B^2 - C^2)x, y\rangle = 0 \end{aligned}$$

(*) γιατί $CB = BC$ αφου $CA = AC$ άρα $Cf(A) = f(A)C$.
Επομένως $Dy = 0$ και άρα $Cy = D^2 y = 0$. Όμοια, $By = 0$.
Τότε όμως $(C - B)y = 0$ και συνεπώς

$$\|(C-B)x\|^2 = \langle (C-B)x, (C-B)x\rangle = \langle y, (C-B)x\rangle = \langle (C-B)y, x\rangle = 0.$$

Αφού το x είναι αυθαίρετο, δείξαμε ότι $B = C$. $\square$

Θετικοί τελεστές

Ορισμός

Ένας $A \in \mathscr{B}(H)$ λέγεται *θετικός* *αν $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ για κάθε $x \in H$.*

Λήμμα

Ένας αυτοσυζυγής τελεστής A στον $\mathscr{H}$ είναι θετικός αν και μόνον αν $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$. (δηλ positive $\equiv$ θετικός!)

Αποδ. Έστω ότι $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$. Τότε ορίζεται ο $B = A^{1/2}$. Για κάθε $x \in \mathscr{H}$,

$$\langle Ax, x\rangle = \langle B^2x, x\rangle = \langle Bx, Bx\rangle = \|Bx\|^2 \geq 0$$

άρα ο A είναι θετικός.

Αντίστροφα έστω ότι ο A είναι θετικός. Αν $\lambda \in \sigma(A)$, υπάρχει (x_n) στον $\mathscr{H}$ με $\|x_n\| = 1$ και $\|(A - \lambda I)x_n\| \to 0$ (γιατί $A = A^*$). Τότε

$$|\langle Ax_n, x_n\rangle - \lambda| = |\langle (A - \lambda I)x_n, x_n\rangle| \leq \|(A - \lambda I)x_n\|.\|x_n\| \to 0$$

άρα $\lambda \geq 0$ (αφού $\lambda \in \mathbb{R}$).

Σημείωσε ότι η υπόθεση $A = A^*$ δεν μπορεί να παραλειφθεί. Για παράδειγμα, ο $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ έχει μη αρνητικό φάσμα ($\sigma(A) = \{0\}$) αλλά δεν είναι θετικός: $\langle Ax, x \rangle = -1$ για $x = (-1, 1)$.

Συνοψίζουμε:

Θεώρημα (Τετραγωνική ρίζα)

Έστω $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) *Ο T είναι θετικός.*

(β) *Υπάρχει $B \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ θετικός ώστε $T = B^2$.*

(γ) *Υπάρχει $S \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ ώστε $T = S^* S$.*

(δ) *$T = T^*$ και $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}^+$.*

Η πολική αναπαράσταση

Ορισμός

Έστω $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$ *τυχαίος τελεστής. Υπενθυμίζουμε ότι ο τελεστής* $T^*T : H_1 \to H_1$ *είναι θετικός. Η μοναδική θετική τετραγωνική του ρίζα συμβολίζεται* $|T|$.

Άσκηση

Να βρεθούν δύο 2×2 *πίνακες* A, B *ώστε να μην ισχύει η ανισότητα* $|A+B| \leq |A| + |B|$.

Θεώρημα

Έστω $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$ *τυχαίος τελεστής. Υπάρχει μερική ισομετρία* $V : H_1 \to H_2$ *με αρχικό χώρο* $\overline{|T|(H_1)}$ *και τελικό χώρο* $\overline{T(H_1)}$ *ώστε*

$$T = V|T|.$$

«Μοναδικότητα»: Αν $T = UX$ *όπου* $X \geq 0$ *και* U *μερική ισομετρία με αρχικό χώρο* $\overline{X(H_1)}$ *τότε* $U = V$ *και* $X = |T|$.

Διαστολές τελεστών

Αν H είναι κλειστός υπόχωρος χώρου Hilbert H, κάθε $B \in \mathscr{B}(K)$ ορίζει έναν $A \in B(H)$ ως εξής:

$$\begin{aligned} A : H &\xrightarrow{B} K \xrightarrow{P} H \\ x &\longrightarrow Bx \longrightarrow PBx \end{aligned}$$

όπου $P \in \mathscr{B}(K)$ η ορθή προβολή στον H. Δηλαδή

$$A = PB|_H \quad \text{ή} \quad AP = PBP \quad \text{ή} \quad \langle Ax, x\rangle = \langle Bx, x\rangle \text{ για κάθε } x \in H.$$

Λέμε ότι ο A είναι η συμπίεση (compression) του B στον H και ο B είναι η 1-διαστολή (1-dilation) [2] του A στον K.
Στην ειδική περίπτωση που ο H μένει αναλλοίωτος από τον B (οπότε $PBP = BP$) ισχύει ότι $A = B|_H$, δηλαδή ο A είναι ο περιορισμός (restriction) του B στον H και ο B είναι η επέκταση (extension) του A στον K.

---

[2] Ο Halmos χρησιμοποιεί τον όρο dilation.

Παράδειγμα $H = \ell^2(\mathbb{Z}_+) \subseteq K = \ell^2(\mathbb{Z})$.
$S \in \mathscr{B}(H)$ unilateral shift : $Se_n = e_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ και
$U \in \mathscr{B}(K)$ bilateral shift : $Ue_n = e_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$.
$U|_H = S$ (περιορισμός) αλλά $U^*|_H \neq S^*$ διότι $U^* e_0 = e_{-1}$ ενώ $S^* e_0 = 0$. Εδώ $S^* = PU^*P$: συμπίεση.
Ως προς την $K = H^\perp \oplus H$ έχουμε

$$U = \begin{bmatrix} X & 0 \\ Y & S \end{bmatrix}, \quad U^* = \begin{bmatrix} X^* & Y^* \\ 0 & S^* \end{bmatrix}.$$

Εδώ ο H είναι U-αναλλοίωτος. Παρατήρησε ότι

$$U^m = \begin{bmatrix} * & 0 \\ * & S^m \end{bmatrix} \text{ για κάθε } m \in \mathbb{Z}_+.$$

Γενικά όταν $AP = PBP$ δεν έπεται πάντα ότι $A^mP = PB^mP$.
Παράδειγμα. Έστω $A \in \mathscr{B}(H)$ συστολή (δηλ. $\|A\| \leq 1$). Θέτω $D = (I - A^*A)^{1/2}$, $D_* = (I - AA^*)^{1/2}$ και

$$B = \begin{bmatrix} A & D_* \\ D & -A^* \end{bmatrix}.$$

Τότε ο B είναι unitary dilation του A, αλλά ο B^2 είναι dilation του A^2 μόνο αν $D_*D = 0$. Όταν μπορούμε $K = H_- \oplus H \oplus H_+$ και

$$B = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & A & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

τότε για κάθε $m \in \mathbb{Z}_+$ ο B^m είναι διαστολή του A^m.
Αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν υπάρχουν B^*-αναλλοίωτοι κλειστοί υπόχωροι M, N του K με $N \subseteq M$ και $H = M \ominus N := M \cap N^\perp$ (γράφω $H_- = N$ και $H_+ = M^\perp$) [Άσκηση!].

Διαστολές τελεστών

Ορισμός

Ένας $B \in \mathscr{B}(K)$ λέγεται διαστολή (dilation) [3] *ενός $A \in \mathscr{B}(H)$ αν $H \subseteq K$ και $A^n = PB^n|_H$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Δηλαδή ο B θα λέγεται διαστολή του A αν η ημιομάδα $\{B^n : n \in \mathbb{Z}_+\} \subseteq \mathscr{B}(K)$ είναι ταυτόχρονη 1-διαστολή της ημιομάδας $\{A^n : n \in \mathbb{Z}_+\} \subseteq \mathscr{B}(H)$.
Θα δείξουμε:

Θεώρημα

Κάθε συστολή $A \in \mathscr{B}(H)$ δέχεται διαστολή σε unitary $B \in \mathscr{B}(K)$.

Αναγκαία συνθήκη για να είναι ο B unitary είναι $\|A\| = \|PBP\| \leq \|B\| = 1$.

Πορεία: (α) Κάθε συστολή διαστέλλεται σε ισομετρία.
(β) Κάθε ισομετρία σπάει σε unitary $\oplus$ unilateral shift (με πολλ.).
(γ) Κάθε shift επεκτείνεται σε bilateral shift (με πολλ.).

[3] O Halmos χρησιμοποιεί τον όρο power dilation.

Unilateral shifts

Έστω $A \in \mathscr{B}(H)$ ισομετρία. Ένας κλειστός υπόχωρος $L \subseteq H$ λέγεται περιπλανώμενος (wandering) για τον A αν οι υπόχωροι $\{L, S(L), S^2(L), \dots\}$ είναι κάθετοι ανά δύο.
Συμβολίζουμε $M_+(L)$ το ευθύ άθροισμα

$$M_+(L) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} A^n(L) = \bigvee_{n=0}^{\infty} A^n(L).$$

Ο L καθορίζεται μοναδικά απ' τον $M_+(L)$:

$$L = M_+(L) \ominus A(M_+(L)) := M_+(L) \cap A(M_+(L))^{\perp}.$$

Ορισμός

Ένας τελεστής $S \in \mathscr{B}(H)$ λέγεται (unilateral) shift αν
(α) $\|Sx\| = \|x\|$ για κάθε $x \in H$ (είναι ισομετρία) και
(β) υπάρχει ένας S-περιπλανώμενος υπόχωρος $L \subseteq H$ τέτοιος ώστε $M_+(L) = H$.
Ο αριθμός $\dim L$ ονομάζεται η πολλαπλότητα του shift S.

Unilateral shifts

Αν S shift, τότε $\exists L$ με $M_+(L) = H$, οπότε

$$L = M_+(L) \ominus S(M_+(L)) = H \ominus S(H) = \ker S^*$$

άρα ο L καθορίζεται απ΄ τον S.

Παρατήρηση

Δύο shifts $S \in B(H)$ και $S_1 \in B(H_1)$ είναι unitarily ισοδύναμα ανν οι περιπλανώμενοι υπόχωροί τους L και L_1 έχουν την ίδια διάσταση.
Άρα ο αριθμός $\dim L$ καθορίζει μοναδικά ένα shift S ως προς unitary ισοδυναμία.

Από ισομετρία σε unilateral shift

Θεώρημα (Διάσπαση Wold)

Έστω $A \in \mathscr{B}(H)$ ισομετρία. Υπάρχει μοναδική διάσπαση $H = H_s \oplus H_u$ σε A-αναλλοίωτους υποχώρους ώστε ο περιορισμός A_s του A στον H_s είναι shift (αν δεν μηδενίζεται) και ο περιορισμός A_u του A στον H_u είναι unitary (αν δεν μηδενίζεται).
Ο χώρος $L = \ker A^*$ είναι A-περιπλανώμενος και

$$\begin{aligned} H_s = M_+(L) &= \bigoplus_{n\geq 0} A^n(L) \\ &= \{x \in H : {A^*}^n x \to 0\} \end{aligned}$$

$$\textit{και} \qquad H_u = \bigcap_{n\geq 0} A^n(H).$$

Άλλη απόδειξη: M Ανούσης
http://www.math.bas.bg/serdica/2015/2015-035-048.pdf

Bilateral shifts

Ορισμός

Αμφίπλευρο shift είναι ένας unitary τελεστής $U \in \mathscr{B}(H)$ που έχει έναν περιπλανώμενο υπόχωρο L τέτοιο ώστε $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} U^n(L) = H$.

Παράδειγμα Ο $U \in \mathscr{B}(\ell^2(\mathbb{Z}))$ όπου $Ue_n = e_{n+1}$ $(n \in \mathbb{Z})$. Ένας περιπλανώμενος υπόχωρος είναι ο $L = [e_{-122}]$, για παράδειγμα.

Αν $U \in \mathscr{B}(H)$ είναι αμφίπλευρο shift με έναν περιπλανώμενο υπόχωρο L, θέτουμε $H_+ \equiv \bigoplus_{n\geq 0} U^n(L)$ και ονομάζουμε $S \in \mathscr{B}(H_+)$ τον περιορισμό του U στον H_+: είναι unilateral shift. Αντίστροφα,

Πρόταση

Κάθε unilateral shift $S \in \mathscr{B}(H)$ επεκτείνεται σε bilateral shift $U \in \mathscr{B}(K)$ (όπου $K \supseteq H$).

Ακριβέστερα: *Υπάρχει χώρος Hilbert K, ισομετρική εμφύτευση $W : H \to K$ και αμφίπλευρο shift $U \in \mathscr{B}(K)$ που αφήνει τον $W(H)$ αναλλοίωτο ώστε $S = W^*UW$.*

Απο unilateral shift σε bilateral shift

Απόδειξη. Θέτουμε

$$K = \ell^2(\mathbb{Z}) \otimes L = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} L_n = \{(y_n)_{n\in\mathbb{Z}} : y_n \in L, \sum_n \|y_n\|^2 < \infty\}$$

(κάθε $L_n = L$). Ορίζουμε

$$W : x = \sum_{n\geq 0} S^n x_n \to (\dots 0, 0, \boxed{x_0}, x_1, x_2, \dots).$$

και

$$U((\dots y_{-1}, \boxed{y_0}, y_1, \dots)) = (\dots y_{-2}, \boxed{y_{-1}}, y_0, \dots)$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} WS(\sum_{n\geq 0} S^n x_n) &= W(\sum_{n\geq 0} S^{n+1} x_n) = (\dots 0, 0, \boxed{0}, x_0, x_1, \dots) \\ &= UW(\sum_{n\geq 0} S^n x_n). \end{aligned}$$

Επέκταση ισομετρίας σε unitary

Πρόταση

Κάθε ισομετρία $T \in \mathscr{B}(H)$ *επεκτείνεται σε unitary* $V \in \mathscr{B}(K)$ *(όπου* $K \supseteq H$*).*

Απόδειξη Πρώτα από Wold έχω $T = T_s \oplus T_u$ στον $H = H_s \oplus H_u$ όπου T_u unitary και T_s shift. Επεκτείνω τον T_s σε bilateral shift U_s στον $K_s \supset H_s$. Ορίζω

$$K = K_s \oplus H_u \quad \text{και} \quad V = U_s \oplus T_u.$$

Δηλαδή, ως προς την $K = (K_s \ominus H_s) \oplus H_s \oplus H_u$ έχουμε

$$V = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & T_s & 0 \\ 0 & 0 & T_u \end{bmatrix}$$

Διαστολή συστολής σε ισομετρία (Schäeffer)

Έστω $A \in \mathscr{B}(H)$ συστολή, $\tilde{H} = \bigoplus_{n\geq 0} H_n$ $(H_n = H)$.

$$V : \tilde{H} \to \tilde{H} : \ (x_0, x_1, x_2, \dots) \to (Ax_0, D_A x_0, x_1, x_2, \dots)$$

$$\text{δηλ.} \quad V = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & \dots \\ D_A & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & I & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

όπου $\quad D_A = (I - A^*A)^{1/2}$. Η V είναι ισομετρία, διαστολή της A.
Όμως, αν $D_A = 0$,

$$V = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & I & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}$$

πολύ «μεγάλη» διαστολή...

Διαστολή συστολής

Έστω $A \in \mathscr{B}(H)$, $\|A\| \leq 1$. Μια διαστολή $V \in \mathscr{B}(K)$ του A είναι minimal όταν ο K είναι ο μικρότερος V-*αναλλοίωτος* υπόχωρος του K που περιέχει τον H.

Θεώρημα

Κάθε συστολή $A \in \mathscr{B}(H)$ έχει μια minimal ισομετρική διαστολή $V \in \mathscr{B}(K)$.
Είναι ουσιαστικά μοναδική: αν $V' \in \mathscr{B}(K')$ είναι minimal *ισομετρική διαστολή του A, υπάρχει unitary $W : K \to K'$ τέτοιος ώστε $WV = V'W$ και $Wx = x$ για κάθε $x \in H$.*

Ύπαρξη: Αν $V_0 \in \mathscr{B}(K_0)$ είναι μια διαστολή του A, θέτουμε $K = \bigvee_{m \geq 0} V_0^m(H)$ (= κλ. γραμμ. θήκη ένωσης) και $V = V_0|_K$.
Δείξαμε:

Θεώρημα

Κάθε συστολή $A \in \mathscr{B}(H)$ δέχεται διαστολή σε unitary $B \in \mathscr{B}(K)$.

Minimal unitary dilation

Θεώρημα

Κάθε συστολή $A \in \mathscr{B}(H)$ δέχεται διαστολή σε unitary $B \in \mathscr{B}(K)$ που είναι minimal, δηλ. ο K είναι ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του K που περιέχει τον H και ανάγει (reduces) τον B. Μια minimal διαστολή είναι μοναδική ως προς unitary ισοδυναμία.

Ύπαρξη: Αν $B_0 \in \mathscr{B}(K_0)$ είναι μια unitary διαστολή του A, θέτουμε $K = \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} B_0^n(H)$ (= κλ. γραμμ. θήκη ένωσης) και $B = B_0|_K$.

Ανισότητα von Neumann

Θεώρημα

Αν $T \in \mathscr{B}(H)$ είναι συστολή και p πολυώνυμο, τότε

$$\|p(T)\|_{\mathscr{B}(H)} \leq \sup\{|p(z)| : z \in \mathbb{T}\}.$$

Πόρισμα (Αρχή μεγίστου)

Αν p πολυώνυμο, τότε για κάθε $w \in \mathbb{C}$ με $|w| \leq 1$,

$$|p(w)| \leq \sup\{|p(z)| : |z| = 1\}.$$

Απόδειξη Έστω $w \in \mathbb{C}, |w| \leq 1$. Θεωρώ τον τελεστή $T_w : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : x \to wx$. Είναι συστολή: $\|T_w\| = |w| \leq 1$, άρα από το θεώρημα έχουμε $\|p(T_w)\| \leq \sup\{|p(z)| : z \in \mathbb{T}\}$. Όμως $p(T_w)x = p(w)x$ για κάθε x, οπότε $\|p(T_w)\| = |p(w)|$.

Διαστολή περισσότερων συστολών

Θεώρημα (Ando)

Αν $T_1, T_2 \in \mathscr{B}(H)$ *είναι δύο συστολές* που μετατίθενται $(T_1 T_2 = T_2 T_1)$, *υπάρχει χώρος Hilbert* K *που περιέχει τον* H *και unitaries* $U_1, U_2 \in \mathscr{B}(K)$ *που μετατίθενται, ώστε*

$$T_1^n T_2^m = P_H U_1^n U_2^m|_H \quad \text{για κάθε } n, m \geq 0.$$

Πόρισμα (Ανισότητα von Neumann)

Αν $T_1, T_2 \in \mathscr{B}(H)$ *είναι δύο συστολές* που μετατίθενται *και* p *ένα πολυώνυμο δύο μεταβλητών, τότε*

$$\|p(T_1, T_2)\|_{\mathscr{B}(H)} \leq \sup\{|p(z_1, z_2)| : |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1\}.$$

Θετικές επεκτάσεις

Πρόταση

Έστω K *συμπαγής χώρος. Αν* $\psi : C(K) \to \mathbb{C}$ *είναι γραμμική και* $\psi(\mathbf{1}) = 1 = \|\psi\|$, *τότε η* ψ *είναι* ***θετική***, *(απεικονίζει μη αρνητικές συναρτήσεις σε μη αρνητικούς αριθμούς), και επομένως* $\psi(h^*) = \overline{\psi(h)}$ *για κάθε* $h \in C(K)$.
(Ειδικότερα, ένα μιγαδικό μέτρο μ *στον* K *με* $\mu(K) = 1 = \|\mu\|$ *είναι θετικό μέτρο.)*

Θετικές επεκτάσεις

Πρόταση

Έστω H χώρος Hilbert και

$$\rho : A(\mathbb{D}) \to \mathscr{B}(H)$$

γραμμική συστολή με $\rho(\mathbf{1}) = 1$ (δηλ. $\rho(e_0) = 1$). Η ρ δέχεται μοναδική θετική επέκταση σε μια γραμμική απεικόνιση

$$\tilde{\rho} : C(\mathbb{T}) \to \mathscr{B}(H)$$

Αν επί πλέον η ρ είναι πολλαπλασιαστική, τότε διαστέλλεται σε μια *-αναπαράσταση της $C(\mathbb{T})$.

Φασματικά μέτρα

Ορισμός

Έστω $(K, \mathscr{S})$ *μετρήσιμος χώρος. Μια οικογένεια* $\{E(\Omega) : \Omega \in \mathscr{S}\}$ *τελεστών σ'έναν χώρο Hilbert* H *λέγεται* ***φασματικό μέτρο*** *(**spectral measure**) αν ικανοποιεί τις ιδιότητες*

1. $E(\Omega)^* = E(\Omega)$
2. $E(\Omega_1 \cap \Omega_2) = E(\Omega_1).E(\Omega_2)$
3. $E(\emptyset) = 0$ *και* $E(K) = I$
4. *Για κάθε* $x, y \in H$, *η απεικόνιση* $\mu_{xy} : \Omega \to \langle E(\Omega)x, y\rangle$ *είναι μιγαδικό μέτρο ορισμένο στην* $\mathscr{S}$.

4′ *Για κάθε* $x \in H$, *η απεικόνιση* $\mu_{xx} : \Omega \to \langle E(\Omega)x, x\rangle$ *είναι (θετικό) μέτρο ορισμένο στην* $\mathscr{S}$.

Φασματικά μέτρα

$$f = \sum_i \lambda_i \chi_{\Omega_i} \rightsquigarrow \int_K f(\lambda) dE_\lambda = \sum_i \lambda_i E(\Omega_i) \in \mathscr{B}(H).$$

Πρόταση

Αν $\{E(\Omega) : \Omega \in \mathscr{S}\}$ *είναι ένα φασματικό μέτρο ορισμένο σ'έναν μετρήσιμο χώρο* $(K, \mathscr{S})$ *με τιμές προβολές σ'έναν χώρο Hilbert* H*, τότε η απεικόνιση* $\chi_\Omega \to E(\Omega)$ *ορίζει έναν *-μορφισμό*

$$\mathscr{L}^\infty(K) \to \mathscr{B}(H) : f \to \int f dE$$

*από την *-άλγεβρα* $\mathscr{L}^\infty(K)$ *των φραγμένων μετρήσιμων συναρτήσεων* $f : K \to \mathbb{C}$ *με τιμές στον* $\mathscr{B}(H)$ *που ικανοποιεί*

$$\left\| \int f dE \right\| \le \sup |f| \quad \textit{και} \quad \langle (\int f dE) x, y \rangle = \int f d\mu_{xy} \qquad (x, y \in H)$$

όπου $\mu_{xy}(\Omega) = \langle E(\Omega) x, y \rangle$.

Μέτρα και αναπαραστάσεις

Έστω K συμπαγής χώρος, $\mathscr{S}$ η σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων.

Θεώρημα

*Κάθε *-αναπαράσταση π της $C(K)$ σ'έναν χώρο Hilbert H ορίζει ένα μοναδικό κανονικό φασματικό μέτρο $E(.)$ ορισμένο στα Borel υποσύνολα του K ώστε*

$$\int_K f dE = \pi(f) \qquad (f \in C(K)).$$

Οι προβολές $E(\Omega)(\Omega \subseteq K$ Borel) δεν ανήκουν εν γένει στην C*-άλγεβρα $\mathscr{B} = \{\pi(f) : f \in C(K)\}$. Ανήκουν στην άλγεβρα $\mathscr{B}''$, τον *δεύτερο μεταθέτη* της $\mathscr{B}$, δηλαδή μετατίθενται με κάθε φραγμένο τελεστή που μετατίθεται με την $\mathscr{B}$.
Μάλιστα, ένας τελεστής $X \in \mathscr{B}(H)$ μετατίθεται με κάθε στοιχείο $\pi(f)$ της $\mathscr{B}$ αν και μόνον αν μετατίθεται με κάθε $E(\Omega)$.

Το Φασματικό Θεώρημα

Λήμμα

Έστω $T \in \mathscr{B}(H)$ φυσιολογικός τελεστής. Τότε, για κάθε πολυώνυμο δύο μεταβλητών $p(t,s) = \sum_{n,m=0}^{N} c_{nm} t^n s^m$,

$$\sigma(p(T,T^*)) = \{p(z,\bar{z}) : z \in \sigma(T)\}$$

$$\text{άρα} \quad \|p(T,T^*)\| = \sup\{|p(z,\bar{z})| : z \in \sigma(T)\}.$$

Θεώρημα (Συναρτησιακός λογισμός)

*Αν $T \in \mathscr{B}(H)$ είναι φυσιολογικός, η απεικόνιση $\pi_o : p(f_o,\overline{f}_o) \to p(T,T^*)$ επεκτείνεται σε ισομετρικό *-μορφισμό $\pi : C(\sigma(T)) \to \mathscr{B}(H)$. Το σύνολο τιμών του π είναι η $C^*(T)$, η μικρότερη C^*-υπάλγεβρα του $\mathscr{B}(H)$ που περιέχει τον T και τον ταυτοτικό τελεστή I.*

Το Φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα (Το Φασματικό Θεώρημα)

Αν $T \in \mathscr{B}(H)$ *είναι φυσιολογικός τελεστής, τότε υπάρχει μοναδικό κανονικό φασματικό μέτρο* $\{E(\Omega) : \Omega \subseteq \mathbb{C} \text{ Borel }\}$ *που φέρεται από το* $\sigma(T)$ *ώστε*

$$T = \int \lambda \, dE_\lambda .$$

Τέλος, ένας $X \in \mathscr{B}(H)$ *μετατίθεται με τον* T *αν και μόνον αν μετατίθεται με κάθε* $E(\Omega)$.

Θεώρημα (Fuglede)

Αν ο T *είναι φυσιολογικός, τότε ο* X *μετατίθεται με τον* T *αν και μόνον αν μετατίθεται με τον* T^*.