Διαστολές Τελεστών

1 Εισαγωγή

Αν H είναι [1] κλειστός υπόχωρος χώρου Hilbert K, κάθε $B \in \mathcal{B}(K)$ ορίζει έναν $A \in B(H)$ ως εξής:

$$\begin{aligned} A : & H \xrightarrow{B} K \xrightarrow{P} H \\ & x \longrightarrow Bx \longrightarrow PBx \end{aligned}$$

όπου $P \in \mathcal{B}(K)$ η ορθή προβολή στον H. Δηλαδή

$$A = PB|_H \quad \text{ή} \quad AP = PBP \quad \text{ή} \quad \langle Ax, x\rangle = \langle Bx, x\rangle \text{ για κάθε } x \in H.$$

Λέμε ότι ο A είναι η *συμπίεση (compression)* του B στον H και ο B είναι η *1-διαστολή (1-dilation)* [2] του A στον K.

Στην ειδική περίπτωση που ο H μένει αναλλοίωτος από τον B (οπότε $PBP = BP$) ισχύει ότι $A = B|_H$, δηλαδή ο A είναι *περιορισμός (restriction)* του B στον H και ο B είναι *επέκταση (extension)* του A στον K.

Παράδειγμα 1.1 $H = \ell^2(\mathbb{Z}_+) \subseteq K = \ell^2(\mathbb{Z})$.
$S \in \mathcal{B}(H)$ unilateral shift : $Se_n = e_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ και
$U \in \mathcal{B}(K)$ bilateral shift : $Ue_n = e_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Εδώ $U|_H = S$ (ο S είναι περιορισμός του U) αλλά $U^*|_H \neq S^*$ διότι $U^*e_0 = e_{-1}$ ενώ $S^*e_0 = 0$. Ο S^* είναι συμπίεση του U^*: $S^* = PU^*P$.

Ως προς την διάσπαση $K = H^\perp \oplus H$, έχουμε

$$U = \begin{bmatrix} X & 0 \\ Y & S \end{bmatrix}, \quad U^* = \begin{bmatrix} X^* & Y^* \\ 0 & S^* \end{bmatrix}$$

όπου X, Y κατάλληλοι τελεστές. Παρατήρησε ότι, επειδή ο H είναι U-αναλλοίωτος,

$$U^m = \begin{bmatrix} * & 0 \\ * & S^m \end{bmatrix} \text{ για κάθε } m \in \mathbb{Z}_+.$$

Γενικά όταν $AP = PBP$ δεν έπεται πάντα ότι $A^mP = PB^mP$.

Παράδειγμα 1.2 *Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ συστολή (δηλ. $\|A\| \leq 1$). Θέτω $D = (I - A^*A)^{1/2}$, $D_* = (I - AA^*)^{1/2}$ (οι D και D_* ορίζονται) και*

$$B = \begin{bmatrix} A & D_* \\ D & -A^* \end{bmatrix}.$$

Τότε ο B είναι unitary και είναι 1-διαστολή του A. Όμως ο B^2 είναι 1-διαστολή του A^2 μόνο αν $D_*D = 0$.

[1] shft2, revision of shft1, 17 May 2015, compiled 19 Μαΐου 2015

[2] Ο Halmos χρησιμοποιεί τον όρο dilation.

Απόδειξη. Άσκηση!

Όταν μπορούμε να βρούμε έναν $B \in \mathcal{B}(K)$ και μια ορθογώνια διάσπαση του K της μορφής $K = H_- \oplus H \oplus H_+$ ως προς την οποία ο B να γράφεται

$$B = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & A & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

τότε για κάθε $m \in \mathbb{Z}_+$ ο B^m είναι 1-διαστολή του A^m.

Αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν υπάρχουν B-αναλλοίωτοι κλειστοί υπόχωροι M, N του K με $N \subseteq M$ και $H = M \ominus N := M \cap N^\perp$ (γράφω $N = H_+$ και $M = H_+ \oplus H = H_-^\perp$). [Άσκηση!].

δ ι λ **Ορισμός 1** *Ένας $B \in \mathcal{B}(K)$ λέγεται* διαστολή (dilation) [3] *ενός $A \in \mathcal{B}(H)$ αν $H \subseteq K$ και*

$$A^n = PB^n|_H \quad \textit{για κάθε } \; n \in \mathbb{N}$$

(όπου $P \in \mathcal{B}(K)$ η προβολή στον H), ή ισοδύναμα,

$$\langle A^n x, y \rangle = \langle B^n x, y \rangle \quad \textit{για κάθε } x, y \in H \textit{ και } \; n \in \mathbb{N}.$$

Δηλαδή ο B θα λέγεται διαστολή του A αν η ημιομάδα $\{B^n : n \in \mathbb{Z}_+\} \subseteq \mathcal{B}(K)$ είναι ταυτόχρονη 1-διαστολή της ημιομάδας $\{A^n : n \in \mathbb{Z}_+\} \subseteq \mathcal{B}(H)$.

Όπως παρατηρήσαμε, μια διαστολή $B \in \mathcal{B}(K)$ του $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι επέκταση αν και μόνον αν ο H είναι B-αναλλοίωτος.

Για να υπάρχει unitary διαστολή B του A, είναι αναγκαία συνθήκη ο A να είναι συστολή: $\|A\| = \|PBP\| \leq \|B\| = 1$. Θα δείξουμε αντίστροφα ότι

Θεώρημα 1.3 *Κάθε συστολή $A \in \mathcal{B}(H)$ δέχεται διαστολή σε unitary $B \in \mathcal{B}(K)$.*

Για να το αποδείξουμε, θα δείξουμε τα ακόλουθα:
(α) Κάθε συστολή διαστέλλεται σε ισομετρία.
(β) Κάθε ισομετρία σπάει σε unitary $\oplus$ unilateral shift (με «πολλαπλότητα»).
(γ) Κάθε shift επεκτείνεται σε bilateral shift (με «πολλαπλότητα»).

2 Μονόπλευρα Shifts

Ορισμός 2 *Ένας κλειστός υπόχωρος L ενός χώρου Hilbert H λέγεται* **περιπλανώμενος (wandering)** *για μια* ισομετρία $A \in \mathcal{B}(H)$ *αν οι υπόχωροι $L, A(L), A^2(L), \ldots$ είναι κάθετοι ανα δύο.*

(Οι υπόχωροι $L, A(L), A^2(L), \ldots$ είναι κλειστοί αφού ο A είναι ισομετρία.)

Παράδειγμα 2.1 *Ο υπόχωρος $L := \ker A^* = H \ominus A(H)$ είναι περιπλανώμενος.*

[3] Ο Halmos χρησιμοποιεί τον όρο power dilation.

Απόδειξη. Αν $A^n x \in A^n(L)$ και $A^m y \in A^m(L)$ όπου $k = n - m > 0$ τότε, εφόσον ο A^m είναι ισομετρία,

$$\langle A^n x, A^m y\rangle = \left\langle A^m A^k x, A^m y\right\rangle = \left\langle A^k x, y\right\rangle = 0$$

διότι $A^k x \in A(H)$ (εφόσον $k \geq 1$) ενώ το y είναι στον L που είναι κάθετο στον $A(H)$. Επομένως $A^n(L) \perp A^m(L)$. □

Παρατήρηση 2.2 *Γενικά μια ισομετρία που δεν είναι unitary έχει πολλούς περιπλανώμενους υποχώρους. Για παράδειγμα αν $L := \ker A^*$ όλοι οι υπόχωροι $S^n(L)$ είναι περιπλανώμενοι. Επίσης, αν υπάρχουν δυο μη μηδενικά κάθετα διανύσματα x, y στον L, ο υπόχωρος $L' = [x, Sy]$ είναι περιπλανώμενος και διαφορετικός από τους προηγούμενους.*

Συμβολισμός Αν $\{M_n\}$ είναι κάθετοι ανά δύο κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert H, το (ορθογώνιο) ευθύ άθροισμα

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n = M_0 \oplus M_1 \oplus M_2 \oplus \dots$$

είναι ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος $\bigvee_n M_n$ του H που περιέχει κάθε M_n. Αποτελείται από όλα τα $\xi \in H$ της μορφής

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \qquad \text{όπου } \xi_n \in M_n \text{ και } \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|\xi_n\|^2 < \infty.$$

Αν L είναι A-περιπλανώμενος υπόχωρος, το ευθύ άθροισμα

$$M_+(L) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} A^n(L)$$

είναι ο μικρότερος A-αναλλοίωτος υπόχωρος του H που περιέχει τον L.

ρεςο **Παρατήρηση 2.3** *Μπορούμε να ξαναβρούμε τον περιπλανώμενο υπόχωρο L από τον $M_+(L)$:*

$$L = M_+(L) \ominus A(M_+(L)) := M_+(L) \cap (A(M_+(L)))^{\perp}.$$

Πράγματι, ο L περιέχεται στον $M_+(L)$ και είναι κάθετος σε κάθε $A^{n+1}(L)$, $(n \geq 0)$, άρα στο ευθύ τους άθοισμα, που είναι ο $A(M_+(L))$. Αντίστροφα, αν ένα $\xi = \sum_{k \geq 0} A^k x_k$ είναι στον $M_+(L)$ (δηλ. κάθε x_k ανήκει στο L) και είναι κάθετο στον $A(M_+(L))$, άρα σε κάθε $A^{n+1}(L)$, τότε για κάθε $\eta \in L$ και $n \geq 0$ έχουμε

$$0 = \left\langle \xi, A^{n+1}\eta\right\rangle = \sum_{k \geq 0} \left\langle A^k x_k, A^{n+1}\eta\right\rangle = \left\langle A^{n+1}x_{n+1}, A^{n+1}\eta\right\rangle = \langle x_{n+1}, \eta\rangle$$

άρα $x_{n+1} = 0$ για κάθε $n \geq 0$, οπότε $\xi = x_0 \in L$. □

Ορισμός 3 *Ένας τελεστής $S \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται **(unilateral) shift** αν*
(α) $\|Sx\| = \|x\|$ για κάθε $x \in H$ (είναι ισομετρία) *και*
(β) υπάρχει ένας κλειστός υπόχωρος $L \subseteq H$ που είναι περιπλανώμενος (wandering) για τον S, τέτοιος ώστε το άθροισμά $M_+(L)$ των $S^n(L)$ να είναι ο H.

*Ο αριθμός $\dim L$ ονομάζεται **η πολλαπλότητα** του shift S.*

Από την Παρατήρηση 2.3 έπεται ότι ο περιπλανώμενος υπόχωρος L καθορίζεται μοναδικά από τον S: εφόσον $M_+(L) = H$, έχουμε

$$L = H \ominus S(H) = S(H)^{\perp} = \ker(S^*).$$

Επομένως η πολλαπλότητα ενός shift είναι καλά ορισμένη.

Αντίστροφα, η πολλαπλότητα ενός shift το καθορίζει μοναδικά ως προς unitary ισοδυναμία:

Παρατήρηση 2.4 *Δύο shifts $S \in B(H)$ και $S_1 \in B(H_1)$ είναι unitarily ισοδύναμα αν και μόνο αν οι περιπλανώμενοι υπόχωροί τους L και L_1 έχουν την ίδια διάσταση.*

Πράγματι, αν οι L και L_1 έχουν την ίδια διάσταση, επιλέγοντας έναν unitary $U : L \to L_1$ ορίζουμε

$$V : H \to H_1 : \sum S^n(x_n) \to \sum S_1^n(Ux_n).$$

Είναι φανερό ότι ο V είναι αντιστρέψιμος:

$$V^{-1}\left(\sum S_1^n(y_n)\right) = \sum S^n(U^{-1}y_n)$$

και είναι ισομετρικός διότι

$$\left\|\sum S_1^n(Ux_n)\right\|^2 = \sum \|S_1^n(Ux_n)\|^2 = \sum \|x_n\|^2 = \left\|\sum S^n(x_n)\right\|^2. \qquad \square$$

Για παράδειγμα ο τελεστής $Tf(z) = zf(z), \;\; f \in H^2$ είναι shift. [4]

Θα χρειασθούμε μια εύκολη παρατήρηση:

προθ **Παρατήρηση 2.5** *Αν $T \in B(H)$ είναι ισομετρία και P προβολή, τότε η προβολή στον χώρο $TP(H)$ είναι η TPT^*.*

Απόδειξη. Ο χώρος $TP(H)$ είναι κλειστός αφού ο T είναι ισομετρία.
Αν $\xi = T(\eta) \in TP(H)$ τότε

$$TPT^*\xi = TPT^*T\eta = TP\eta = T\eta = \xi$$

εφόσον $T^*T = I$ και $\eta \in P(H)$.

Και αν $\zeta \perp TP(H)$ τότε $TPT^*\zeta = 0$ εφόσον για κάθε $\xi \in H$ έχουμε $\langle TPT^*\zeta, \xi\rangle = \langle \zeta, TPT^*\xi\rangle = 0$ διότι $P(T^*\xi) \in P(H)$ άρα $TPT^*\xi \in TP(H)$. $\square$

[4] Παρατήρησε ότι ο T είναι unitarily ισοδύναμος με το συνηθισμένο shift (με πολλαπλότητα 1) $Se_n = e_{n+1}$ στον ℓ^2. Η ισοδυναμία ορίζεται από τον unitary $\mathcal{F} : H^2 \to \ell^2 : \zeta_n \to e_n$, όπου $\zeta_n(e^{it}) = e^{int}$ (ο $\mathcal{F}$ είναι βέβαια ο περιορισμός στον H^2 του μετασχηματισμού Fourier $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$). Το διάνυσμα ζ είναι *περιπλανώμενο διάνυσμα* για τον T, δηλ. η οικογένεια $\{T^n\zeta : n \in \mathbb{Z}_+\}$ είναι ορθοκανονική.

ωολδ **Θεώρημα 2.6 (Διάσπαση Wold)** *Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ ισομετρία. Υπάρχει μοναδική διάσπαση $H = H_s \oplus H_u$ του H σε A-ανάγοντες υποχώρους ώστε ο περιορισμός A_s του A στον H_s να είναι shift (αν δεν μηδενίζεται) και ο περιορισμός A_u του A στον H_u να είναι unitary (αν δεν μηδενίζεται).*

Επίσης

$$H_s = \bigoplus_{n\geq 0} A^n(L) = \{x \in H : A^{*n}x \to 0\} \qquad \textit{και} \qquad H_u = \bigcap_{n\geq 0} A^n(H)\,.$$

Απόδειξη. (α) Έστω $L = \ker(A^*)$. Έχουμε ήδη παρατηρήσει ότι ο L είναι A-περιπλανώμενος. Θέτουμε

$$H_s = M_+(L) = \bigoplus_{n\geq 0} A^n(L).$$

Είναι φανερό ότι ο H_s είναι A-αναλλοίωτος, και ότι ο A περιορισμένος στον H_s είναι shift.

(β) Θα δείξουμε ότι

$$H_s = \{x \in H : A^{*n}x \to 0\}. \tag{**}$$

Ένα διάνυσμα x ανήκει στον H_s αν και μόνον αν

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} P(A^n(L))x$$

όπου $P(A^n(L))$ η προβολή στον $A^n(L)$. Η προβολή αυτή ισούται με $A^nP(L)A^{*n}$ από την Παρατήρηση 2.5, όπου $P(L)$ είναι η προβολή στον $L = \ker(A^*)$. Όμως $P(L) = I - AA^*$ (γιατί $\ker(A^*) = \ker(AA^*)$) άρα $P(A^n(L)) = A^n(I - AA^*)A^{*n}$.

Επομένως το x ανήκει στον H_s αν και μόνον αν

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} P(A^n(L))x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} A^n(I - AA^*)A^{*n}x = x - \lim_{N\to\infty} A^N A^{*N}x \tag{*}$$

δηλ. αν και μόνον αν $\lim_{N\to\infty} A^N A^{*N}x = 0$, ισοδύναμα αν και μόνον αν $\lim_N \|A^{*N}x\| = 0$ (ο A^N είναι ισομετρία).

Η σχέση (∗∗) αποδείχθηκε.

(γ) Θα δείξουμε ότι

$$H_s^{\perp} = \bigcap_{n\geq 0} A^n(H).$$

Ένα διάνυσμα y είναι κάθετο στον H_s αν και μόνον αν $y \perp A^n(L)$ για κάθε $n \geq 0$, ισοδύναμα αν

$$0 = P(A^n(L))y = A^n(I - AA^*)A^{*n}y \iff A^nA^{*n}y = A^{n+1}A^{*n+1}y$$

για κάθε n, και άρα $y = A^nA^{*n}y$ για κάθε n. Αλλά ο A^nA^{*n} είναι η προβολή στον $A^n(H)$. Επομένως $y \perp H_s$ αν και μόνον αν $y \in A^n(H)$ για κάθε $n \geq 0$. Με άλλα λόγια, $y \perp H_s$ αν και μόνον αν $y \in \bigcap_{n\geq 0} A^n(H)$. Δείξαμε ότι

$$(H_s)^{\perp} = \bigcap_{n\geq 0} A^n(H) := H_u.$$

(δ) Δείχνουμε ότι ο $A|_{H_u}$ είναι unitary.

Αν $P = P(H_u)$ τότε, για κάθε $x \in H$, $\quad Px \in \bigcap_{n\geq 0} A^n(H)$ οπότε $Px = \lim_n A^n A^{*n} x$. Έχουμε

$$P(AH_u)x = APA^*x = A \lim_n A^n A^{*n} A^* x = \lim_n A^{n+1} A^{*(n+1)} x = Px$$

$$\text{και άρα} \quad P(AH_u) = APA^* = P \quad \text{επομένως} \quad PA = APA^*A = AP.$$

Η δεύτερη σχέση δείχνει ότι ο H_u ανάγει (reduces) τον A και η πρώτη σχέση δείχνει ότι ο A στέλνει τον H_u επί του H_u. Συνεπώς ο $A|_{H_u}$ είναι unitary τελεστής στον H_u.

Επομένως και ο $H_s = H_u^{\perp}$ ανάγει τον A.

Μοναδικότητα Μένει να δειχθεί ότι αν $H = K_s \oplus K_u$ είναι μια διάσπαση ώστε ο $A|_{K_s}$ να είναι shift και ο $A|_{K_u}$ unitary, τότε $K_u = H_u$ και $K_s = H_s$. Όμως, αν ο $A|_{K_s}$ είναι shift τότε ο $L' := K_s \ominus A(K_s)$ είναι A-περιπλανώμενος. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $L = L'$, γιατί τότε θα έχουμε $K_s = M_+(L') = M_+(L) = H_s$, οπότε και τα ορθογώνια συμπληρώματά τους θα είναι ίσα. Έχουμε [5]

$$L = H \ominus AH = (K_u \oplus K_s) \ominus (AK_u \oplus AK_s) = (K_u \oplus K_s) \ominus (K_u \oplus AK_s) = K_s \ominus AK_s = L'.$$

σηιφτ **Πόρισμα 2.7** *Έπεται ότι μια ισομετρία $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι shift αν και μόνον αν ικανοποιεί $\|A^{*n}x\| \to 0$ για κάθε $x \in H$. Ισοδύναμα αν και μόνον αν $\bigcap_{n\geq 0} A^n(H) = 0$.*

3 Αμφίπλευρα (Bilateral) Shifts

Ορισμός 4 *Αμφίπλευρο shift είναι ένας unitary τελεστής $U \in \mathcal{B}(H)$ που έχει έναν περιπλανώμενο υπόχωρο L τέτοιο ώστε $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} U^n(L) = H$.*

Παράδειγμα Ο $U \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}))$ όπου $Ue_n = e_{n+1}$ $(n \in \mathbb{Z})$. Ένας περιπλανώμενος υπόχωρος είναι ο $L = [e_{-122}]$, για παράδειγμα.

Αν $U \in \mathcal{B}(H)$ είναι αμφίπλευρο shift με έναν περιπλανώμενο υπόχωρο L, θέτουμε $H_+ \equiv \bigoplus_{n\geq 0} U^n(L)$ και ονομάζουμε $S \in \mathcal{B}(H_+)$ τον περιορισμό του U στον H_+: είναι unilateral shift. Αντίστροφα,

Πρόταση 3.1 *Κάθε unilateral shift $S \in \mathcal{B}(H)$ επεκτείνεται σε bilateral shift $U \in \mathcal{B}(K)$ (όπου $K \supseteq H$).*
Ακριβέστερα: *Υπάρχει χώρος Hilbert K, ισομετρική εμφύτευση $W : H \to K$ και αμφίπλευρο shift $U \in \mathcal{B}(K)$ που αφήνει τον $W(H)$ αναλλοίωτο ώστε $S = W^*UW$.*

Απόδειξη. Προσεχώς!

Πρόταση 3.2 *Κάθε ισομετρία $T \in \mathcal{B}(H)$ επεκτείνεται σε unitary $V \in \mathcal{B}(K)$ (όπου $K \supseteq H$).*

[5] Πιό αναλυτικά: Αν $x \in L$ γράφουμε $x = x_s + x_u$ όπου $x_s \in K_s$ και $x_u \in K_u$. Όμως $x \perp A(K_u \oplus K_s)$ και $A(K_u \oplus K_s) = AK_u \oplus AK_s = K_u \oplus AK_s$ (παρατήρησε ότι $A(K_u) = K_u$ εφόσον ο $A|_{K_u}$ είναι unitary). Επομένως $x \perp K_u$, άρα $x = x_s \in K_s$. Αλλά επίσης $x \perp A(K_s)$, οπότε $x \in K_s \ominus A(K_s) \subseteq L'$. Αυτό δείχνει ότι $L \subseteq L'$. Το ίδιο επιχείρημα, χρησιμοποιώντας τη διάσπαση $H = H_s \oplus H_u$, δείχνει ότι $L' \subseteq L$.

Απόδειξη. (Σύντομη) Πρώτα από Wold έχω $T = T_s \oplus T_u$ στον $H = H_s \oplus H_u$ όπου T_u unitary και T_s shift. Επεκτείνω τον T_s σε bilateral shift U_s στον $K_s \supset H_s$. Ορίζω

$$K = K_s \oplus H_u \quad \text{και} \quad V = U_s \oplus T_u.$$

Δηλαδή, ως προς την διάσπαση $K = (K_s \ominus H_s) \oplus H_s \oplus H_u$ έχουμε

$$V = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ * & T_s & 0 \\ 0 & 0 & T_u \end{bmatrix}$$

4 Διαστολή μιας συστολής

Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι μια μη ισομετρική συστολή, δεν αναμένουμε να υπάρχει *επέκταση* σε unitary τελεστή $V \in \mathcal{B}(K)$ ώστε ο H να είναι V-αναλλοίωτος υπόχωρος του K. Αυτό που μπορούμε όμως να πετύχουμε είναι να βρούμε *unitary διαστολή (dilation)* $V \in \mathcal{B}(K)$ του A (δες τον Ορισμό 1).

Κατασκευή [Schäeffer] Εφόσον ο A είναι συστολή, οπότε $A^*A \leq I$, ο τελεστής $I - A^*A$ είναι θετικός, συνεπώς έχει τετραγωνική ρίζα

$$D_A = (I - A^*A)^{1/2}.$$

(Παρατηρούμε ότι ο A είναι ισομετρία αν και μόνον αν $D_A = 0$.)

Θέτουμε

$$\tilde{H} = \bigoplus_{n\geq 0} H_n \qquad \text{όπου } H_n = H \text{ για κάθε } n$$

και ορίζουμε

$$V : \tilde{H} \to \tilde{H} : \ (x_0, x_1, x_2, \dots) \to (Ax_0, D_A x_0, x_1, x_2, \dots)$$

$$\text{δηλ.} \quad V = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & \dots \\ D_A & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & I & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Ο V είναι ισομετρία. Αυτό έπεται από την ισότητα
$\|Ax_0\|^2 + \|D_A x_0\|^2 = \langle A^*Ax_0, x_0\rangle + \langle D_A^2 x_0, x_0\rangle = \langle x_0, x_0\rangle$ οπότε

$$\begin{aligned} \|Vx\|^2 &= \|Ax_0\|^2 + \|D_A x_0\|^2 + \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots \\ &= \|x_0\|^2 + \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots = \|x\|^2 \end{aligned}$$

(Ας παρατηρήσουμε ότι ο υπόχωρος H_0 δεν είναι V-αναλλοίωτος, εκτός αν $D_A = 0$, δηλ. εκτός αν ο A είναι ισομετρία).
Έχουμε $V(H_0) \subseteq H_0 \oplus H_1$ και $P_{H_0}V|_{H_0} = A$. Επειδή όμως ο πίνακας του V στη διάσπαση $H = \bigoplus_{n\geq 0} H_n$ είναι *(κάτω) τριγωνικός*, [6] η θέση $(0,0)$ του V^m είναι A^m, άρα $P_{H_0}V^m|_{H_0} = A^m$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

[6] Ο υπόχωρος H_0 είναι *V-ημι-αναλλοίωτος*, δηλ. είναι η διαφορά δύο V-αναλλοίωτων υποχώρων (στην περίπτωσή μας, $H_0 = (\bigoplus_{n\geq 0} H^n) \ominus (\bigoplus_{n\geq 1} H^n)$). Το ίδιο θα ίσχυε και αν ο πίνακας του V ήταν άνω τριγωνικός.
Άσκηση [Sarason] Αν $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ είναι άλγεβρα τελεστών (ή απλώς ημιομάδα) και $P \in \mathcal{B}(H)$ προβολή, η απεικόνιση $A \to PA|_{P(H)}$ είναι πολλαπλασιαστική στην $\mathcal{A}$ αν και μονον αν η P είναι $\mathcal{A}$-ημι-αναλλοίωτη, δηλ. είναι η προβολή σε έναν υπόχωρο της μορφής $M \ominus N$, όπου οι M, N είναι $\mathcal{A}$-αναλλοίωτοι κλειστοί υπόχωροι και $N \subseteq M \subseteq H$.

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που ο A είναι ήδη ισομετρία, η κατασκευή αυτή δίνει

$$V = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & I & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}$$

Μια τέτοια διαστολή δεν είναι καθόλου «οικονομική».

Θα δείξουμε ότι για κάθε ισομετρική διαστολή $V \in \mathcal{B}(K)$ μιας συστολής $A \in \mathcal{B}(H)$ μπορούμε να βρούμε μια ισομετρική διαστολή $V_m \in \mathcal{B}(H_m)$ του A σε έναν υπόχωρο $H_m \subseteq K$ που είναι *minimal* με την έννοια ότι ο H_m είναι ο μικρότερος V-*αναλλοίωτος* υπόχωρος του K που περιέχει τον H.

Ορισμός 5 *Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$, $\|A\| \le 1$. Μια διαστολή $V \in \mathcal{B}(K)$ του A είναι* minimal *όταν ο μικρότερος V-*αναλλοίωτος *υπόχωρος του K που περιέχει τον H είναι ο ίδιος ο K.*

Θεώρημα 4.1 *Κάθε συστολή $A \in \mathcal{B}(H)$ έχει μια minimal ισομετρική διαστολή $V \in \mathcal{B}(K)$.*
Η διαστολή αυτή είναι ουσιαστικά μοναδική: αν $V' \in \mathcal{B}(K')$ είναι minimal *ισομετρική διαστολή του A, υπάρχει unitary $W : K \to K'$ τέτοιος ώστε $WV = V'W$ και $Wx = x$ για κάθε $x \in H$.*

Απόδειξη. Ύπαρξη: Αν $V_0 \in \mathcal{B}(K_0)$ είναι μια διαστολή του A, ονομάζουμε K την κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης των $V_0^m(H)$ (γράφουμε $K = \bigvee_{n\ge 0} V_0^n(H)$) και θέτουμε $V = V_0|_K$. Είναι προφανές ότι η V είναι minimal ισομετρική διαστολή του A.

Μοναδικότητα: Παρατηρούμε ότι όταν $x, y \in H$, τα εσωτερικά γινόμενα $\langle V^m x, V^n y\rangle$ εξαρτώνται μόνον από τον A κι όχι από τον V, αφού $V^m|_H = A^m$. Έτσι, η απεικόνιση

$$W : \sum_{k=0}^{N} V^k x_k \to \sum_{k=0}^{N} (V')^k x_k \quad (x_k \in H, N \in \mathbb{Z}_+)$$

είναι ισομετρική και συνεπώς καλά ορισμένη. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^{N} (V')^k x_k \right\|^2 &= \sum_{k,n=0}^{N} \left\langle (V')^k x_k, (V')^n x_n \right\rangle = \sum_{k,n=0}^{N} \left\langle A^k x_k, A^n x_n \right\rangle \\ &= \sum_{k,n=0}^{N} \left\langle V^k x_k, V^n x_n \right\rangle = \left\| \sum_{k=0}^{N} V^k x_k \right\|^2 . \end{aligned}$$

Επομένως ο W επεκτείνεται σε ισομετρία από τον $K = \bigvee_k V^k(H)$ επί του $K' = \bigvee_k (V')^k(H)$.

Από τον ορισμό του W έχουμε $Wx = x$ και $WV^k x = (V')^k x$ όταν $x \in H$ άρα $WV^k x = (V')^k Wx$, επομένως $WV = V'W$. □

Θεώρημα 4.2 *Κάθε συστολή $A \in \mathcal{B}(H)$ δέχεται διαστολή σε unitary $B \in \mathcal{B}(K)$ που είναι minimal, δηλ. ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του K που περιέχει τον H και ανάγει (reduces) τον B είναι ο ίδιος ο K.*

Μια minimal διαστολή είναι μοναδική ως προς unitary ισοδυναμία.

Απόδειξη. *Ύπαρξη:* Αν $B_0 \in \mathcal{B}(K_0)$ είναι μια unitary διαστολή του A, θέτουμε $K = \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} B_0^n(H)$ (= κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης) και $B = B_0|_K$.

Μοναδικότητα: Προσεχώς! Το κρίσιμο βήμα είναι να δείξουμε ότι η απεικόνιση

$$U : \sum_{k=-N}^{N} B^k x_k \to \sum_{k=-N}^{N} (B')^k x_k \quad (x_k \in H, N \in \mathbb{Z}_+)$$

είναι ισομετρική και συνεπώς καλά ορισμένη. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=-N}^{N} (B')^k x_k \right\|^2 &= \sum_{k,n=-N}^{N} \left\langle (B')^k x_k, (B')^n x_n \right\rangle \\
&= \sum_{k\leq n} \left\langle (B')^k x_k, (B')^n x_n \right\rangle + \sum_{k>n} \left\langle (B')^k x_k, (B')^n x_n \right\rangle \\
((B')^m \text{ unitary}) \qquad &= \sum_{k\leq n} \left\langle x_k, (B')^{n-k} x_n \right\rangle + \sum_{k>n} \left\langle (B')^{k-n} x_k, x_n \right\rangle \\
&= \sum_{k\leq n} \left\langle x_k, A^{n-k} x_n \right\rangle + \sum_{k>n} \left\langle A^{k-n} x_k, x_n \right\rangle \\
&= \sum_{k\leq n} \left\langle x_k, B^{n-k} x_n \right\rangle + \sum_{k>n} \left\langle B^{k-n} x_k, x_n \right\rangle \\
(B^m \text{ unitary}) \qquad &= \sum_{k,n=0}^{N} \left\langle B^k x_k, B^n x_n \right\rangle = \left\| \sum_{k=0}^{N} B^k x_k \right\|^2 .
\end{aligned}$$

Τα υπόλοιπα προχωρούν όπως στην προηγούμενη απόδειξη. □

5 Ανισότητα von Neumann

51 **Θεώρημα 5.1 (Ανισότητα von Neumann)** *Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ είναι συστολή και p πολυώνυμο, τότε*

$$\|p(T)\|_{\mathcal{B}(H)} \leq \sup\{|p(z)| : z \in \mathbb{T}\}.$$

Απόδειξη. Χρειάζονται δύο Λήμματα (δες την παράγραφο 5.1 για τις αποδείξεις):

εν **Λήμμα 5.2** *Αν X αντιστρέψιμος τότε $\sigma(X^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(X)\}$.*

δυο **Λήμμα 5.3** *Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ normal τότε $\|A\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$.*

Έστω τώρα $T \in \mathcal{B}(H)$ συστολή και $U \in \mathcal{B}(K)$ μια unitary διαστολή της, όπου $K \supseteq H$. Τότε για κάθε πολυώνυμο $p(z) = \sum_{k=1}^{N} c_k z^k$, από τη σχέση $T^k = P_H U^k|_H$ έχουμε

$$p(T) = P_H p(U)|_H \qquad \text{άρα} \qquad \|p(T)\| \leq \|p(U)\|.$$

Όμως ο τελεστής $p(U)$ είναι φυσιολογικός, άρα από το Λήμμα 5.3

$$\|p(U)\| = \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(p(U))\}.$$

Τώρα από το Λήμμα φασματικής απεικόνισης για πολυώνυμα (ας θυμηθούμε ότι η απόδειξή του ήταν καθαρά αλγεβρική) έχουμε

$$\sigma(p(U)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(U)\}.$$

Ισχυρίζομαι όμως ότι $\sigma(U) \subseteq \mathbb{T}$. Πράγματι, επειδή ο U είναι unitary έχουμε $\|U\| \leq 1$ και $\|U^{-1}\| = \|U^*\| \leq 1$. Έστω $\lambda \in \sigma(U)$. Τότε η σχέση $\|U\| \leq 1$ δίνει $|\lambda| \leq 1$ και, επειδή $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(U^{-1})$ (Λήμμα 5.5) η σχέση $\|U^{-1}\| \leq 1$ δίνει $|\frac{1}{\lambda}| \leq 1$. Συνεπώς $|\lambda| = 1$. Άρα $\sigma(U) \subseteq \mathbb{T}$ και τελικά έχουμε

$$\begin{aligned}\|p(T)\| \leq \|p(U)\| &= \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(p(U))\} = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(U)\} \\ &\leq \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \mathbb{T}\}. \qquad \square\end{aligned}$$

Πόρισμα 5.4 (Αρχή μεγίστου) *Αν p πολυώνυμο, για κάθε $w \in \mathbb{C}$ με $|w| \leq 1$,*

$$|p(w)| \leq \sup\{|p(z)| : |z| = 1\}.$$

Απόδειξη. Έστω $w \in \mathbb{C}, |w| \leq 1$. Θεωρώ τον τελεστή $T_w : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : x \to wx$. Είναι συστολή: $\|T_w\| = |w| \leq 1$, άρα από το θεώρημα 5.1 έχουμε $\|p(T_w)\| \leq \sup\{|p(z)| : z \in \mathbb{T}\}$. Όμως $p(T_w)x = p(w)x$ για κάθε x, οπότε $\|p(T_w)\| = |p(w)|$. □

5.1 Αποδείξεις των Λημμάτων

πφς
εν

Λήμμα 5.5 *Αν X αντιστρέψιμος τότε $\sigma(X^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(X)\}$.*

Απόδειξη. Το επιχείρημα είναι καθαρά αλγεβρικό: Έστω $\mu \in \sigma(X^{-1})$, να δείξω ότι $\mu \neq 0$ και $\frac{1}{\mu} \in \sigma(X)$. Ασφαλώς $\mu \neq 0$, γιατί $0 \notin \sigma(X^{-1})$. Αν $\lambda := \frac{1}{\mu} \notin \sigma(X)$, τότε υπάρχει ο $W := (\lambda I - X)^{-1}$. Έχουμε

$$(X^{-1} - \lambda^{-1})(\lambda X W) = (\lambda X^{-1} - I)XW = (\lambda I - X)W = I$$

και ομοίως $(\lambda W X)(X^{-1} - \lambda^{-1}) = I$ οπότε $\mu = \lambda^{-1} \notin \sigma(X^{-1})$, αντίθετα με την υπόθεση.

Έδειξα λοιπόν ότι $\mu \in \sigma(X^{-1}) \Rightarrow \frac{1}{\mu} \in \sigma(X)$, και η αντίστροφη συνεπαγωγή έπεται λόγω συμμετρίας. □

Η απόδειξη του Λήμματος 5.3 στηρίζεται στο εξής κλασικό

Θεώρημα 5.6 (τύπος Gelfand - Beurling) *Αν $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα Banach με μονάδα και $A \in \mathcal{A}$,*

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \lim_n \|A^n\|^{1/n}.$$

Ειδικότερα, η ακολουθία $(\|A^n\|^{1/n})_n$ συγκλίνει.

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\rho(A) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Ξέρουμε ήδη ότι $\rho(A) \leq \|A\|$. Επίσης για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αν $\lambda \in \sigma(A)$ τότε $\lambda^n \in \sigma(A^n)$ [7]

[7] διότι $\lambda^n I - A^n = (\lambda I - A)X$ για κάποιο $X \in \mathcal{A}$, άρα το $\lambda^n I - A^n$ δεν μπορεί να έχει αντίστροφο

και συνεπώς
$$|\lambda^n| \leq \|A^n\| \quad \text{άρα} \quad |\lambda| \leq \|A^n\|^{1/n}.$$
Επομένως
$$|\lambda| \leq \inf \|A^n\|^{1/n} \leq \liminf \|A^n\|^{1/n}$$
για κάθε $\lambda \in \sigma(A)$, άρα
$$\rho(A) \leq \liminf \|A^n\|^{1/n}.$$
Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι
$$\limsup \|A^n\|^{1/n} \leq \rho(A).$$
Ξέρουμε ότι αν $\lambda \notin \sigma(A)$ η συνάρτηση
$$\lambda \to R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$$
ορίζεται και είναι ολόμορφη. Άρα είναι ολόμορφη στο $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \rho(A)\}$. Επίσης, αν $|\lambda| > \|A\|$ οπότε $\left\|\frac{A}{\lambda}\right\| < 1$ τότε
$$R_\lambda = \lambda^{-1}\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = \lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^n, \tag{*}$$
ειδικότερα $\lim_{|\lambda|\to\infty} \|R_\lambda\| = 0$.

Έστω $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ γραμμική και φραγμένη. Θέτοντας $\mu = \frac{1}{\lambda}$ συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση
$$g_\phi(\mu) = \phi(R_{\mu^{-1}}) = \phi(\mu(I - \mu A)^{-1})$$
ορίζεται και είναι ολόμορφη στο $\{\mu \in \mathbb{C} : 0 < |\mu| < \rho(A)^{-1}\}$ και $\lim_{\mu\to 0} g_\phi(\mu) = 0$, άρα επεκτείνεται σε ολόμορφη στον δίσκο $\Omega := \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| < \rho(A)^{-1}\}$. Άρα η g_ϕ έχει δυναμοσειρά
$$g_\phi(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu^n$$
(έχω $a_0 = 0$ διότι $g_\phi(0) = 0$) που συγκλίνει στον δίσκο αυτόν. Όμως στον (ενδεχομένως) μικρότερο δίσκο $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| < \|A\|^{-1}\}$ έχουμε από την $(*)$
$$g_\phi(\mu) = \phi(\mu(I - \mu A)^{-1}) = \mu\phi\left(\sum_{n=0}^{\infty}(\mu A)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\phi(A^n)\mu^{n+1}.$$
Από τη μοναδικότητα των συντελεστών μιας δυναμοσειράς έπεται ότι οι δύο σειρές συμπίπτουν, δηλαδή η $\sum_{n=0}^{\infty}\phi(A^n)\mu^{n+1}$ συγκλίνει στον δίσκο Ω. Επομένως, αν σταθεροποιήσουμε ένα μ με $|\mu| < \rho(A)^{-1}$, η ακολουθία $(\phi(A^n)\mu^{n+1})_n$ θα είναι φραγμένη, ή ισοδύναμα η ακολουθία $(\phi(A^n)\mu^n)_n$ θα είναι φραγμένη.

Δηλαδή για κάθε $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ γραμμική και φραγμένη, υπάρχει $M_\phi < \infty$ ώστε $|\phi(A^n\mu^n)| \leq M_\phi$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την Αρχή Ομοιομόρφου Φράγματος συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $M < \infty$ ώστε $\|A^n\mu^n\| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλ.
$$\|A^n\| \leq \frac{M}{|\mu^n|} \quad \text{για κάθε} \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Δείξαμε ότι για κάθε $\lambda = \frac{1}{\mu}$ με $|\lambda| > \rho(A)$, υπάρχει $M < \infty$ ώστε

$$\begin{aligned} \|A^n\| &\leq M|\lambda|^n \quad \text{για κάθε } \ n \in \mathbb{N} \\ \text{και άρα} \quad \|A^n\|^{1/n} &\leq M^{1/n}|\lambda| \quad \text{για κάθε } \ n \in \mathbb{N} \\ \text{οπότε} \quad \limsup \|A^n\|^{1/n} &\leq |\lambda| \, . \end{aligned}$$

Αφού η τελευταία ανισότητα ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| > \rho(A)$, θα έχουμε και

$$\limsup \|A^n\|^{1/n} \leq \rho(A)$$

και κατά συνέπεια

$$\limsup \|A^n\|^{1/n} \leq \rho(A) \leq \liminf \|A^n\|^{1/n}$$

άρα ισχύει ισότητα

$$\lim \|A^n\|^{1/n} = \rho(A). \qquad \square$$

Πόρισμα 5.7 *Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ normal τότε $\|T\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$.*

Απόδειξη. Έχουμε $\|T\|^2 = \|T^*T\|$, άρα

$$\|T\|^4 = \|T^*T\|^2 \overset{(c*)}{=} \|(T^*T)^*(T^*T)\| = \|T^*TT^*T\| \overset{(n)}{=} \|T^*T^*TT\| \overset{(c*)}{=} \left\|T^2\right\|^2$$

(χρησιμοποιήσαμε δυο φορές την ιδιότητα $(c*)$ και στο (n) το γεγονός ότι $T^*T = TT^*$). Δηλαδή $\|T\|^2 = \|T^2\|$ και επαγωγικά $\|T\|^{2^n} = \left\|T^{2^n}\right\|$, άρα $\|T\| = \left\|T^{2^n}\right\|^{1/2^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς

$$\|T\| = \lim_n \left\|T^{2^n}\right\|^{1/2^n} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$$

από τον τύπο Gelfand - Beurling. $\square$

6 Συμπληρώματα

Δείξαμε ότι η *ημιομάδα* συστολών $\{A^n : n \geq 0\} \subseteq \mathcal{B}(H)$ δέχεται *ταυτόχρονη διαστολή* $\{U^n : n \geq 0\} \subseteq \mathcal{B}(K)$ σε μια ημιομάδα από unitaries, η οποία βεβαίως περιέχεται στην *ομάδα* $\{U^n : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathcal{B}(K)$.

Το αποτέλεσμα αυτό επεκτείνεται από την ημιομάδα $\mathbb{Z}_+$ στην ημιομάδα $\mathbb{R}_+$:

Θεώρημα 6.1 *Έστω $\{A_s : s \geq 0\} \subseteq \mathcal{B}(H)$ μια* συνεχής μονοπαραμετρική ημιομάδα συστολών, *δηλαδή*

$$A_0 = I, \ \ A_{s+t} = A_s A_t, \ \ \|A_s\| \leq 1 \ \ \textit{και} \ \ \lim_{s \to t} \|A_s x - A_t x\| = 0 \ \forall x \in H.$$

Τότε υπάρχει χώρος Hilbert K που περιέχει τον H και συνεχής μονοπαραμετρική ομάδα από unitaries $\{U_s : s \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{B}(K)$ ώστε

$$A_s = P_H U_s|_H \quad \textit{για κάθε} \ \ s \geq 0.$$

Τι συμβαίνει για γενικότερες μεταθετικές οικογένειες συστολών;

Θεώρημα 6.2 (Ando) *Αν $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(H)$ είναι δύο συστολές* που μετατίθενται ($T_1T_2 = T_2T_1$), *υπάρχει χώρος Hilbert K που περιέχει τον H και unitaries $U_1, U_2 \in \mathcal{B}(K)$ που μετατίθενται, ώστε*

$$T_1^n T_2^m = P_H U_1^n U_2^m|_H \quad \text{για κάθε } \ n, m \geq 0.$$

Πόρισμα 6.3 (Ανισότητα von Neumann) *Αν $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(H)$ είναι δύο συστολές* που μετατίθενται *και p ένα πολυώνυμο δύο μεταβλητών, τότε*

$$\|p(T_1, T_2)\|_{\mathcal{B}(H)} \leq \sup\{|p(z_1, z_2)| : |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1\}.$$

Το θεώρημα του Ando δεν επεκτείνεται εν γένει για τρεις ή περισσότερες συστολές που μετατίθενται. Αν υπήρχε μια τέτοια επέκταση, θα ίσχυε και μια ανισότητα von Neumann:

$$\|p(T_1, \ldots, T_m)\|_{\mathcal{B}(H)} \leq \sup\{|p(z_1, \ldots, z_m)| : |z_i| \leq 1\}$$

για κάθε m-άδα συστολών $T_1, \ldots, T_m \in \mathcal{B}(H)$ που μετατίθενται και κάθε πολυώνυμο m μεταβλητών p. Όμως υπάρχει το ακόλουθο

Παράδειγμα 6.4 (Kaijser-Βαρόπουλος) *Υπάρχουν τρείς συστολές $T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^5)$ που μετατίθενται και ένα πολυώνυμο p τριών μεταβλητών ώστε*

$$\|p(T_1, T_2, T_3)\| > \sup\{|p(z_1, z_2, z_3)| : |z_i| \leq 1\}.$$

Ανοικτό πρόβλημα παραμένει αν ισχύει μια ανισότητα τύπου von Neumann, αλλά με μια σταθερά $K_m > 1$:

Πρόβλημα 6.5 *Υπάρχει σταθερά $K_m \in (1, \infty)$ ώστε για κάθε m-άδα συστολών $T_1, \ldots, T_m \in \mathcal{B}(H)$ που μετατίθενται και για κάθε πολυώνυμο m μεταβλητών p να ισχύει*

$$\|p(T_1, \ldots, T_m)\|_{\mathcal{B}(H)} \leq K_m \sup\{|p(z_1, \ldots, z_m)| : |z_i| \leq 1\}\,?$$

Είναι γνωστό ότι δεν μπορεί να υπάρχει τέτοια σταθερά μικρότερη από $\frac{\sqrt{m}}{11}$.

Διαστολές γενικότερων σχέσεων

Πρόταση 6.6 *Αν $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(H)$ είναι δύο συστολές* που ικανοποιούν τη σχέση

$$T_1 T_2 = \lambda T_2 T_1$$

όπου $\lambda \in \mathbb{T}$, τότε υπάρχουν unitary διαστολές $U_1, U_2 \in \mathcal{B}(K)$ όπου $K \supseteq H$ ώστε

$$U_1 U_2 = \lambda U_2 U_1.$$

Γενικότερα

Πρόταση 6.7 (Davidson, Κατσούλης) *Αν $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(H)$ είναι δύο συστολές* που ικανοποιούν τη σχέση

$$T_1 T_2 = \phi(T_2) T_1$$

όπου ϕ μη σταθερό πεπερασμένο γινόμενο Blaschke, τότε υπάρχουν unitary διαστολές $U_1, U_2 \in \mathcal{B}(K)$ όπου $K \supseteq H$ ώστε

$$U_1 U_2 = \phi(U_2) U_1.$$

Πεπερασμένο γινόμενο Blaschke είναι μια συνάρτηση $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ που είναι πεπερασμένο γινόμενο όρων της μορφής $\phi(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ όπου $|a| < 1$ και $\theta \in \mathbb{R}$.

7 Η άλγεβρα του δίσκου: αναπαραστάσεις και διαστολές

Η άλγεβρα του δίσκου αποτελείται από όλες τις μιγαδικές συναρτήσεις που είναι ορισμένες και συνεχείς στον κλειστό δίσκο και είναι ολόμορφες στο εσωτερικό:

$$A(\mathbb{D}) = \{f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C} \text{ συνεχής } : f|_{\mathbb{D}} \text{ ολόμορφη}\}$$

Από την αρχή του μεγίστου, η $A(\mathbb{D})$ μπορεί να θεωρηθεί υπάλγεβρα της C*-άλγεβρας $C(\mathbb{T})$ των συνεχών συναρτήσεων στον κύκλο. Πράγματι, η απεικόνιση $f \to f|_{\mathbb{T}}$ είναι μορφισμός αλγεβρών από την $A(\mathbb{D})$ στην $C(\mathbb{T})$, και είναι ισομετρία διότι η σχέση

$$\sup\{|f(w)| : w \in \overline{\mathbb{D}}\} = \sup\{|f(z)| : z \in \mathbb{T}\}$$

την οποία αποδείξαμε όταν η f είναι πολυώνυμο, επεκτείνεται και όταν η f είναι συνεχής στον $\overline{\mathbb{D}}$ και ολόμορφη στον $\mathbb{D}$, διότι κάθε τέτοια συνάρτηση είναι ομοιόμορφο όριο πολυωνύμων:

παρατ **Παρατήρηση 7.1** *Αν η f είναι συνεχής στον $\overline{\mathbb{D}}$ και ολόμορφη στον $\mathbb{D}$, τότε προσεγγίζεται από ακολουθία πολυωνύμων, ομοιόμορφα στον $\overline{\mathbb{D}}$.*

Απόδειξη. Για κάθε $r \in (0,1)$, η συνάρτηση $f_r(z) := f(rz)$ είναι ολόμορφη στον μεγαλύτερο δίσκο $\mathbb{D}_r := \{z \in \mathbb{C} : |rz| < 1\}$, επομένως έχει δυναμοσειρά που συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή του $\mathbb{D}_r$, άρα και στον $\overline{\mathbb{D}}$. Επομένως η f_r προσεγγίζεται από πολυώνυμα, ομοιόμορφα στον $\overline{\mathbb{D}}$. Όμως $f_r(z) \to f(z)$ καθώς $r \nearrow 1$, ομοιόμορφα στον $\overline{\mathbb{D}}$. Πράγματι, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στον $\overline{\mathbb{D}}$ και συνεπώς για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $z, w \in \overline{\mathbb{D}}$ και $|z - w| < \delta$ να έχουμε $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ και συνεπώς αν $|1-r| < \delta$ έχουμε $|1-r| < \delta$ για κάθε $z \in \overline{\mathbb{D}}$ και άρα $|f_r(z) - f(z)| = |f(rz) - f(z)| < \varepsilon$. Συνεπώς και η f προσεγγίζεται από ακολουθία πολυωνύμων ομοιόμορφα στον $\overline{\mathbb{D}}$. [8] □

Πρόταση 7.2 *Η απεικόνιση $f \to f|_{\mathbb{T}}$ είναι ισομετρία και μορφισμός αλγεβρών από την $A(\mathbb{D})$ με σύνολο τιμών*

$$\{g \in C(\mathbb{T}) : \hat{g}(k) = 0 \text{ για κάθε } k < 0\}.$$

Απόδειξη. Δείξαμε ήδη ότι η απεικόνιση αυτή είναι ισομετρία, και είναι προφανές ότι διατηρεί το άθροισμα και το γινόμενο συναρτήσεων. Έπεται ότι η εικόνα της είναι κλειστή υπάλγεβρα της $C(\mathbb{T})$.

Δείχνουμε ότι η εικόνα αυτής της απεικόνισης περιέχεται στον υπόχωρο

$$A := \{g \in C(\mathbb{T}) : \hat{g}(k) = 0 \text{ για κάθε } k < 0\}.$$

Πρέπει να δείξουμε ότι αν $f \in A(\mathbb{D})$ και $g = f|_{\mathbb{T}}$, τότε $\hat{g}(k) = 0$ για κάθε $k < 0$.

[8] Μάλιστα, αν $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ είναι η δυναμοσειρά της f στον $\mathbb{D}$, τότε η δυναμοσειρά της f_r είναι $f_r(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k r^k) z^k$, άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $r < 1$ ώστε $\|f - p_{n,r}\|_{\overline{\mathbb{D}}} < \varepsilon$ όπου $p_{n,r}$ είναι το πολυώνυμο $p_{n,r}(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k r^k z^k$.

Όπως στην απόδειξη της Παρατήρησης 7.1, αν $r \in (0,1)$ η $f_r(z) := f(rz)$ είναι ολόμορφη στον δίσκο $\mathbb{D}_r$. Συνεπώς το ίδιο ισχύει για την $f_r(z)z^{-(k+1)}$ (εφόσον $-(k+1) \geq 0$), άρα από το Θεώρημα του Cauchy έχουμε, ολοκληρώνοντας πάνω στην κλειστή καμπύλη $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$,

$$0 = \int_\gamma f_r(z)z^{-(k+1)}dz = \int_0^{2\pi} f_r(e^{it})e^{-i(k+1)t}ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi} f_r(e^{it})e^{-ikt}dt\,.$$

Όμως $f_r(z) \to f(z)$ καθώς $r \nearrow 1$, ομοιόμορφα στον $\overline{\mathbb{D}}$ άρα

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-ikt}dt = \lim_{r\nearrow 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_r(e^{it})e^{-ikt}dt = 0\,.$$

Αλλά

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{it})e^{-ikt}dt = \hat{g}(k)$$

(αφού $g = f|_{\mathbb{T}}$) και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Δείξαμε ότι η εικόνα της απεικόνισης $f \to f|_{\mathbb{T}}$ περιέχεται στον υπόχωρο A.

Μένει να δειχθεί ότι ισχύει ισότητα. Ισοδύναμα (Θεώρημα Hahn - Banach), πρέπει να δειχθεί ότι κάθε $\|\cdot\|_{\mathbb{T}}$ συνεχής γραμμική μορφή $\phi : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ που μηδενίζει την εικόνα της $A(\mathbb{D})$, μηδενίζει και τον A.

Έστω λοιπόν $g \in A$. Για κάθε $n \geq 0$, η ϕ μηδενίζει τον περιορισμό στον $\mathbb{T}$ της συνάρτησης $z \to z^n$, δηλαδή την $e_n(e^{it}) := e^{int}$.

Όμως, όπως είναι γνωστό (Θεώρημα Féjer ή Θεώρημα Stone - Weierstrass), επειδή η g είναι συνεχής, προσεγγίζεται ομοιόμορφα στην $\mathbb{T}$ από τους μέσους όρους $\sigma_n(g)$ της σειράς Fourier $\sum \hat{g}(k)e_k$. Εφόσον όμως $\hat{g}(k) = 0$ για κάθε $k < 0$ και $\phi(e_n) = 0$ για $n \geq 0$, η ϕ μηδενίζει αυτούς τους μέσους όρους, συνεπώς λόγω συνέχειας μηδενίζει και το όριό τους, την g. $\square$

Στο εξής λοιπόν θα γράφουμε

$$A(\mathbb{D}) = \{g \in C(\mathbb{T}) : \hat{g}(k) = 0 \text{ για κάθε } k < 0\}$$

έχοντας υπόψη ότι κάθε τέτοια συνάρτηση δέχεται μοναδική επέκταση σε συνάρτηση συνεχή στον $\overline{\mathbb{D}}$ και ολόμορφη στον $\mathbb{D}$.

Η $A(\mathbb{D})$ είναι λοιπόν άλγεβρα Banach, αλλά δεν είναι C^*-υπάλγεβρα της $C(\mathbb{T})$: Αν $f \in A(\mathbb{D})$ και $f^* := \overline{f}$, η f^* δεν ανήκει ποτέ στην $A(\mathbb{D})$, εκτός αν είναι σταθερή. Πράγματι, η f ανήκει στην κλειστή γραμμική θήκη των $\{e_n : n \geq 0\}$, άρα η $h = f^*$ ανήκει στην κλειστή γραμμική θήκη των $\{e_m : m \leq 0\}$. Αυτό σημαίνει ότι $\hat{h}(n) = 0$ όταν $n > 0$. Αν λοιπόν η $h = f^*$ ανήκει στην $A(\mathbb{D})$, τότε θα έχουμε επίσης $\hat{h}(n) = 0$ όταν $n < 0$, άρα $h = \hat{h}(0)e_0$, σταθερή. [9]

Συμπέρασμα: Η $A(\mathbb{D})$ είναι «αντισυμμετρική» άλγεβρα:

$$A(\mathbb{D}) \cap A(\mathbb{D})^* = \mathbb{C}\mathbf{1}.$$

Επίσης, η $A(\mathbb{D})$ έχει την αξιοσημείωτη ιδιότητα

$$\overline{A(\mathbb{D}) + A(\mathbb{D})^*} = C(\mathbb{T})$$

γιατί στο $A(\mathbb{D}) + A(\mathbb{D})^*$ περιέχονται όλα τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα.

[9] Άλλη απόδειξη: αν u είναι η ολόμορφη επέκταση της f στον $\mathbb{D}$, τότε η u και η $\bar{u}$ είναι ολόμορφες στον $\mathbb{D}$, άρα η u είναι σταθερή (πχ. από τις ισότητες Cauchy - Riemann).

Επέκταση contractive απεικόνισης

Ορισμός 6 *Αν K είναι συμπαγής χώρος, μια γραμμική απεικόνιση $\rho : C(K) \to \mathcal{B}(H)$ λέγεται* **θετική** *αν έχει την ιδιότητα: $f \geq 0 \Rightarrow \rho(f) \geq 0$.*

Παρατήρηση 7.3 *Μια θετική απεικόνιση $\rho : C(K) \to \mathcal{B}(H)$ είναι*
(α) αυτοσυζυγής, *δηλ. $\rho(h^*) = \rho(h)^*$ για κάθε $h \in C(K)$ και*
(β) αυτομάτως συνεχής.

Απόδειξη. (α) Κατ' αρχήν, αν μια $h \in C(K)$ παίρνει πραγματικές τιμές, οπότε γράφεται $h = h_+ - h_-$ όπου $h_\pm \geq 0$, τότε ο τελεστής $\rho(h) = \rho(h_+) - \rho(h_-)$ είναι αυτοσυζυγής αφού οι $\rho(h_\pm)$ είναι θετικοί και άρα αυτοσυζυγείς. Τώρα αν $h \in C(K)$ είναι αυθαίρετη, έχουμε

$$(\rho(h))^* = (\rho(\mathrm{Re}\, h) + i\rho(\mathrm{Im}\, h))^* = \rho(\mathrm{Re}\, h) - i\rho(\mathrm{Im}\, h) = \rho(\mathrm{Re}\, h - i\, \mathrm{Im}\, h) = \rho(h^*)$$

αφού οι $\rho(\mathrm{Re}\, h)$ και $\rho(\mathrm{Im}\, h)$ είναι αυτοσυζυγείς. Ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

(β) Για κάθε $h \in C(K)$ με $h = h^*$ έχουμε $-\|h\|\,\mathbf{1} \leq h \leq \|h\|\,\mathbf{1}$ και συνεπώς $-\|h\|\,\rho(\mathbf{1}) \leq \rho(h) \leq \|h\|\,\rho(\mathbf{1})$, άρα για κάθε $x \in H$,

$$\begin{aligned} -\|h\|\,\langle \rho(\mathbf{1})x, x\rangle &\leq \langle \rho(h)x, x\rangle \leq \|h\|\,\langle \rho(\mathbf{1})x, x\rangle \\ \text{άρα} \quad |\,\langle \rho(h)x, x\rangle\,| &\leq \langle \|h\|\,\rho(\mathbf{1})x, x\rangle \end{aligned}$$

πράγμα που δείχνει (εφόσον ο $\rho(h)$ είναι αυτοσυζυγής) ότι $\|\rho(h)\| \leq \|\rho(\mathbf{1})\|\,\|h\|$.

Έστω τώρα $h \in C(K)$ αυθαίρετη. Έχουμε τότε

$$\|\rho(h)\| \leq \|\rho(\mathrm{Re}\, h)\| + \|\rho(\mathrm{Im}\, h)\| \leq \|\rho(\mathbf{1})\|\,(\|\mathrm{Re}\, h\| + \|\mathrm{Im}\, h\|) \leq 2\,\|\rho(\mathbf{1})\|\,\|h\|\,.$$

Σημείωση Αποδεικνύεται μάλιστα ότι $\|\rho(h)\| \leq \|\rho(\mathbf{1})\|\,\|h\|$ για κάθε $h \in C(K)$. □

Πρόταση 7.4 *Αν $\pi : C(K) \to \mathcal{B}(H)$ είναι μια *-αναπαράσταση (δηλ. διατηρεί το άθροισμα, το γινόμενο και την ενέλιξη - συνήθως υποθέτουμε και ότι $\pi(\mathbf{1}) = I$) τότε είναι θετική και $\|\pi(h)\| \leq \|h\|$ για κάθε $h \in C(K)$.*

Απόδειξη. Κάθε θετική συνάρτηση $h \in C(K)$ γράφεται $h = f^*f$ όπου $f = \sqrt{h} \in C(K)$. Έχουμε λοιπόν

$$\pi(h) = \pi(f^*f) = \pi(f^*)\pi(f) = \pi(f)^*\pi(f) \geq 0.$$

Σ' αυτήν την περίπτωση είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι $\|\pi(h)\| \leq \|h\|$ για κάθε $h \in C(K)$. Πράγματι, από την απόδειξη της Παρατήρησης έχουμε $\|\pi(h^*h)\| \leq \|\pi(\mathbf{1})\|\,\|h^*h\|$ αφού η h^*h είναι αυτοσυζυγής, και τώρα

$$\|\pi(h)\|^2 = \|\pi(h)^*\pi(h)\| = \|\pi(h^*h)\| \leq \|h^*h\| = \|h\|^2\,. \qquad \square$$

πος **Πρόταση 7.5** *Έστω K συμπαγής χώρος. Αν $\psi : C(K) \to \mathbb{C}$ είναι γραμμική και $\psi(\mathbf{1}) = 1 = \|\psi\|$, τότε η ψ είναι θετική, και επομένως $\psi(h^*) = \overline{\psi(h)}$ για κάθε $h \in C(K)$. (Ειδικότερα, ένα μιγαδικό μέτρο μ στον K με $\mu(K) = 1 = \|\mu\|$ είναι θετικό μέτρο.)*

Απόδειξη. Έστω $h \in C(K)$ με $0 \leq h \leq 1$. Θα δείξουμε ότι $\psi(h) \in [0,1]$.

Έστω όχι. Τότε $\psi(h) \in \mathbb{C} \setminus [0,1]$. Το $[0,1]$ είναι κλειστό και κυρτό σύνολο, άρα είναι η τομή όλων των κλειστών δίσκων που το περιέχουν (!). Επομένως υπάρχει ένας κλειστός δίσκος B με κέντρο λ και ακτίνα r που περιέχει το $[0,1]$ αλλά όχι το $\psi(h)$.

Αφού $h(t) \in [0,1] \subseteq B$ για κάθε $t \in K$, έχουμε $|h(t) - \lambda| \leq r$ για κάθε $t \in K$, δηλαδή $\|h - \lambda \mathbf{1}\| \leq r$. Όμως, αφού $\psi(\mathbf{1}) = 1 = \|\psi\|$,

$$r < |\psi(h) - \lambda| = |\psi(h - \lambda \mathbf{1})| \leq \|\psi\| \, \|h - \lambda \mathbf{1}\| \leq r$$

άτοπο. Συνεπώς για κάθε $h \geq 0$ έχουμε $\psi(\frac{h}{\|h\|}) \in [0,1]$ άρα $\psi(h) \geq 0$. □

φγ* **Πρόταση 7.6** *Έστω H χώρος Hilbert και*

$$\rho : A(\mathbb{D}) \to \mathcal{B}(H)$$

γραμμική συστολή με $\rho(\mathbf{1}) = 1$ (δηλ. $\rho(e_0) = 1$). Η ρ δέχεται γραμμική επέκταση σε μια γραμμική απεικόνιση

$$\tilde{\rho} : C(\mathbb{T}) \to \mathcal{B}(H)$$

που είναι θετική, δηλ. $f \geq 0 \Rightarrow \tilde{\rho}(f) \geq 0$. Η $\tilde{\rho}$ είναι η μοναδική θετική επέκταση της ρ.

Απόδειξη. Ορίζω πρώτα

$$\tilde{\rho} : A(\mathbb{D}) + A(\mathbb{D})^* \to \mathcal{B}(H) : f + g^* \to \rho(f) + \rho(g)^* .$$

Πρέπει να δείξω ότι η $\tilde{\rho}$ είναι καλά ορισμένη, δηλ. ότι αν $f, g, f_1, g_1 \in A(\mathbb{D})$ και $f + g^* = f_1 + g_1^*$ τότε $\rho(f) + \rho(g)^* = \rho(f_1) + \rho(g_1)^*$, ισοδύναμα ότι αν $f - f_1 = (g_1 - g)^*$ τότε $\rho(f - f_1) = \rho(g_1 - g)^*$.

Όμως εφόσον οι f, g, f_1, g_1 ανήκουν στην $A(\mathbb{D})$, η σχέση $f - f_1 = (g_1 - g)^*$ δίνει $f - f_1 \in A(\mathbb{D}) \cap A(\mathbb{D})^*$, άρα $f - f_1 = (g_1 - g)^* = \lambda e_0$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{C}$, οπότε $\rho(f - f_1) = \rho(\lambda e_0) = \lambda \rho(e_0) = \lambda$ και ομοίως $\rho(g_1 - g)^* = \lambda$.

Για να επεκτείνω την $\tilde{\rho}$ στην $C(\mathbb{T})$, δηλ. την κλειστή θήκη του $A(\mathbb{D}) + A(\mathbb{D})^*$, πρέπει να δείξω ότι είναι $\|\cdot\|_{\mathbb{T}}$-συνεχής.

Για κάθε $x \in H$ με $\|x\| = 1$, θεωρώ την γραμμική μορφή

$$\phi_x : A(\mathbb{D}) \to \mathbb{C} : h \to \langle \rho(h) x, x \rangle .$$

Παρατηρώ ότι $\phi_x(\mathbf{1}) = 1 = \|\phi_x\|$. Από το Θεώρημα Hahn - Banach, η ϕ_x έχει μια γραμμική επέκταση $\psi_x : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ με την ίδια νόρμα, $\|\psi_x\| = 1$. Συνεπώς $\psi_x(\mathbf{1}) = 1 = \|\psi_x\|$. Από την Πρόταση 7.5 έπεται ότι η ψ_x είναι θετική, άρα για κάθε $h \in C(\mathbb{T})$ έχουμε $\psi_x(h^*) = \overline{\psi_x(h)}$.

Έπεται τώρα ότι αν $f, g \in A(\mathbb{D})$,

$$\begin{aligned} \psi_x(f + g^*) &= \psi_x(f) + \psi(g^*) = \psi_x(f) + \overline{(\psi_x(g))} = \phi_x(f) + \overline{(\phi_x(g))} \\ &= \langle \rho(f) x, x \rangle + \langle x, \rho(g) x \rangle = \langle \rho(f) x, x \rangle + \langle \rho(g)^* x, x \rangle \\ &= \langle \tilde{\rho}(f + g^*) x, x \rangle . \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$| \langle \tilde{\rho}(f + g^*) x, x \rangle | = |\psi_x(f + g^*)| \leq \|\psi_x\| \, \|f + g^*\| \leq \|f + g^*\|$$

αφού $\|\psi_x\| = 1$. Από την ταυτότητα πολικότητας συμπεραίνουμε ότι η $\tilde{\rho}$ είναι συνεχής, άρα επεκτείνεται σ' όλην την $C(\mathbb{T})$. Τώρα για κάθε $x \in H$ και κάθε $h \in C(\mathbb{T})$ με $h \geq 0$,

$$\langle \tilde{\rho}(h)x, x \rangle = \psi_x(h) \geq 0$$

αφού η ψ_x είναι θετική, επομένως ο τελεστής $\tilde{\rho}(h)$ είναι θετικός.

Μοναδικότητα. Αν

$$\rho_1 : A(\mathbb{D}) + A(\mathbb{D})^* \to \mathcal{B}(H)$$

είναι μια *θετική* γραμμική επέκταση της ρ, τότε για κάθε $f, g \in A(\mathbb{D})$ θα έχουμε $\rho_1(g^*) = (\rho_1(g))^* = (\rho(g))^*$ και συνεπώς

$$\rho_1(f + g^*) = \rho_1(f) + \rho_1(g^*) = \rho(f) + (\rho(g))^* = \tilde{\rho}(f + g^*)$$

άρα $\rho_1 = \tilde{\rho}$. □

Διαστολές contractive αναπαραστάσεων

Ορισμός 7 Contractive αναπαράσταση *της $A(\mathbb{D})$ στον χώρο Hilbert H ονομάζεται μια απεικόνιση*

$$\rho : A(\mathbb{D}) \to \mathcal{B}(H)$$

που είναι μορφισμός αλγεβρών με μονάδα και $\|\rho\| \leq 1$.

Μια contractive αναπαράσταση επεκτείνεται, όπως δείξαμε, σε μια μοναδική απεικόνιση $\tilde{\rho} : C(\mathbb{T}) \to \mathcal{B}(H)$. Η απεικόνιση $\tilde{\rho}$ διατηρεί την ενέλιξη, εφόσον είναι θετική, δεν διατηρεί όμως εν γένει το γινόμενο, δεν είναι δηλαδή *-αναπαράσταση της $C(\mathbb{T})$. Όμως,

Πρόταση 7.7 *Κάθε Contractive αναπαράσταση ρ της $A(\mathbb{D})$ δέχεται* διαστολή *σε *-αναπαράσταση της $C(\mathbb{T})$ σε έναν χώρο Hilbert $K \supseteq H$.*

Απόδειξη. Θέτω $A = \rho(e_1) \in \mathcal{B}(H)$ (όπου $e_1(e^{it}) = e^{it}$).

Έχουμε $\tilde{\rho}(e_{-1}) = \tilde{\rho}((e_1)^*) = \rho(e_1)^* = A^*$, άρα $\tilde{\rho}(e_1)\tilde{\rho}(e_{-1}) = AA^*$ ενώ $\tilde{\rho}(e_1 e_{-1}) = \tilde{\rho}(e_0) = I$. (Επομένως η $\tilde{\rho}$ δεν διατηρεί εν γένει το γινόμενο.)

Παρατήρησε ότι ο A είναι συστολή: $\|A\| = \|\rho(e_1)\| \leq \|\rho\| \, \|e_1\| \leq 1$

Επομένως, υπάρχει unitary διαστολή $U \in \mathcal{B}(K)$ του A σ' έναν χώρο Hilbert $K \supseteq H$.

Για κάθε πολυώνυμο $q(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$ έχουμε

$$q(A) = c_0 I_H + c_1 A + \cdots + c_n A^n = c_0\rho(\mathbf{1}) + c_1\rho(e_1) + \cdots + c_n\rho(e_n) = \rho(q)$$

επομένως, αφού $A^m = P_H U^m|_H$,

$$P_H q(U)|_H = q(A) = \rho(q).$$

Δηλαδή η ρ *διαστέλλεται* σε μια contractive αναπαράσταση

$$\rho_1 : A(\mathbb{D}) \to \mathcal{B}(K) : q \to \rho_1(q) = q(U).$$

Τώρα όμως, η (μοναδική) θετική επέκταση $\tilde{\rho}_1 : C(\mathbb{T}) \to \mathcal{B}(K)$ της ρ_1 (Πρόταση 7.6) διατηρεί το γινόμενο, άρα είναι όντως μια *-αναπαράσταση. Πράγματι, αν $n \in \mathbb{Z}_+$, $\tilde{\rho}_1(e_n) = \rho_1(e_n) = U^n$ και $\tilde{\rho}_1(e_{-n}) = \tilde{\rho}_1((e_n)^*) = \rho_1(e_n)^* = (U^*)^n = U^{-n}$, άρα $\tilde{\rho}_1(e_k) = U^k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Βεβαίως η $\tilde{\rho}_1$ είναι διαστολή της ρ: για κάθε πολυώνυμο q, έχουμε $\tilde{\rho}_1(q) = \rho_1(q) = q(U)$ άρα $P_H\tilde{\rho}_1(q)|_H = P_H q(U)|_H q(A) = \rho(q)$.

8 Φασματικά μέτρα

Δες παλιές σημειώσεις.