Καλημέρα σε όλους! ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΤΕΛΕΣΤΗΣ;

<u>1ο Παράδ.</u> $T : f \longmapsto a_1 f + a_2 f' + a_3 f''$: διαφορικός τελεστής

a_i : "καλές" συναρτήσεις

• πού ορίζεται; • f τουλάχιστον 2-φορές παραγ.

• αν όχι: "ασθενής" παράγωγος $f \longmapsto f'$: $\int f' g = - \int f g'$ $\forall$ "καλή" g στο $\mathbb{R}$

$$\int f' g = \underbrace{[fg]_{-\infty}^{+\infty}}_{0} - \int f g'$$

αν $g \in C_c^1(\mathbb{R})$

<u>2ο Παράδ.</u>

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & a_{ij} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C}) \text{ πίνακας}$$

πεδίο ορισμού: $\mathbb{C}^n$

Τι σημαίνει T: γραμμ.; $\forall f, g \in$ Π.Ο., $\lambda \in \mathbb{C}$

τότε (i) $f + \lambda g \in$ Π.Ο.

(ii) $T(f + \lambda g) = T(f) + \lambda T(g)$

<u>Παράδ.</u>

$$(Tf)(x) = \int_0^{2\pi} g(x-y) f(y) \frac{dy}{2\pi}$$

g : "καλή" συνάρτ. περιοδική ↳ δηλ. $g(0) = g(2\pi)$

Ας δοκιμάσω: $f_n(x) = e^{inx}$ $n \in \mathbb{Z}$

$= \cos(nx) + i \sin(nx)$

$$(Tf_n)(x) = \int g(x-y) e^{iny} \frac{dy}{2\pi} \qquad x - y = t$$

$$= \underbrace{\int g(t) e^{in(x-t)} \frac{dt}{2\pi}}_{\hat{g}(n)} = e^{inx} \int_0^{2\pi} g(t) e^{-int} \frac{dt}{2\pi}$$

<u>άρα</u> $Tf_n = \hat{g}(n) f_n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$: πέτυχα διαγωνοποίηση του T:

$$T\begin{bmatrix} \vdots \\ f_{-2} \\ f_{-1} \\ f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & \hat{g}(-1) & & 0 & \\ & & \hat{g}(0) & & \\ & 0 & & \hat{g}(1) & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ f_{-1} \\ f_0 \\ f_1 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\langle f_n, f_m \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_n \overline{f_m} = \int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx} \frac{dx}{2\pi}$$

$$(n \neq m) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)}\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$n = m \quad = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-inx} dx = 1$$

$$\sum a_i f_i = 0 \Rightarrow 0 = \langle \sum a_i f_i, f_j \rangle$$

$$= \sum a_i \underbrace{\langle f_i, f_j \rangle}_{= \delta_{ij}} = a_j$$

$$\Rightarrow \forall a_j = 0$$

αποτελούν ον. βάση του χώρου

T : τριγωνομετρικό πολυών.
(με μιγαδ. συντελεστές)

Το π.ο. του T πιθανά να είναι $C_p([0,2\pi])$

: οι συνεχείς + 2π - περιοδ. απεικ. (δηλ $f(0)=f(2\pi)$)

Θεώρημα (Féjer) : $\forall f \in C_p([0,2\pi])$

προσεγγίζεται ομοιόμορφα από ακολουθία τριγ. πολυωνύμων.

δηλ $\exists\,(p_n)$ τριγ. πολ.:

$$\sup\{|f(t)-p_n(t)| : t\in[0,2\pi]\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

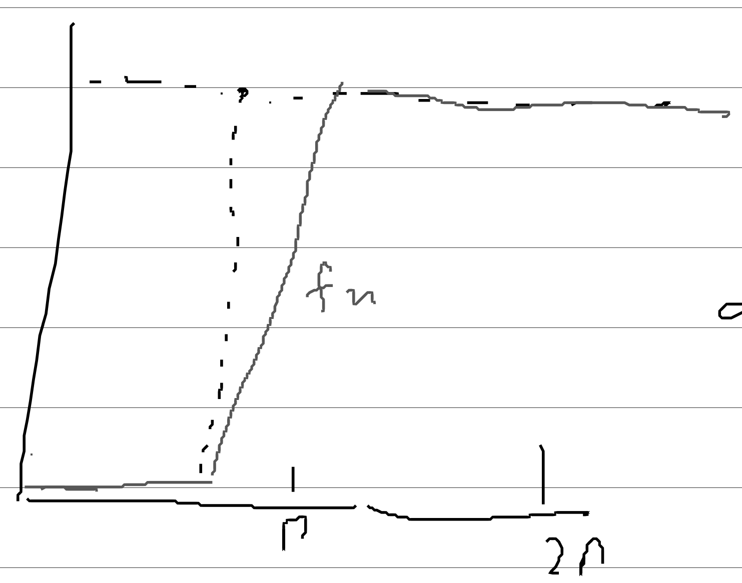
$$\| \ f-p_n \|_\infty$$

άρα, αν $\langle f,g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\frac{dt}{2\pi}$ και $\|f\|_2 = \langle f,f\rangle^{1/2}$

τότε $\|f-p_n\|_2 \leq \|f-p_n\|_\infty$, άρα $\|f-p_n\|_2 \to 0$

Όμως:

$(C_p([0,2\pi]), \|\cdot\|_2)$ όχι πλήρης



(f_n) $\|\ \|_2$-βασική

αλλά $\nexists$ συνεχής f

με $\|f_n-f\|_2 \to 0$

χώροι Hilbert

$\mathcal{H}$: (i) μιγ. χώρος εφοδ. με εσωτ. γινόμενο:

$$\mathcal{H}\times\mathcal{H}\longrightarrow\mathbb{C}\qquad \forall x,x',y\in\mathcal{H}\quad \forall\lambda\in\mathbb{C}$$

(1) $\langle x+\lambda x',y\rangle=\langle x,y\rangle+\lambda\langle x',y\rangle$

(2) $\overline{\langle x,y\rangle}=\langle y,x\rangle$

(3) $\langle x,x\rangle:=\|x\|^2\geq 0$

(4) $\langle x,x\rangle=0\Rightarrow x=0$

(1),(2),(3) $\Rightarrow |\langle x,y\rangle|^2\leq\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$

$\Rightarrow \|x+\lambda y\|\leq\|x\|+|\lambda|\,\|y\|$ ($\|\cdot\|$ ημινόρμα)

$+$ (4) $\Rightarrow$ $\|\cdot\|$ είναι νόρμα

$\Rightarrow d(x,y)=\|x-y\|$ είναι μετρική

(ii) $(\mathcal{H},\|\ \|)$ πλήρης μ.χ.

δηλ. αν (f_n) βασική ($\forall\varepsilon>0\ \exists n_0: m,n\geq n_0\Rightarrow\|f_m-f_n\|<\varepsilon$)
τότε $\exists f_n\in H$ ώστε $\|f_n-f\|\to 0$.

Αν έχω ημι-εσωτ. γινόμενο, δηλ. $\langle x,x\rangle = 0 \not\Rightarrow x=0$

Θέτω $N=\{x\in H : \langle x,x\rangle = 0\}$

: γραμμ. υπόχωρος του H
διότι
$=\{x\in H : \langle x,y\rangle=0 \ \ \forall y\in H\}$

(έπεται από: $|\langle x,y\rangle|^2 \le \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \ \ \forall y$)

Στον χώρο πηλίκο $H/N = \{\tilde{x} = x+N : x\in H\}$

Επάγεται εσωτ. γινόμενο:

$$\langle \tilde x,\tilde y\rangle := \langle x,y\rangle \quad \forall x,y\in H$$

: καλά ορισμένο

και $\langle\tilde x,\tilde x\rangle = 0 \Rightarrow \langle x,x\rangle=0 \Rightarrow x\in N$
$\Downarrow$
$\tilde x = \tilde 0$

παράδ. H = οι Riemann-ολοκληρώσιμες $f:[0,1]\to\mathbb{C}$

$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt \quad : \langle f,f\rangle = \underbrace{\int |f(t)|^2 dt}_{=0} \ge 0$

$\int |f|^2 = 0$

$N=\{f : f=0$ σχεδόν παντού$\}$

στον H/N το $\int f\bar g$ είναι εσωτ. γινόμενο

$\tilde f = \{$όλες οι R-ολοκλ. g : που $g=f$ σ.π.$\}$

μη πλήρης (βλέπε παράδ.!)

Η πλήρωση "είναι" ο $L^2([0,1])$

ορ $\mathcal{L}^2(X,\mathcal{S},\mu) = \{f:X\to\mathbb{C} \mid$ μετρήσιμη και $\int|f|^2d\mu<\infty\}$

· f μετρ. $\Leftrightarrow f^{-1}(V)\in\mathcal{S} \ \ \forall V\subseteq\mathbb{C}$ ανοιχτό

$\Rightarrow$ · $|f|$ μετρ ≥ 0, άρα $\int |f|\,d\mu$ ορίζεται

$N=\{f\in\mathcal{L}^2 : \int|f|^2d\mu=0\} = \{f\in\mathcal{L}^2 : f=0 \ \mu$-σ.π.$\}$

ορ $L^2(X,\mathcal{S},\mu) = \mathcal{L}^2(X,\mathcal{S},\mu)/N$

Θεώρημα F. Riesz - Fisher: $(L^2, \|\ \|_2)$ είναι πλήρης
: χώρος Hilbert

• Οι κλάσεις των απλών και $\int$ σιμων συναρτ. είναι πυκνός υπόχωρος

δηλ. $\forall f\in L^2 \ \ \exists (f_n)$ από απλές $\int$ σιμες

τ.ω. $\|f-f_n\|_2\to 0$

$f_n(t) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^n \chi_{E_k^n}(t)$ όπου $\mu(E_k^n)<+\infty$
$E_k^n\in\mathcal{S}$

$\underline{\text{πχ}}$ $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, m)$ $m = $ Lebesgue

τότε $C_0(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχής και $\lim_{|t|\to\infty} |f(t)| = 0 \}$

είναι πυκνός στον $L^2(\mathbb{R}, m)$

το ίδιο και ο $\quad C_c(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχής και $\underset{\text{συμπ}}{\operatorname{supp} f \subseteq \mathbb{R}} \}$

$\mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$C_c^{\infty}(\mathbb{R}) \subseteq C_c(\mathbb{R}) \subseteq \cancel{C_0(\mathbb{R})} \subseteq L^2(\mathbb{R}) \quad (*)$$

πυκνός $\quad$ πυκνός

$\operatorname{supp} f = \overline{\{ t \in \mathbb{R} : |f(t)| \neq 0 \}}$ συμπ.

$\Updownarrow$ $\exists N \in \mathbb{N} : |f(t)| = 0 \ \forall |t| > N$

$\lim_{|t|\to\infty} |f(t)| = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists K_\varepsilon$ συμπ $\subseteq \mathbb{R}$

τ.ω. $|f(t)| < \varepsilon \ \forall t \notin K_f$

(*) Δεν είναι σωστό ότι $C_0(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$ (φυσικά, αληθεύει ότι $C_c(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$)

$\underline{\text{παρ/γ}}$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{|x|}}, & |x| > 1 \end{cases} \quad \text{τότε} \quad \int_1^n |f(x)|^2 dx = \int_1^n \frac{1}{x} dx = \log n$$

(άρα $\|f\|_2 = +\infty$)

(ευχαριστώ για την υπόδειξη)

Θεωρ (F. Riesz) Ο χώρος $(L^2(X, \mathcal{S}, \mu), \| \|_2)$ είναι χώρος Hilbert

$$\left(\text{ως προς } \langle f, g \rangle = \int f \bar{g} \, d\mu\right)$$

<u>Λήμμα</u> Αν $(E, \| \|)$ χώρος με νόρμα

πλήρης $\Longleftrightarrow$ κάθε απολ. αθροίσιμη σειρά συγκλίνει

<u>δηλ</u>

αν $(x_n), x_n \in E$ με $\sum \|x_n\| < +\infty$

τότε

$\exists \, x \in E$ ώστε

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| \longrightarrow 0$$

<u>Απόδ</u> $(\Longrightarrow)$ Έστω $\sum \|x_k\| < +\infty$

Έστω $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$

$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 : n > m \geq n_0$

$$n > m \quad \|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| < \epsilon$$

άρα (s_n) Βασική, άρα συγκλίνει

$(\Leftarrow)$ Έστω (x_n) βασική ακολ. νδο συγκλίνει

Αρκεί να βρω μια υπακ. που να συγκλίνει

απ' τον ορισμό, $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists \; \|x_{k_n} - x_{k_{n+1}}\| < \frac{1}{2^n}$, $k_n < k_{n+1}$

έχω

$$(y_n) = (x_{k_n}) \text{ υπακ.}$$

$$\text{θέτω } z_n = y_n - y_{n-1} \quad (y_0 = 0)$$

$$\text{οπότε } \sum_{k=1}^{n} z_k = y_n - y_0 = y_n$$

$\forall n$ $$\sum_{k=1}^{n} \|z_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|y_k - y_{k-1}\| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \leq 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|z_k\| \leq 1$$

άρα απο την υποθ. η σειρά $\sum z_k$ συγκλίνει

δηλ. $y = \lim\limits_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1}) = \lim\limits_n y_n$ $\blacksquare$

Απόδ Riesz: Έστω (f_n) των L^2 και είναι $\sum \|f_n\|_2 = M < +\infty$

νδο $\exists f \in L^2$ ώστε $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ (ως προς $\|\ \|_2$)

Θέτω: $g_n = \sum_{k=1}^{n} |f_k|$ μετρ., ≥ 0

$\forall n$ $\quad \|g_n\|_2 \le \sum_{k=1}^{n} \| |f_k| \|_2 = \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_2 \le M$

$$\left(\| |f_k| \|_2^2 = \int |f_k|^2 \, d\mu = \|f_k\|_2^2 \right)$$

δηλ.

$$\forall n \quad \int |g_n|^2 \, d\mu \le M$$

$0 \le (g_n) \nearrow$ οπότε $\forall x \in X$,

$$\exists\ g(x) := \lim g_n(x) \in [0, +\infty]$$

η $g : X \to [0, +\infty]$ μετρ.

από Θεώρ. μον. σύγκλ., αφού $g_n^2 \nearrow g^2$, έχω

$$\underbrace{\int g_n^2 \, d\mu}_{\le M} \to \int g^2 \, d\mu \quad \Rightarrow \int g^2 \, d\mu \le M$$

έδειξα ότι $\|g\|_2^2 = \int g^2 \, d\mu < +\infty$

άρα η g^2 είναι $< +\infty$ σχεδόν παντού

αν $t \in X$ ώστε $g(t) < \infty$ τότε $\sum^{\infty} |f_k(t)| \le g(t)$

άρα $\sum f_k(t)$ συγκλίνει σε κάποιο $s(t)$

αν $t \in X$: $g(t) = +\infty$ θέτω $s(t) = 0$

δηλαδή: $s(t) = \begin{cases} \sum f_k(t) & \text{όταν } g(t) < +\infty \\ 0 & \text{όταν } g(t) = +\infty \end{cases}$

άρα η s είναι μετρήσιμη και

$|s(t)| \le g(t) \quad \forall t \in X \qquad |s|^2 \le g^2$ παντού

$$\Downarrow$$

$$\int |s|^2 \, d\mu \le \int g^2 \, d\mu < +\infty$$

άρα $s \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$

μένει νδο $s_n \xrightarrow{\|\ \|_2} s$ (όπου $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$). Έχω $|s| \le g$, $|s_n| \le g$

$$\Rightarrow |s_n - s|^2 \le |2g|^2$$

$$\int |s_n - s|^2 \, d\mu \le 4 \int |g|^2 \, d\mu$$

όμως $|s_n - s|^2 \to 0$ σ.π. και κυριαρχείται από το $4|g|^2$ που είναι $\int$σιμη

άρα από κυριαρχ. $\int |s_n - s|^2 \, d\mu \to 0$

δηλ. $\|s_n - s\|_2 \to 0$ ∎

(θα βρείτε την απόδ. και στις σημειώσεις Γιαννόπουλου: Αρμονική Ανάλ., MATH425, παράγρ. 1.2 – στην η-τάξη)

Έστω $T : (X, \|\ \|) \to (Y, \|\ \|)$ γραμμικός

φραγμένος λέγεται όταν $\exists M$:

$$\forall x \in X, \quad \|Tx\| \leq M\|x\|$$

Τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής: ?

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| \leq M\|x-y\|$$

$$\Downarrow$$

συνεχής σε κάθε x

$$\Downarrow$$

συνεχής στο 0

$$\Downarrow$$

φραγμ (αποδ. με άτοπο)

ονομάζω $\|T\| = \inf\{M > 0 : \|Tx\| \leq M\|x\| \ \forall x\}$

$$= \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}$$

παράδ στον L^2 :

Έστω $h : X \to \mathbb{C}$ φραγμένη και μετρήσιμη

$M_h : f \longmapsto hf$ (κατά σημείο)

ισχ (i) $\forall f$ στο L^2 η $hf \in L^2$

(ii) $\exists M : \forall f \in L^2, \ \|hf\|_2 \leq M\|f\|_2$

1 σμηαρ. 2 τρυφ: Profanly, hf μετρήσιμη, αλλά $\exists M : |h| \leq M$ παντού

$$\int |hf|^2 d\mu \leq \int M^2 |f|^2 d\mu \leq M^2 \int |f|^2 d\mu < +\infty$$

$hf \in L^2$ και μάλιστα $\|hf\|_2 \leq M\|f\|_2$

άρα T είναι φραγμ $\|T\| \leq M$

Έδειξα ότι, αν $\|h\|_\infty = \sup\{|h(t)| : t \in X\}$,

τότε $\|Tf\|_2 \le \|h\|_\infty \|f\|_2 \quad \forall f \in L^2$

δηλαδή $\|T\| \le \|h\|_\infty$

- στην πραγματικότητα, ισχύει = (τουλάχιστον όταν το μ είναι σ-πεπερασμένο)
- δεν χρειάζεται η h να είναι φραγμ. σ' όλο το X

μπορώ να αλλάξω ένα σύνολο μέτρου 0

Ορ Μία $h : X \to \mathbb{C}$ λέγεται ουσιωδώς φραγμ.

αν $\exists$ ένα σύνολο N με $\mu(N) = 0$ και $\exists M < +\infty$

ώστε $\forall t \notin N$, $|h(t)| \le M$

ορίζω $\|h\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}|h| = \inf\{M : \mu(\{t \in X : |h(t)| > M\}) = 0\}$

$\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{S}, \mu) = \{h : X \to \mathbb{C}$ μετρ + ουσ. φραγμ.$\}$

$L^\infty(X, \mathcal{S}, \mu) = \mathcal{L}^\infty / \mathcal{N}$

όπου $\mathcal{N} = \{h : X \to \mathbb{C}$ μετρησ. και $= 0$ σχεδόν παντού$\}$

$= \{h :$ μετρ και $\|h\|_\infty = 0\}$

αποδεικνύεται ότι ο

$(L^\infty(X, \mathcal{S}, \mu), \|\ \|_\infty)$ πλήρης

("ίδια" πως τον ℓ^∞)

Ειδική περίπτωση:

Έστω $a \in \ell^\infty$ τότε $\forall x \in \ell^2$, $D_a(x) =: ax \in \ell^2$

και $\|D_a\| = \|a\|_\infty$

αντίστροφα, αν ο D_a είναι φραγμ. τελεστής τότε $a \in \ell^\infty$??

$D_a : x \longmapsto ax : \ell^2 \longrightarrow ?$

Ερώτηση αν a δεν είναι φραγμ, $\exists x \in \ell^2$ ώστε $ax \notin \ell^2$

ισοδύναμα ; αν $ax \in \ell^2 \; \forall x \in \ell^2$ τότε $a \in \ell^\infty$ ΝΑΙ

Ομοίως αν (X,μ) χώρος σ-πεπερ μέτρου και $h : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη με $f \in L^2 \Rightarrow hf \in L^2$ τότε $h \in L^\infty(X,\mu)$

Απόδειξη:

- h ουσ φραγμ

$\Leftrightarrow$ • M_h ορίζεται και είναι φραγμ

$\Leftrightarrow$ • $M_h(L^2) \subseteq L^2$

Μη φραγμένα τελεστές : πρόβλ ?

Θεωρώ τον $c_{00} = \{(x(n)) : x(n) \in \mathbb{C} \text{ supp } x \text{ πεπερ}\}$

δηλ $\exists n_x \in \mathbb{N}$ ώστε $x(n) = 0 \; \forall n > n_x$

με $\langle x, y\rangle = \sum x(n)\overline{y(n)}$ (πεπερ. αθροίσματα)

$\|x\|_2 = \left(\sum |x(n)|^2\right)^{1/2}$

Πάρε $a(n) = n$ (εξής τώρα) $(D_a(x)) = (nx(n))$

καλά ορισμένο διότι $\text{supp}(D_a(x)) \subseteq \text{supp}\, x$

γραμμικό

αλλά όχι φραγμ

πχ $\frac{e_n}{n} = (0, \dots, 0, \frac{1}{n}, 0, \dots) \xrightarrow{\|\;\|_2} 0$

διότι $\left\|\frac{e_n}{n}\right\|_2 = \frac{1}{n}$

αλλά $D_a\left(\frac{e_n}{n}\right) = e_n \not\to 0$

το πρόβλημα είναι να βρούμε πού μη φραγμ τελεστή ορισμένο σε πλήρη χώρο. (!;)

Πρόβλ Ο χώρος του Hardy H^2

Αποτελείται από τις f:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{όπου } a_n\in\mathbb{C} \text{ και}$$

$$\sum |a_n|^2 < +\infty$$

ορίζω $\|f\|_H = \left(\sum|a_n|^2\right)^{1/2}$

καθώς τέτοια ΔΣ έχει ακτίνα σύγκλισης ≥ 1

οπότε ορίζει συνάρτηση στον $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$

είναι ολόμορφη (δηλ $\exists f'(z)\ \forall z\in\mathbb{D}$)

Πρότ H^2 είναι ισομ ισομ με τον ℓ^2

$\forall (a_n)\in\ell^2$ ορίζω $f_a(z)=\sum a_n z^n$

$a\longmapsto f_a$ είναι γραμμ + ισομετρία

και επί από τον ορισμό του H^2

Ορίζω T τον τελεστή:

$f\in H^2$: $(Tf)(z)=zf(z)$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$(Tf)(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1}$$

$$\|Tf\|_H^2 = |a_0|^2+|a_1|^2+|a_2|^2+\dots$$

$$=\|f\|_H^2$$

άρα προφανώς ισομετρία

όχι επί γιατί αν $f_0(z)=1\ \forall z$ $f_0\in H^2$

τότε: $\nexists f\in H^2$: $Tf=f_0$

$\ell^2 \to H^2$

$a \longmapsto f_a$

$e_n \longrightarrow f_n$: $f_n(z)=z^n$

$a=(a(n)) \longrightarrow f(z)=\sum a(n)z^n$

$e_n=(0,0,\dots,0,1,0,\dots) \longrightarrow f_n(z)=z^n$

n θέση

$(Tf_n)(z)=z^{n+1}$

δηλ: $Tf_n=f_{n+1}$ $(n\in\mathbb{Z}_+)$

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[r, mapsto] & f_a & \\
e_n & \ell^2 \arrow[r, "V"] \arrow[d, "S"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^2 \arrow[d, "T"] & f_n \arrow[d] \\
e_{n+1} & \ell^2 \arrow[r, "V"] & H^2 & f_{n+1}
\end{tikzcd}$$

όπου $S := V^{-1}TV$, δηλαδή:

$$S(a(0), a(1), a(2), \dots) = (0, a(0), a(1), a(2), \dots)$$

$$T(a(0)z^0 + a(1)z + a(2)z^2 + \dots) =$$
$$= (0 + a(0)z + a(1)z^2 + a(2)z^3 + \dots)$$

$$T = VSV^{-1} \quad \text{ή} \quad TV = VS$$

Έστω

$$M_n = \overline{[e_n, e_{n+1}, e_{n+2}, \dots]}^{\|\ \|_2} \subseteq \ell^2$$

$$= \{(0, 0, \dots, a(n), a(n+1), \dots) : \sum |a(k)|^2 < \infty\}$$

$$\ell^2 = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$$

$S(M_n) \subseteq M_n$: οι M_n είναι S-αναλλοίωτοι

Θεώρημα (Beurling 1949 Acta Mathematica)

Κάθε T-αναλλοίωτος κλειστός υπόχωρος M του H^2 είναι της μορφής

$$M = \{hf : f \in H^2\}$$

όπου $h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη + φραγμένη

με $|h(e^{i\theta})| = 1$ σχεδόν $\forall \theta$

(τα όρια $h(e^{i\theta}) = \lim_{\rho \nearrow 1} h(\rho e^{i\theta})$ υπάρχουν σχεδόν $\forall \theta$)

Παρ/Σ Ολοκληρωτικοί τελεστές.

Έστω $k:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{C}$ συνεχής

και $\forall f\in C([0,1])$ ορίζω:

$$\longrightarrow \quad (C_k f)(x)=\int_0^1 k(x,y)f(y)\,dy$$

[αν θεωρούσαμε στο $\mathbb{N}$ αντί για το $[0,1]$

θα είχα $K:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{C}$

και θα όριζα

$$(C_k f)(n)=\sum_m k(n,m)f(m)$$

: πολ/σμός πινάκων.]

- $C_k f$ είναι συνεχής άρα $\in L^2([0,1])$

- $\|C_k f\|_2 \le \|k\|_{22}\,\|f\|_2$

όπου $\|k\|_{22}=\left(\iint |k(x,y)|^2\,dx\,dy\right)^{1/2}$

άρα ο C_k είναι φραγμ. τελεστής:

$$C_k:(C[0,1],\|\ \|_2)\longrightarrow(C[0,1],\|\ \|_2)$$

Άλλη προσέγγιση: (πιο άμεση) Έστω $k\in L^2([0,1]\times[0,1])$

τότε (Fubini):

$\forall f\in L^2([0,1])$, $C_kf\in L^2([0,1])$

και μάλιστα ισχύει η $\|C_k f\|_2 \le \|k\|_{22}\,\|f\|_2$. Οπότε ορίζεται φραγμ. τελεστής

$$C_k: L^2\longrightarrow L^2$$

(Λεπτομέρειες: Άσκηση!)