¡Buenas Tardes!

<u>Παρ/γ</u> $E = (c_{00}, \langle \cdot , \cdot \rangle)$: όχι Hilbert

$M = \{ x \in c_{00} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x(n) = 0 \}$

πεπερ.

↳ κλειστός υπόχ

και γνήσιος

Αλλά $\nexists\, y \in c_{00} : y \perp M$, x_0

λείπει η πληρότητα

- H: Hilbert, $M \neq H$ κλειστός υπόχ τότε $\exists\, x_0 \neq 0$ $x_0 \perp M$

- Λήμμα: (Αν $x \notin M$) τότε $\exists!\, y \in M$ τ.ω. $\|x-y\| = dist(x, M)$

πλησιέστερο διάνυσμα

Σχέδιο αποδ: $dist(x, M) := \delta > 0$

$\exists\, (y_n) : y_n \in M$ τ.ω

<u>Ισχ</u> (y_n) βασική $\quad \|y_n - x\| \to \delta.$

<u>Αποδ</u>: Κανόνας ΠΛ για $y_n - x$, $y_m - x$

$$\|(y_n - x) + (y_m - x)\|^2 + \|(y_n - x) - (y_m - x)\|^2$$

$$= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2$$

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \left\|\frac{y_n + y_m}{2} - 2x\right\|^2 4$$

$$-4\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2$$

$$\leq 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\delta^2$$

$2\delta^2 \quad\quad 2\delta^2$

⇝ (y_n) είναι βασική

άρα $\exists\, y \in M$ τ.ω $y_n \to y$

άρα $\|x - y_n\| \to \|x - y\|$

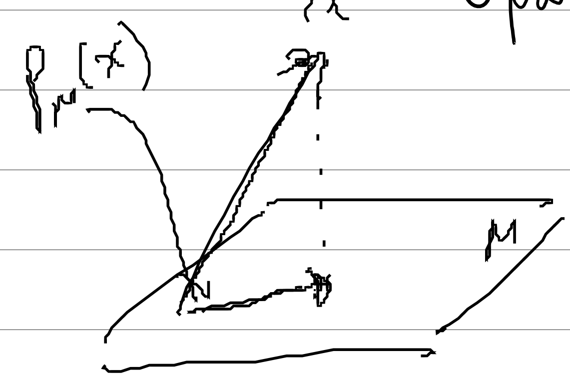
άρα $\|x - y\| = \delta$

μοναδικότητα με τον ίδιο τρόπο. ∎

Ισχυρ. ότι αν $y \in M$ ικανοποιεί
$$\|x-y\| = \operatorname{dist}(x, M)$$
τότε $x - y \perp M$.

Απόδ: Έστω $y' \in M$ τυχαίο (και αρκεί) ν.δ.ο:
$$\langle x-y, y' \rangle = 0$$

όποτε αρκεί να δουλέψω στον $M_0 = [y, y'] \subseteq M$



Όμως: $\dim M_0 < +\infty$ όποτε οκ. (γιατί;)

$$x = P_M(x) + \underbrace{(x - P_M(x))}_{\perp \text{ στον } M}$$

$\|P_M(x)\| \le \|x\| \quad \forall x \in H$

$\Rightarrow \|P_M\| = \sup\{\|P_M(x)\| : \|x\| = 1\}$

≤ 1

$\underline{= 1}$ όταν $M \neq \{0\}$

διότι: παίρνω $x \in M \setminus \{0\}$
θα έχω
$\|P_M(x)\| = \|x\|$

Έχω αντιστοιχία:

{κλειστοί γρ. υποχ.} $\longrightarrow$ {ορθές προβολές}

$M \longrightarrow P_M$

$Im(P) \longleftarrow P$

$= \{Px : x \in H\}$ γραμμ.

$\|$

$= \ker(I - P)$ κλειστός διότι

$= \{y : (I-P)(y) = 0\}$

Πχ $\mathcal{H} = \ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$

$$e_n = (0,0,\dots,0,\overset{n\text{ θέση}}{1},0,\dots)$$

$\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ είναι ο.κ.,

και $\forall\, x = (x(n)) \in \ell^2$ ισχύει

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) e_n$$

διότι $\displaystyle \Big\| x - \sum_{n=1}^{N} x(n) e_n \Big\|_2^2$

$$= \|(0,0,\dots,\overset{N}{0},x(N+1),\dots)\|_2^2$$

$$= \sum_{n>N} |x(n)|^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \quad \text{διότι } x\in\ell^2$$

$[e_n ; n\in\mathbb{N}] = c_{00}(\mathbb{N})$ πυκνό στον ℓ^2

$\neq$

Αν (e_n) ΟΚ βάση του H

και μου δώσουν: $\lambda = (\lambda(n)) \in \ell^2$

ορίζω $x_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda(k) e_k$

και παρατηρώ ότι

$n > m$ $\quad \|x_n - x_m\|^2 \overset{\text{Πυθ}}{=} \sum_{k=m+1}^{n} |\lambda(k)|^2$

άρα (x_n) είναι βασική

και άρα (πληρότητα!) συγκλίνει στο

$$x = \sum \lambda(n) e_n$$

και έχει $\langle x, e_n \rangle = \lambda(n)$

Riesz

$$f_x(y) = \langle x, y \rangle$$

$$|f_x(y)| \leq \|x\| \, \|y\|$$

$$\Downarrow$$

$$\|f_x\| \leq \|x\|$$

αν $x=0$ οκ, αν όχι, βάζε:

ισότητα: $y = \dfrac{x}{\|x\|}$

$$f_x(y) = \left\langle x, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle = \|x\|$$

Riesz:

Απόδ. Έστω $f : H \to \mathbb{C}$ γραμμ + συνεχής

νδο $\exists !\, x \in H : f = f_x$

- αν $f = 0$ τότε $x = 0$, οκ
- αν $f \neq 0$ θεωρώ $M = \ker(f) = \{y \in H : f(y) = 0\}$

$$= f^{-1}(\{0\})$$

κλειστός + γραμμ. υπόχ.

και $M \neq H$

$\Rightarrow \exists\, z \in H \setminus \{0\}, \quad z \perp M$

Θδο ότι κάποιο πολλ/σιο του z κάνει τη δουλειά

έστω $y \in H$. κοιτάω το

$f(z) \neq 0$ $\quad y f(z) - z f(y)$

έχω $f(\qquad\qquad) = 0$

οπότε $y f(z) - z f(y) \in M$

συνεπώς

$$\langle y f(z) - z f(y), z \rangle = 0$$

$$f(z)\langle y, z\rangle - \langle z, z\rangle f(y) = 0$$

$$\Rightarrow f(y) = \frac{f(z)}{\|z\|^2}\langle y, z\rangle \quad \forall y \in H$$

$$= f_x(y) \quad \text{όπου } x = \frac{\overline{f(z)}}{\|z\|^2} z$$

(μοναδικότητα εύκολα) ∎

Sesquilinear, παρ/δγ:

$f_i: H_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ γραμμ.

$g_i: H_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ αντιγραμμ.

τότε $\varphi(x,y) = f(x)g(y)$ sesqui

άλλο: $\varphi(x,y) = \langle x, x_0\rangle\langle y_0, y\rangle$
$x_0 \in H_1,\ y_0 \in H_2$

γενικότερα: $\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) g_i(y)$

όλες;; μάλλον όχι ...

$$|\varphi_T(x,y)| = |\langle Tx, y\rangle| \leq \|Tx\|\,\|y\|$$

$$\leq \|T\|\,\|x\|\,\|y\|$$

$$\sup\{ |\varphi_T(x,y)| : \|x\| = 1 = \|y\| \} \leq \|T\|$$

Θεωρ : όλες είναι αυτής της μορφής (οι φραγμ sesqui)

Απόδ.

Μου δίνουν $\varphi: \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \to \mathbb{C}$

sesquilinear + φραγμ. να βρώ $T: \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$

Σταθεροποιώ ένα $x \in \mathcal{H}_1$, κοιτάω

$$f_x: \begin{array}{l} \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathbb{C} \\ y \longmapsto \varphi(x,y) \end{array} \quad : \text{γραμμική}$$

Είναι και φραγμ.: $|\varphi(x,y)| \le \|\varphi\| \|x\| \|y\| \quad \forall x, y$

$$|f_x(y)| \le (\|\varphi\| \|x\|) \|y\|$$

$$\|f_x\| = \sup\{ \qquad : y \in \mathcal{H}_2, \|y\| = 1\} \le \|\varphi\| \cdot \|x\|$$

f_x γραμμ. + συνεχής $\mathcal{H}_2 \to \mathbb{C}$

άρα, από Riesz: $\exists!\, y_x \in \mathcal{H}_2$:

$$f_x(y) = \langle y, y_x \rangle \quad \forall y \in \mathcal{H}_2$$

δηλ: $\overline{\varphi(x,y)} = \langle y, y_x \rangle$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\varphi(x,y) = \langle y_x, y \rangle \quad \forall y \in \mathcal{H}_2}$$

$\forall x \in \mathcal{H}_1$ βρήκα $y_x \in \mathcal{H}_2$ τ.ω.

Κοιτάω την $x \longmapsto y_x : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$

γραμμική: ✓

$\forall y \in \mathcal{H}_2$:

$$\langle y_{x+\lambda x'}, y \rangle = \varphi(x+\lambda x', y) = \varphi(x,y) + \lambda \varphi(x',y) = \langle y_x, y \rangle + \lambda \langle y_{x'}, y \rangle$$

$$\langle \underbrace{y_{x+\lambda x'} - y_x - \lambda y_{x'}}_{=0}, y \rangle = 0 \quad \forall y \in \mathcal{H}_2$$

δηλ: $y_{x+\lambda x'} = y_x + \lambda y_{x'}$

και είναι φραγμ.: $\forall y \in \mathcal{H}_2$:

$$|\langle y_x, y \rangle| = |\varphi(x,y)| \le (\|\varphi\| \|x\|) \|y\|$$

$\Rightarrow \|y_x\| \le \|\varphi\| \cdot \|x\|$ (γιατί;)

δηλ. η $x \longmapsto y_x$ είναι φραγμ. τελεστής!

γράφω $T: x \longmapsto y_x : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$

οπότε: $\langle Tx, y \rangle = \varphi(x,y) \quad \forall y \in \mathcal{H}_2 \ \forall x \in \mathcal{H}_1$

μοναδικότητα:

Αν επίσης $\exists S: \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ με

$\langle Sx, y \rangle = \varphi(x,y)$ '' ''

τότε θα είχα:

$\langle Sx, y \rangle = \langle Tx, y \rangle$ '' ''

$$\Downarrow$$

$Sx = Tx$ ''

$$\Downarrow$$

$$S = T$$

∎