Συμπληρώματα: (5 Μαρτίου 15, Μεταδ.)

(A) $\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^* =$ τοπολ. δυικός $= \{ f : \mathcal{H} \to \mathbb{C} :$ γραμμ + συν. $\}$

$x \longmapsto f_x$

$$f_x(y) = \langle y, x \rangle \quad \forall y \in \mathcal{H}$$

αντιγραμμ. ισομετρία επί

να ορίσω $\langle f_x, f_y \rangle := \langle y, x \rangle$

έτσι ορίζεται $\langle \cdot , \cdot \rangle$ στον $\mathcal{H}^*$

και δίνει

$$\langle f_x, f_x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2 = \|f_x\|^2$$

άρα ο $(\mathcal{H}^*, \| \ \|)$ είναι χώρος Hilbert!

Ξανά:

$$\mathcal{H}^* \longrightarrow \mathcal{H}^{**}$$

$$f \longmapsto \varphi_f \ : \ \varphi_f(g) = \langle g, f \rangle, \quad g, f \in \mathcal{H}^*$$

Θεωρώ τη σύνθεση:

$$\tau : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^* \longrightarrow \mathcal{H}^{**}$$

$$x \longmapsto f_x \longrightarrow \varphi_{f_x}$$

: γραμμική ισομετρία επί

Όμως έχω και τη γνωστή:

$$\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^{**}$$

$$x \longmapsto \hat{x}$$

κανονική εμφ.

όπου $\hat{x} : \mathcal{H}^* \longrightarrow \mathbb{C}$: $f \longmapsto \hat{x}(f) = f(x)$

$\forall f_y \in \mathcal{H}^*$ $\quad \hat{x}(f_y) = f_y(x) = \langle x, y \rangle \quad \forall y \in \mathcal{H}$

$\tau(x) = \varphi_{f_x}$ όπου $\varphi_{f_x}(f_y) = \langle f_y, f_x \rangle = \langle x, y \rangle$

άρα $\hat{x} = \varphi_{f_x} = \tau(x) \quad \forall x \in \mathcal{H}$ $\blacksquare$

(B) Ολίγη γραμμ. άλγ.: Έστω

$M = \ker f$, $f: H \to \mathbb{C}$ γραμμ., $f \neq 0$

Αν $z \notin M$

$f(z) \neq 0$

τότε: $\forall y \in H \ \exists y_1 \in M, \exists \lambda \in \mathbb{C}$ ώστε

$$y = \lambda z + y_1$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} : \underbrace{y - \lambda z} \in M$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} : f(y - \lambda z) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{''} \quad f(y) = \lambda f(z)$$

$$\lambda = \frac{1}{f(z)} f(y)$$

<u>Συμπέρασμα</u> $\forall z \notin M$ μπορώ να γράψω $\forall y \in H$

$$y = \frac{1}{f(z)} z + \underbrace{\left(y - \frac{1}{f(z)} z\right)}_{\in M}$$

∎

Παράδειγμα
Ένας χ.Η. συναρτήσεων:

$L^2(X,\mathcal{A},\mu)$: αποτελείται από κλάσεις ισοδ. ως προς σ.π. ισότητα

Bergman: G ανοιχτό $\subseteq \mathbb{C}$: $L^2_a(G)$, $A^2(G)$ ή $B^2(G)$

όλες οι $f : G \to \mathbb{C}$ ολόμορφες

με $\iint_G |f(x+iy)|^2\,dx\,dy < +\infty$ ~ $\|f\|_B^2$

$$\langle f,g\rangle = \iint_G f(x+iy)\overline{g(x+iy)}\,dx\,dy$$

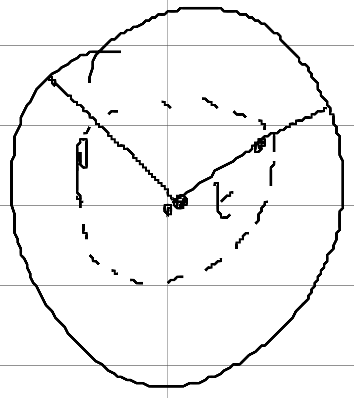
μια χωρ. εσωτ. γινόμενο

πλήρης; Έστω (f_n) ακολουθία στοιχεία του $A^2(G)$ που είναι $\|\ \|_B$ - βασική.

Λήμμα (Μέσης Τιμής) f ολόμορφη "γύρω από" $\overline{B(w,\rho)} = B$ (δηλ. σε μια ανοιχτή περιοχή του B)

τότε
$$f(w) = \frac{1}{\pi\rho^2}\iint_B f$$

Απόδ.



$$\frac{1}{\pi\rho^2}\iint_B f(x+iy)\,dx\,dy \overset{(\text{Απ. ΙΙ})}{=} \frac{1}{\pi\rho^2}\int_0^\rho\int_{-\pi}^{\pi} f(w+te^{i\theta})\,t\,dt\,d\theta$$

$$= \frac{2}{\rho^2}\int_0^\rho \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(w+te^{i\theta})\,d\theta\right)}_{\substack{\| \\ f(w) \text{ από ιδιότ. μέσ. τιμ.}}} t\,dt$$

$$= \frac{2}{\rho^2}\int_0^\rho f(w)\,t\,dt = f(w)\frac{2}{\rho^2}\frac{\rho^2}{2} = f(w)$$

Πόρισμα
$$|f(w)| \le \frac{1}{\rho\sqrt{\pi}}\iint_B |f|^2 \quad (\text{Cauchy-Sch})$$

$$\le \frac{1}{\rho\sqrt{\pi}}\|f\|_B^2 \quad (1)$$

G ανοιχτό:
$$\forall w \in G \ \exists R : \overline{B(w,R)} \subseteq G$$

Έστω $0 < \delta < \operatorname{dist}(\overline{B(w,R)}, \partial G)$

συμπαγ   κλειστό

$\Downarrow$

$\forall z \in \overline{B(w,R)} : \overline{B(z,\delta)} \subseteq G$ (*)

$\Downarrow$ Ισχυρισμός (1)

(*) αν $u \in \overline{B(z,\delta)}$ τότε $\forall v \in G^c$: $|z-u| \le \delta < |z-v|$ άρα $u \neq v$ οπότε $u \in G$

$$|f_n(z) - f_m(z)| \le \frac{1}{\delta\sqrt{\pi}} \|f_n - f_m\|_B$$

$$\Rightarrow \sup\left\{ |f_n(z) - f_m(z)| : z \in \overline{B(z,\delta)} \right\} \le \frac{1}{\delta\sqrt{\pi}} \|f_n - f_m\|_B$$

άρα (f_n) είναι ομοιόμορφα βασική σε κάθε κλειστή μπάλα $\subseteq G$

$\Downarrow$

συγκλίνει σε μια $f : G \to \mathbb{C}$ (ομοιόμορφα στα συμπ.) συνεχής

$\Downarrow$ συμπ

Επιπλέον: $\forall$ κλειστό τρίγωνο $\Delta \subseteq G$

έχω $$\int_\Delta f(z)\,dz = \lim_n \int_\Delta f_n(z)\,dz = 0$$ γιατί $\forall f_n$ ολόμορφη στο G

$f : G \to \mathbb{C}$ συνεχής τ.ω. $\int_\Delta f(z)\,dz = 0$

$\Downarrow$

Morera: ολόμορφη.

Όμως, (f_n) βασική στη νόρμα του $L^2(G)$. Άρα $\exists\, h \in L^2(G)$ ώστε $\|f_n - h\|_2 \to 0$

Άρα $\exists$ υπακ. (f_{k_n}) ώστε $f_{k_n}(z) \to h(z)$ σχεδόν $\forall z \in G$. Από την άλλη, $f_{k_n}(z) \to f(z)$ $\forall z \in G$

Άρα, $f(z) = h(z)$ σχεδόν παντού.

Επομένως, $\|f_n - f\|_2 = \|f_n - h\|_2 \to 0$. ∎

<u>Παρ:</u> Από την ισχύ/ισχυρισμό:

$$|f(z)| \le C\|f\|_B$$

έπεται ότι $\forall z \in G$ η απεικόνιση:

$f \longmapsto f(z)$ είναι $\|\ \|_B$ - συνεχής (φυσικά γραμμική)

άρα (Riesz, πάλι!) $\forall z\ \exists\, k_z \in A^2$ τ.ω.

$$f(z) = \langle f, k_z \rangle \quad \forall f \in A^2$$

Ξενα:

Riesz: Αν $\mathcal{H}$ Hilbert, $\forall \varphi : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ γρ. + συνεχής

είναι της μορφής

$$\varphi(f) = \langle f, g \rangle, \quad f \in \mathcal{H}$$

όπου g κατάλληλο $\in \mathcal{H}$

Έστω $A^2(G)$: $\forall z \in G$

$$A^2(G) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$f \longmapsto f(z) \quad \text{γραμμ.}$$

Όμως $|f(z)| < \quad \|f\|_B$

είναι και φραγμ.

άρα $\exists K_z \in A^2(G)$:

(repr. kernel) $f(z) = \langle f, K_z \rangle \quad \forall f \in A^2(G)$

$$= \iint f \overline{K_z}$$

Τέτοιοι χώροι λέγονται

Reproducing Kernel Hilbert Spaces (RKHS)

δες ωραίες σημειώσεις του Vern Paulsen στο

www.math.uh.edu/~vern/rkhs.pdf

——— o ———

$\forall \varphi$ φραγμ. sesqui $\exists ! \, T : H_1 \to H_2$: τ.ω.

$$\varphi(x,y) = \langle Tx, y \rangle, \quad x \in H_1, \; y \in H_2$$

μάλιστα

$$\|T\| \overset{(*)}{=} \sup \{ |\langle Tx, y\rangle| : \|x\| = 1 = \|y\| \}$$

απόδ $(*)$:

- $\forall x \in H$, $\|x\| = \sup \{ |\langle x, y\rangle|, \|y\| = 1 \}$

διότι:

$$(i) \; |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \|y\| = \|x\|$$

$$(ii) \text{ αν } x \neq 0, \text{ γράφω } y = \frac{x}{\|x\|}$$

οπότε: $\langle x, y\rangle = \|x\|$

Τώρα:

- $|\langle Tx, y\rangle| \leq \|Tx\| \|y\| \leq \|T\| \|x\| \|y\|$

- $\|Tx\| = \sup \{ |\langle Tx, y\rangle| \; \|y\| = 1 \}$

άρα

$$\|T\| = \sup \{ \|Tx\| ; \|x\| = 1 \}$$

$$= \sup \{ |\langle Tx, y\rangle| : \|x\| = 1 = \|y\| \}.$$

$\blacksquare$

Ο συζυγής τελεστής:

Εστω $H_1 \xrightarrow{T} H_2$ γραμμ + φραγμ

$\exists ? \quad H_2 \xrightarrow{T^*} H_1$

$$\langle x, T^* y\rangle_1 = \langle Tx, y\rangle \quad \forall\, x \in H_1,\ y \in H_2$$

<u>Αποδ</u>:

ορίζω $\psi : H_2 \times H_1 \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\psi(y,x) = \langle y, Tx\rangle_2 \quad y \in H_2,\ x \in H_1$$

sesqui (προφ) και φραγμ:

διότι:

$$|\psi(y,x)| = |\langle Tx, y\rangle|$$

$$\|\psi\| = \sup\{\underbrace{|\psi(y,x)|}_{\|T\|} : \|x\| = 1 = \|y\|\}$$

όπως μόλις είδαμε

Επομένως $\exists!\ T^* : H_2 \to H_1$:

$$\psi(y,x) = \langle T^* y, x\rangle \quad \forall x \in H_1,\ y \in H_2$$

και μάλιστα: $\|T^*\| = \|\psi\| = \|T\|$

<u>δηλαδή</u> $\langle x, T^* y\rangle = \langle Tx, y\rangle \quad \forall x \in H_1$
$\forall\, y \in H_2$

πχ. στον $\mathbb{C}^n$: όταν $T = [a_{ij}]$

τότε $T^* = [\bar{a}_{ji}]$ (διότι $a_{ij} = \langle Te_j, e_i\rangle$

οπότε

$\langle T^* e_j, e_i\rangle = \langle e_j, Te_i\rangle =$
$= \overline{\langle Te_i, e_j\rangle} = \bar{a}_{ji}$.)

Αν έχουμε $T: E \to H_2$ γραμμ.

όπου E = χώρος μέσου γινομένου
<u>μη πλήρης</u>

τότε ο T^* ορίζεται <u>διαφορετικά</u>

μπορεί να έχει Π.Ο. $\{0\}$

Παρ: $\forall y \in H_2$, $x \mapsto \langle Tx, y \rangle : H_1 \to \mathbb{C}$
γραμμική και
συνεχής
<u>όταν</u> T φραγμ. (!)

όπως, όταν ο H_1 είναι <u>πλήρης</u>

$\exists\, T^*: \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$

Στη γενική περίπτωση (E μη πλήρης)

ορίζω $D(T^*) = \{ y \in H_2 : x \mapsto \langle Tx, y \rangle$
είναι συνεχής ως
προς $x \in E \}$

και $\forall y \in D(T^*)$ ονομάζω $T^*y \in \bar{E}$

πλήρωση του E

το στοιχείο του $\bar{E}$ που ικανοποιεί:

$$\langle T^*y, x \rangle = \langle y, Tx \rangle \quad \forall x \in E.$$

Άσκηση Αν $\mathcal{H}$: Hilbert, και $T: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ γραμμική

(Hellinger–Toeplitz)

και $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ $\forall x, y \in \mathcal{H}$

$$\Downarrow$$

T συνεχής

Κατηγορίες Τελεστών :

$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ λέγεται normal όταν $A^*A = AA^*$

ενδιαφέρον!

αυτοσυζυγής όταν $A = A^*$

πχ $\mathcal{H} = L^2([0,1])$, $A = M_f$ (όπου $M_f(g) = fg$)

$$\langle M_f^* g, h\rangle \overset{\text{op}}{=} \langle g, M_f h\rangle$$

$$= \langle g, fh\rangle = \int g\overline{fh}$$

$$= \int (\bar{f}g)\bar{h} = \langle \bar{f}g, h\rangle$$

$$= \langle M_{\bar{f}}\, g, h\rangle \quad \forall g, h \in L^2$$

$$\Downarrow$$

$M_f^* = M_{\bar{f}}$ άρα M_f αυτοσυζ.

$\iff f = \bar{f}$ σ.π.

$\iff f$ παίρνει σ.π. πραγμ. τιμές

πότε ο M_f είναι φυσιολογικός

Πρόσ
έστω $\mathcal{H} = H^2$ $\left(f(z) = \sum a_n z^n \right.$
θεωρώ τον T: $\left. \sum |a_n|^2 < +\infty \right)$

$$(Tf)(z) = zf(z)$$

περιμένει κανείς:

$$(T^* f)(z) = \bar{z} f(z)$$

ποιος είναι ο T^*; ΑΜΔΕ!

$$\langle T^* f, g \rangle = \langle f, Tg \rangle \quad \forall f, g \in H^2$$

Υπενθύμιση: $f_n(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$

τότε $\{f_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ είναι ο.κ. βάση του H^2

και

$$(Tf_n)(z) = z f_n(z) = z^{n+1}$$

δηλ. $Tf_n = f_{n+1}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$

$$\langle T^* f_m, f_n \rangle = \langle f_m, T f_n \rangle$$

$$= \langle f_m, f_{n+1} \rangle = \begin{cases} 0, & m \neq n+1 \\ 1, & m = n+1 \end{cases}$$

άρα $\langle \underline{T^* f_m}, f_n \rangle = \begin{cases} \langle \underline{f_{m-1}}, f_n \rangle, & m \geq 1 \\ 0, & m = 0 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$

⋮

$$T^* f_m = \begin{cases} f_{m-1}, & m \geq 1 \\ 0, & m = 0 \end{cases} \quad \forall m \in \mathbb{Z}_+$$

οπότε: $(T^* f)(z) = T^* \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m \right)$

normal;
"$A^* A = A A^*$"

$$= a_0 0 + a_1 z^0 + a_2 z^1 + a_3 z^2 + \cdots$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} a_m z^{m-1}$$

$T^* T$: $f_n \longrightarrow f_{n+1} \longrightarrow f_n \ \forall n$; $T^* T = I$

TT^*: $f_n \xrightarrow{n \geq 1} f_{n-1} \longrightarrow f_n$

$\xrightarrow{n = 0} 0 \longrightarrow 0$

άρα $TT^*(f_n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ f_n, & n \geq 1 \end{cases}$

$TT^* = P$: προβολή στον κλειστό υπόχωρο που παράγουν τα $\{f_n : n \geq 1\}$

→ όχι φυσιολογικός.

Ενας $A \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται θετικός όταν

$$\langle Ax, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in H$$

Ενας $V \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται unitary

όταν είναι αντιστρέψιμος

και $V^{-1} = V^*$

ή ισοδύναμα: $V^*V = I_{H_1}$, και $VV^* = I_{H_2}$

$$H_1 \xrightarrow{V} H_2 \xrightarrow{V^*} H_1$$

$$H_2 \xrightarrow{V^*} H_1 \xrightarrow{V} H_2$$

πχ $T : H^2 \to H^2$ ικανοποιεί $T^*T = I$, $TT^* \neq I$

• Πρόταση V ισομετρία $\|Vx\| = \|x\| \ \forall x$

$$\Updownarrow$$

$$V^*V = I_{H_1}$$

απόδ Αν $V^*V = I$ τότε

$$\forall x, \quad \|Vx\|^2 = \langle Vx, Vx\rangle = \langle V^*Vx, x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$$

αντίστροφα, αν V ισομετρία τότε, από $\uparrow$ έχω

$$\langle V^*Vx, x\rangle = \langle x, x\rangle \quad \forall x$$

κοιτάω την

$$\varphi_V(x,y) = \langle Vx, y\rangle$$

δείξαμε ότι $\varphi_V(x,x) = \langle x, x\rangle \ \forall x$

άρα από polarization:

$$\langle V^*Vx, y\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x, y$$

Αποδ
$\forall x, \langle V^*V x, x\rangle = \langle x, x\rangle$

$$\langle V^*V\left(\frac{x+y}{2}\right), \frac{x+y}{2}\rangle = \langle \frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\rangle$$

$$-\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$+i\left(\frac{x+iy}{2}\right)$$

$$-i\left(\frac{x-iy}{2}\right)$$

$$4\langle V^*Vx, y\rangle = 4\langle x, y\rangle \quad \forall x, y$$

$$\Downarrow$$

$$V^*V = I$$

για να είναι ο V unitary πρέπει επιπλέον:
$$VV^* = I$$

ισοδύναμα, θέλω επιπλέον V επί

Αποδ Αν V ισομετρία + επί, τότε

$\exists\ V^{-1}$ και μάλιστα
$$V^*V = I \Rightarrow (V^*V)V^{-1} = V^{-1}$$
$$\Rightarrow V^*(VV^{-1}) = V^{-1} \Rightarrow V^* = V^{-1}$$

αντίστροφα, αν V unitary, τότε είναι αντιστρέψιμος και $V^* = V^{-1}$ άρα προφανώς:
$$V^*V = V^{-1}V = I_{H_1}$$
και $$VV^* = VV^{-1} = I_{H_2}$$