Επεκτάσεις (πλήρως) θετικών απεικονίσεων
και το Θεώρημα του Arveson

Πρόταση 1. *Αν $V \subseteq \mathcal{B}(H)$ είναι ένα σύστημα τελεστών* [1] *και $\omega : V \to \mathbb{C}$ μια γραμμική μορφή, τότε η ω είναι θετική αν και μόνον αν (είναι φραγμένη και) $\|\omega\| = \omega(\mathbf{1})$ (όπου $\mathbf{1}$ η μονάδα του V).*

Για την απόδειξη, θα χρειασθεί το ακόλουθο

Λήμμα 1. *Έστω $V \subseteq \mathcal{B}(H)$ ένα σύστημα τελεστών και $\omega : V \to \mathbb{C}$ μια γραμμική μορφή με $\|\omega\| = \omega(\mathbf{1}) = 1$. Για κάθε $x = x^* \in V$, έχουμε*

$$\min \sigma(x) \leqslant \omega(x) \leqslant \max \sigma(x)$$

(όπου $\sigma(x)$ το φάσμα του τελεστή $x \in V \subseteq \mathcal{B}(H)$).

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι το $\sigma(x)$ είναι συμπαγές υποσύνολο της πραγματικής ευθείας, οπότε $\sigma(x) \subseteq [a_x, b_x]$ όπου $a_x := \min \sigma(x)$, $b_x := \max \sigma(x)$.

Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι $\omega(x) \notin [a_x, b_x]$.

Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι το ευθ. τμήμα $[a_x, b_x]$ (όπως κάθε κυρτό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$) είναι η τομή όλων των κλειστών δίσκων $B(z,r) \subseteq \mathbb{C}$ που το περιέχουν. Από την υπόθεση λοιπόν υπάρχει κλειστός δίσκος $B(z,r)$ ώστε $[a_x, b_x] \subseteq B(z,r)$ αλλά $\omega(x) \notin B(z,r)$, δηλ. $|\omega(x) - z| > r$.

Επειδή $\|\omega\| = \omega(\mathbf{1}) = 1$, έχουμε

$$|\omega(x) - z| = |\omega(x) - z\omega(\mathbf{1})| = |\omega(x - z\mathbf{1})| \leqslant \|\omega\|\|x - z\mathbf{1}\| = \|x - z\mathbf{1}\|.$$

Άρα

$$r < |\omega(x) - z| \leqslant \|x - z\mathbf{1}\|. \tag{+}$$

Αφού $\sigma(x) \subseteq [a_x, b_x] \subseteq B(z,r)$, κάθε $\lambda \in \sigma(x)$ ικανοποιεί $|\lambda - z| \leqslant r$, άρα

$$\sup\{|\lambda - z| : \lambda \in \sigma(x)\} \leqslant r.$$

Όμως το $x - z\mathbf{1}$ είναι φυσιολογικό στοιχείο και συνεπώς

$$\|x - z\mathbf{1}\| = \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(x - z\mathbf{1})\}\,.$$

Αλλά $\sigma(x - z\mathbf{1}) = \{\lambda - z : \lambda \in \sigma(x)\}$, άρα $\|x - z\mathbf{1}\| \leqslant r$ και καταλήξαμε σε άτοπο (λόγω της (+)). $\square$

Απόδειξη της Πρότασης (1). Διαιρώντας με $\omega(\mathbf{1})$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\omega(\mathbf{1}) = 1$.

Έστω ότι $\|\omega\| = \omega(\mathbf{1}) (= 1)$. Για κάθε $x \in V^+$ έχουμε $\sigma(x) \subseteq [0, \|x\|]$ οπότε από το Λήμμα έπεται ότι $\omega(x) \in [0, \|x\|]$, άρα $\omega(x) \geqslant 0$: η ω είναι θετική γραμμική μορφή.

Για το αντίστροφο: έστω ότι $\omega(V^+) \subseteq \mathbb{R}_+$. Θα δείξουμε ότι η ω είναι συνεχής, μάλιστα ότι $\|\omega\| \leqslant 1$ (ξέρουμε ήδη ότι $\|\omega\| \geqslant 1$, αφού $\omega(\mathbf{1}) = 1$).

Παρατηρούμε πρώτα ότι για κάθε $x \in V$ έχουμε $\omega(x^*) = \overline{\omega(x)}$. Πράγματι, γράφοντας $x = x_1 + ix_2$ όπου τα $x_1, x_2 \in V$ είναι αυτοσυζυγή και μετά $x_i = a_i - b_i$ όπου τα $a_i, b_i \in V$ $(i = 1, 2)$ είναι θετικά, οι αριθμοί $\omega(a_i), \omega(b_i)$ είναι μη αρνητικοί απ' την υπόθεση, άρα πραγματικοί οπότε

$$\begin{aligned}
\overline{\omega(x)} &= \overline{\omega((a_1 - b_1) + i(a_2 - b_2))} = \overline{(\omega(a_1) - \omega(b_1)) + i(\omega(a_2) - \omega(b_2))} \\
&= (\omega(a_1) - \omega(b_1)) - i(\omega(a_2) - \omega(b_2)) \\
&= \omega((a_1 - b_1) - i(a_2 - b_2)) = \omega(x_1 - ix_2) \\
&= \omega(x^*)\,.
\end{aligned}$$

[1] arvext23 modifed 7 Ιουνίου 2023

Έστω τώρα $x \in V$ με $\|x\| = 1$. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε $\|e^{it}x\| = 1$, άρα

$$\left\| \frac{e^{it}x + e^{-it}x^*}{2} \right\| \leqslant 1$$

$$\text{άρα} \qquad -\mathbf{1} \leqslant \frac{e^{it}x + e^{-it}x^*}{2} \leqslant \mathbf{1}$$

αφού το $\frac{e^{it}x+e^{-it}x^*}{2}$ είναι αυτοσυζυγές. Εφαρμόζοντας την θετική ω έχουμε

$$-1 = -\omega(\mathbf{1}) \leqslant \frac{e^{it}\omega(x) + e^{-it}\omega(x^*)}{2} \leqslant \omega(\mathbf{1}) = 1\,.$$

Όμως $\omega(x^*) = \overline{\omega(x)}$ άρα η προηγούμενη ανισότητα γράφεται

$$-1 \leqslant \frac{e^{it}\omega(x) + \overline{e^{it}\omega(x)}}{2} \leqslant 1$$

Αν επιλέξουμε το t ώστε $e^{it}\omega(x) \in \mathbb{R}$ η τελευταία σχέση γράφεται $|e^{it}\omega(x)| \leqslant 1$, και άρα $|\omega(x)| \leqslant 1$.
Δείξαμε ότι για κάθε $x \in V$ με $\|x\| = 1$ έχουμε $|\omega(x)| \leqslant 1$, δηλαδή ότι $\|\omega\| \leqslant 1$. □

Παρατήρηση. Ίσως έχει ενδιαφέρον να συγκρίνει κανείς την απόδειξη αυτή με εκείνην που δώσαμε (δείτε το αρχείο `gns23.pdf`) στην *ειδική περίπτωση* όπου V είναι C*-άλγεβρα με μονάδα.

Παρατήρηση. Το συμπέρασμα της Πρότασης δεν ισχύει για θετική $\omega : V \to M_2(\mathbb{C})$.

Παράδειγμα 1. *Έστω $V \subseteq C(\mathbb{T})$ η γραμμική θήκη των $\{\mathbf{1}, \zeta, \bar{\zeta}\}$ όπου $\zeta(z) = z$. Δηλαδή κάθε $f \in V$ είναι της μορφής $f(e^{it}) = a + be^{it} + ce^{-it}$ με $a, b, c \in \mathbb{C}$. Ορίζουμε*

$$\phi : V \to M_c(\mathbb{C}) : f \mapsto \begin{bmatrix} a & 2b \\ 2c & a \end{bmatrix}.$$

Τότε η ϕ είναι θετική αλλά $\|\phi\| > \|\phi(\mathbf{1})\|$.

Απόδειξη. Εύκολα αποδεικνύεται ότι αν $f \in V^+$ τότε είναι της μορφής $f(e^{it}) = a + \mathrm{Re}(de^{it})$ όπου $a \in \mathbb{R}$ και $a \geqslant |d|$. Τότε

$$\phi(f) = \begin{bmatrix} a & d \\ \bar{d} & a \end{bmatrix}$$

που είναι θετικός πίνακας.

Δείξαμε ότι η απεικόνιση ϕ είναι θετική. Όμως, $\phi(\mathbf{1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ άρα $\|\phi(\mathbf{1})\| = 1$ ενώ $\phi(\zeta) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ που έχει νόρμα 2 και άρα $\|\phi\| \geqslant \|\phi(\zeta)\| = 2 > \|\phi(\mathbf{1})\|$. □

Λήμμα 2. *Έστω V ένα σύστημα τελεστών.*
(1) Αν $a \in V$, το $\left[\begin{smallmatrix} \mathbf{1} & a \\ a^* & \mathbf{1} \end{smallmatrix}\right] \in M_2(V)$ είναι θετικό αν και μόνον αν $\|a\| \leqslant 1$.
(2) Έστω $a \in V$ και $p \in V^+$. Αν το $\left[\begin{smallmatrix} p & a \\ a^* & p \end{smallmatrix}\right] \in M_2(V)$ είναι θετικό, τότε $\|a\| \leqslant \|p\|$.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα το (2): Αν $V \subseteq \mathcal{B}(H)$, τότε ο $T := \left[\begin{smallmatrix} p & a \\ a^* & p \end{smallmatrix}\right]$ είναι τελεστής στον $H \oplus H$ και $a, p \in \mathcal{B}(H)$.

Υποθέτουμε ότι $T \geqslant 0$. Τότε για κάθε $x, y \in H$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \langle T \left[\begin{smallmatrix} x \\ \lambda y \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} x \\ \lambda y \end{smallmatrix}\right] \rangle &= \langle px + \lambda ay, x\rangle + \langle a^*x + \lambda py, \lambda y\rangle \\ &= \lambda^2 \langle py, y\rangle + 2\lambda \mathrm{Re}\langle ay, x\rangle + \langle px, x\rangle\,. \end{aligned}$$

Αφού η ανισότητα ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, έπεται ότι

$$|\mathrm{Re}\langle ay, x\rangle|^2 \leqslant \langle px, x\rangle\langle py, y\rangle \qquad (*)$$

για κάθε $x, y \in H$. Επιλέγουμε $\theta \in \mathbb{R}$ ώστε $\mathrm{Re}\langle ay, x\rangle = e^{i\theta}\langle ay, x\rangle$ Τότε έχουμε

$$|\langle ay, x\rangle|^2 = |e^{i\theta}\langle ay, x\rangle|^2 = |\mathrm{Re}\langle ay, x\rangle|^2 \leqslant \langle px, x\rangle\langle py, y\rangle$$

από την $(*)$ και άρα (παίρνοντας sup ως προς x και y) $\|a\| \leqslant \|p\|$.

Απόδειξη του (1) Αν $\|a\| \leqslant 1$ τότε για κάθε $x, y \in H$ νόρμας 1 έχουμε
$\mathrm{Re}\langle ay, x\rangle \geqslant -|\langle ay, x\rangle| \geqslant -\|a\|\,\|x\|\,\|y\| \geqslant -1$ και άρα

$$\begin{aligned}\langle T\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]\rangle &= \langle x + ay, x\rangle + \langle a^*x + y, y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle ay, x\rangle + \|y\|^2 \geqslant 2 - 2\end{aligned}$$

συνεπώς $T \geqslant 0$.

Η άλλη κατεύθυνση προκύπτει από το (2) για $p = \mathbf{1}$. $\square$

Πρόταση 2. *Αν V είναι σύστημα τελεστών και $\Phi : V \to \mathcal{B}(H)$ είναι 2-θετική, τότε $\|\Phi\| = \|\Phi(\mathbf{1})\|$ (δηλαδή $\|\Phi(v)\| \leqslant \|\Phi(\mathbf{1})\|$ για κάθε $v \in V$ με $\|v\| \leqslant 1$).*

Απόδειξη. Αν $v \in V$ με $\|v\| \leqslant 1$ από το Λήμμα έχουμε ότι το $\left[\begin{smallmatrix} \mathbf{1} & v \\ v^* & \mathbf{1} \end{smallmatrix}\right] \in M_2(V)$ είναι θετικό οπότε, αφού η Φ είναι 2-θετική, έχουμε $\left[\begin{smallmatrix} \Phi(\mathbf{1}) & \Phi(v) \\ \Phi(v^*) & \Phi(\mathbf{1}) \end{smallmatrix}\right] \geqslant 0$. Όμως αφού η Φ είναι θετική, έχουμε $\Phi(v^*) = (\Phi(v))^*$ οπότε $\left[\begin{smallmatrix} \Phi(\mathbf{1}) & \Phi(v) \\ (\Phi(v))^* & \Phi(\mathbf{1}) \end{smallmatrix}\right] \geqslant 0$. Από το (2) του Λήμματος έχουμε λοιπόν $\|\Phi(v)\| \leqslant \|\Phi(\mathbf{1})\|$ όπως θέλαμε. $\square$

Πρόταση 3. *Αν V είναι σύστημα τελεστών και $\Phi : V \to \mathcal{B}(H)$ είναι πλήρως θετική, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\|\Phi^{(n)}\| = \|\Phi(\mathbf{1})\|$ (δηλαδή $\|[\Phi(v_{ij})]\| \leqslant \|\Phi(\mathbf{1})\|$ για κάθε $v = [v_{ij}] \in M_n(V)$ με $\|v\| \leqslant 1$).*

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η $\Phi^{(n)} : M_n(V) \to \mathcal{B}(H^n)$ είναι 2-θετική, κατά συνέπεια από την προηγούμενη Πρόταση $\|\Phi^{(n)}\| = \|\Phi^{(n)}(\mathbf{1}_n)\|$, όπου $\mathbf{1}_n \in M_n(V)$ η μονάδα του συστήματος τελεστών $M_n(V)$. Δηλαδή $\mathbf{1}_n = \mathbf{1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{1}$, άρα $\Phi^{(n)}(\mathbf{1}_n) = \Phi(\mathbf{1}) \oplus \cdots \oplus \Phi(\mathbf{1})$, οπότε $\|\Phi^{(n)}(\mathbf{1}_n)\| = \|\Phi(\mathbf{1})\|$. $\square$

Ορίζουμε $\|\Phi\|_{cb} := \sup_n \|\Phi^{(n)}\|$. Μία γραμμική απεικόνιση Φ λέγεται *πλήρως φραγμένη (totally bounded)* αν $\|\Phi\|_{cb} < \infty$.

Πρόταση 4 (Krein)**.** *Αν $V \subseteq W$ είναι συστήματα τελεστών και $\omega : V \to \mathbb{C}$ μια* θετική *γραμμική μορφή, τότε η ω έχει επέκταση σε μια γραμμική μορφή $\tilde{\omega} : W \to \mathbb{C}$ που είναι* θετική.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[dr, dotted, "\exists\tilde{\omega}"] & \\ V \arrow[u, hook] \arrow[r, "\omega"'] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Αφού η $\omega : V \to \mathbb{C}$ είναι θετική, από την Πρόταση 1 θα ικανοποιεί $\|\omega\| = \omega(\mathbf{1})$. Από το θεώρημα Hahn Banach η ω έχει μια επέκταση σε μια γραμμική μορφή $\tilde{\omega} : W \to \mathbb{C}$ με $\|\tilde{\omega}\| = \|\omega\|$. Άρα η $\tilde{\omega}$ ικανοποιεί $\|\tilde{\omega}\| = \omega(\mathbf{1}) = \tilde{\omega}(\mathbf{1})$ και συνεπώς, πάλι από την Πρόταση 1, είναι θετική. $\square$

Παρατήρηση. Να σημειώσουμε ότι το αρχικό αποτέλεσμα του M.G. Krein (δείτε πχ εδώ) δεν αναφερόταν σε συστήματα τελεστών (που ορίσθηκαν πολύ αργότερα) αλλά σε πραγματικούς γραμμικούς χώρους με διάταξη, και φυσικά η απόδειξη ήταν αρκετά διαφορετική - στηριζόταν όμως σε ένα επιχείρημα τύπου (διαχωριστικού) Hahn Banach.

Παρατήρηση. Το συμπέρασμα δεν ισχύει για θετική $\omega : V \to M_2(\mathbb{C})$. Πράγματι, αν η απεικόνιση ϕ του Παραδείγματος 1 είχε θετική επέκταση στην $C(\mathbb{T})$, τότε η επέκταση αυτή θα ήταν πλήρως θετική από ένα θεώρημα του Stinespring (δες `shrlem23.pdf`, Θεώρημα 5) (αφού η $C(\mathbb{T})$ είναι αβελιανή), οπότε θα έπρεπε να ικανοποιεί $\|\phi\| = \|\phi(\mathbf{1})\|$.

Θεώρημα 1 (Arveson). *Αν $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{W}$ είναι συστήματα τελεστών και $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{B}(H)$ μια πλήρως θετική γραμμική απεικόνιση, τότε η Φ έχει επέκταση σε μια γραμμική απεικόνιση $\tilde{\Phi} : \mathcal{W} \to \mathcal{B}(H)$ που είναι πλήρως θετική.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{W} \arrow[dr, dotted, "\exists\tilde{\Phi}"] & \\ \mathcal{S} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\Phi"] & \mathcal{B}(H) \end{tikzcd}$$

Πρόταση 5. *Αν $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ είναι σύστημα τελεστών σε μια C^* άλγεβρα $\mathcal{A}$ με μονάδα και $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{B}(H)$ είναι πλήρως θετική απεικόνιση, υπάρχει (π, H_ϕ, V) όπου π είναι *-αναπαράσταση της $\mathcal{A}$ στον χώρο Hilbert H_ϕ και $V : H \to H_\phi$ είναι φραγμένη, ώστε*

$$\Phi(x) = V^*\pi(x)V \quad \text{για κάθε } \ x \in \mathcal{S}.$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα επέκτασης του Arveson, η Φ έχει μια πλήρως θετική επέκταση $\tilde{\Phi} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Stinespring στην $\tilde{\Phi}$ και έχουμε το συμπέρασμα. □

Απόδειξη του Θεωρήματος Arveson.
Πρώτο Βήμα. Υποθέτουμε ότι $\dim H := d < \infty$.

Η απεικόνιση $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{B}(H) \simeq M_d(\mathbb{C})$ είναι πλήρως θετική (CP).

Από την αντιστοιχία Arveson, η αντίστοιχη γραμμική μορφή $s_\phi : M_d(\mathcal{S}) \to \mathbb{C}$ είναι θετική.

Αλλά τα συστήματα τελεστών $M_d(\mathcal{S})$ και $M_d(\mathcal{W})$ ικανοποιούν $M_d(\mathcal{S}) \subseteq M_d(\mathcal{W})$. Συνεπώς από το θεώρημα του Krein (Πρόταση 4) υπάρχει *θετική* γραμμική μορφή $\tilde{s} : M_d(\mathcal{W}) \to \mathbb{C}$ που επεκτείνει την s_ϕ.

Εφαρμόζοντας την αντιστοιχία Arveson στην $\tilde{s}$, προκύπτει μια *πλήρως θετική* απεικόνιση $\Phi_{\tilde{s}} : \mathcal{W} \to M_d(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{B}(H)$. Εύκολα φαίνεται ότι η $\tilde{\Phi} := \Phi_{\tilde{s}}$ επεκτείνει την Φ όπως θέλαμε. [2]

Δεύτερο Βήμα: Η γενική περίπτωση. Ορίζουμε

$$\mathcal{P} := \{P \in \mathcal{B}(H) : \text{προβολή με } \mathrm{rank}P < \infty\}.$$

Για κάθε $P \in \mathcal{P}$ θέτουμε

$$\Phi_P : \mathcal{S} \to \mathcal{B}(H) : v \mapsto P\Phi(v)P.$$

Παρατηρούμε ότι η Φ_P είναι πλήρως θετική απεικόνιση , και παίρνει τιμές στο $P\mathcal{B}(H)P$ που έχει πεπερασμένη διάσταση (είναι ισόμορφο με το $\mathcal{B}(PH) \simeq M_n(\mathbb{C})$, όπου $n = \mathrm{rank}P$).

Συνεπώς, από το Πρώτο Βήμα υπάρχει μια πλήρως θετική απεικόνιση

$$\tilde{\Phi}_P : \mathcal{W} \to \mathcal{B}(PH)$$

που επεκτείνει την Φ_P, δηλαδή, η $\tilde{\Phi}_P$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\tilde{\Phi}_P(v) = P\Phi(v)P \quad \text{for για κάθε } \ v \in \mathcal{S}. \tag{*}$$

Εφόσον $PH \subseteq H$, μπορούμε να θεωρούμε ότι η απεικόνιση $\tilde{\Phi}_P$ παίρνει τιμές στον $\mathcal{B}(H)$ (επεκτείνοντας κάθε $\tilde{\Phi}_P(w)$ ώστε να μηδενίζεται στον $(PH)^\perp$).

Η *ιδέα* είναι να αναζητήσουμε την επέκταση $\tilde{\Phi}$ της Φ ως ένα (κατάλληλα ορισμένο) «σημείο συσσώρευσης» της οικογένειας $\{\tilde{\Phi}_P : P \in \mathcal{P}\}$.

Με την μερική διάταξη του εγκλεισμού (δηλ. με τον ορισμό $P \leqslant P'$ αν-ν $PH \subseteq P'H$), το σύνολο $\mathcal{P}$ είναι κατευθυνόμενο: για κάθε $P, P' \in \mathcal{P}$ υπάρχει $P'' \in \mathcal{P}$ ώστε $P \leqslant P''$ και $P' \leqslant P''$: π.χ. θέτουμε P'' την προβολή στην $\overline{\mathrm{span}}\{PH, P'H\}$.

[2]Για κάθε $v \in \mathcal{S}$, έχουμε $\Phi_{\tilde{s}}(v) = \sum_{i,j} \tilde{s}(v \otimes E_{ij})E_{ij} = \sum_{i,j} s(v \otimes E_{ij})E_{ij} = \Phi(v)$ (αφού $v \otimes E_{ij} \in M_d(\mathcal{S})$.

Έτσι έχουμε ένα *δίκτυο* $\{\tilde{\Phi}_P : P \in \mathcal{P}\}$ από (πλήρως θετικές) γραμμικές απεικονίσεις $\tilde{\Phi}_P : \mathcal{W} \to \mathcal{B}(H)$.

Παρατήρηση: το δίκτυο $\{\tilde{\Phi}_P : P \in \mathcal{P}\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένο: αφού κάθε $\tilde{\Phi}_P$ είναι CP, από την Πρόταση 2 ξέρουμε ότι $\|\tilde{\Phi}_P\| = \|\tilde{\Phi}_P(\mathbf{1})\|$. Όμως, $\mathbf{1} \in \mathcal{S}$ και άρα $\tilde{\Phi}_P(\mathbf{1}) = P\Phi(\mathbf{1})P$. Συνεπώς

$$\|\tilde{\Phi}_P\| = \|\tilde{\Phi}_P(\mathbf{1})\| = \|P\Phi(\mathbf{1})P\| \leqslant \|\Phi(\mathbf{1})\| := r\,.$$

Τώρα, για κάθε $P \in \mathcal{P}$ θεωρούμε τη συνάρτηση :

$$f_P : \mathcal{W} \times H \times H \to \mathbb{C} : (w, \xi, \eta) \mapsto \langle \tilde{\Phi}_P(w)\xi, \eta \rangle\,.$$

Η f_P ικανοποιεί την ανισότητα

$$|f_P(w, \xi, \eta)| = |\langle \tilde{\Phi}_P(w)\xi, \eta \rangle| \leqslant \|\tilde{\Phi}_P(w)\|\|\xi\|\|\eta\| \leqslant r\|w\|\|\xi\|\|\eta\|$$

εφόσον $\|\tilde{\Phi}_P\| \leqslant r$.

Ορίζουμε K τον χώρο όλων των συναρτήσεων $f : \mathcal{W} \times H \times H \to \mathbb{C}$ που ικανοποιούν την ανισότητα

$$|f(w, \xi, \eta)| \leqslant r\|w\|\|\xi\|\|\eta\| \quad \text{για κάθε } (w, \xi, \eta) \in \mathcal{W} \times H \times H\,.$$

Με άλλα λόγια, αν συμβολίσουμε $\bar{\mathbb{D}}(w, \xi, \eta)$ τον κλειστό δίσκο $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\|w\|\|\xi\|\|\eta\|\}$ στο $\mathbb{C}$, ο χώρος K είναι το Καρτεσιανό γινόμενο

$$K = \prod_{(w,\xi,\eta) \in \mathcal{W} \times H \times H} \bar{\mathbb{D}}(w, \xi, \eta)\,.$$

Ο K είναι Καρτεσιανό γινόμενο συμπαγών χώρων Hausdorff, άρα από το Θεώρημα Tychonoff (!) είναι συμπαγής χώρος Hausdorff στην τοπολογία γινόμενο, που είναι η τοπολογία της σύγκλισης κατά σημείο.

Το δίκτυο $\{f_P : P \in \mathcal{P}\}$ βρίσκεται λοιπόν στον συμπαγή χώρο K, επομένως έχει ένα *υποδίκτυο* $\{f_{P_i} : i \in I\}$ που συγκλίνει σε κάποιο $f_0 \in K$. Άρα, για κάθε $(w, \xi, \eta) \in \mathcal{W} \times H \times H$ θα έχουμε

$$f_0(w, \xi, \eta) = \lim_{i \in I} f_{P_i}(w, \xi, \eta) = \lim_{i \in I} \langle \tilde{\Phi}_{P_i}(w)\xi, \eta \rangle$$
$$\text{και} \quad |f_0(w, \xi, \eta)| \leqslant r\|w\|\|\xi\|\|\eta\|$$

αφού $f_0 \in K$.

Σταθεροποιούμε ένα $w \in \mathcal{W}$ και θεωρούμε την απεικόνιση

$$b_w : H \times H \to \mathbb{C}' : (\xi, \eta) \mapsto f_0(w, \xi, \eta)\,.$$

Η b_w είναι το κατά σημείο όριο των sesquilinear απεικονίσεων $(\xi, \eta) \mapsto \langle \tilde{\Phi}_P(w)\xi, \eta \rangle$, άρα είναι sesquilinear. Επίσης

$$|b_w(\xi, \eta)| = |f_0(w, \xi, \eta)| \leqslant r\|w\|\|\xi\|\|\eta\| \quad \text{για κάθε } \xi, \eta \in H$$

άρα η b_w είναι φραγμένη (από $r\|w\|$).

Επομένως, από το θεώρημα Riesz, υπάρχει φραγμένος τελεστής $T_w \in \mathcal{B}(H)$ ώστε

$$\langle T_w\xi, \eta \rangle = b_w(\xi, \eta) = f_0(w, \xi, \eta) = \lim_{i \in I} \langle \tilde{\Phi}_{P_i}(w)\xi, \eta \rangle$$

για κάθε $(\xi, \eta) \in H \times H$.

Έτσι, έχουμε μια καλά ορισμένη απεικόνιση

$$\tilde{\Phi} : w \mapsto T_w : \mathcal{W} \to \mathcal{B}(H).$$

Θα δείξουμε ότι η $\tilde{\Phi}$ ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος: είναι πλήρως θετική γραμμική απεικόνιση και επεκτείνει την Φ.

• Η γραμμικότητα της $\tilde{\Phi}$ έπεται από το γεγονός ότι για κάθε $P \in \mathcal{P}$ και κάθε $\xi, \eta \in H$, η απεικόνιση $\mathcal{W} \ni w \mapsto f_P(w,\xi,\eta) = \langle \tilde{\Phi}_P(w)\xi, \eta\rangle$ είναι γραμμική ως προς w, άρα το ίδιο ισχύει για το κατά σημείο όριο $f_0(w,\xi,\eta) = \langle \tilde{\Phi}(w)\xi, \eta\rangle$. Αναλυτικά:

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\Phi}(w_1 + \lambda w_2)\xi, \eta\rangle &= \lim_{i\in I}\langle \tilde{\Phi}_{P_i}(w_1 + \lambda w_2)\xi, \eta\rangle \\ &= \lim_{i\in I}(\langle \tilde{\Phi}_{P_i}(w_1)\xi, \eta\rangle + \lambda\langle \tilde{\Phi}_{P_i}(w_2)\xi, \eta\rangle) \\ &= \langle \tilde{\Phi}(w_1)\xi, \eta\rangle + \lambda\langle \tilde{\Phi}(w_2)\xi, \eta\rangle \\ &= \langle (\tilde{\Phi}(w_1) + \lambda\tilde{\Phi}(w_2))\xi, \eta\rangle\end{aligned}$$

για κάθε $\xi, \eta \in H$, άρα $\tilde{\Phi}(w_1 + \lambda w_2) = \tilde{\Phi}(w_1) + \lambda\tilde{\Phi}(w_2)$.

• Δείχνουμε ότι η $\tilde{\Phi}$ είναι πλήρως θετική. Έστω $n \in \mathbb{N}$ τυχόν και $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathcal{W})$ θετικό. Για κάθε $\xi = \begin{bmatrix}\xi_1 & \dots & \xi_n\end{bmatrix}^t \in H^n$ έχουμε

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\Phi}^{(n)}(A)\xi, \xi\rangle &= \langle [\tilde{\Phi}(a_{ij})] \begin{bmatrix}\xi_1 & \dots & \xi_n\end{bmatrix}^t, \begin{bmatrix}\xi_1 & \dots & \xi_n\end{bmatrix}^t\rangle_{H^n} \\ &= \sum_{k,l=1}^n \langle \tilde{\Phi}(a_{kl})\xi_l, \xi_k\rangle_H \\ &= \sum_{k,l=1}^n \lim_{i\in I}\langle \tilde{\Phi}_{P_i}(a_{kl})\xi_l, \xi_k\rangle_H \\ &= \lim_{i\in I}\sum_{k,l=1}^n \langle \tilde{\Phi}_{P_i}(a_{kl})\xi_l, \xi_k\rangle_H \\ &= \lim_{i\in I}\langle \tilde{\Phi}_{P_i}^{(n)}(A)\xi, \xi\rangle\end{aligned}$$

που είναι $\geqslant 0$, εφόσον κάθε $\tilde{\Phi}_{P_i}$ είναι πλήρως θετική.

• Δείχνουμε ότι η $\tilde{\Phi}$ επεκτείνει την $\tilde{\Phi}$. Έστω $v \in \mathcal{S}$. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\langle \tilde{\Phi}(v)\xi, \eta\rangle = \langle \Phi(v)\xi, \eta\rangle \quad \text{για κάθε } \xi, \eta \in H\,.$$

Έχουμε

$$\langle \tilde{\Phi}(v)\xi, \eta\rangle = \lim_{i\in I}\langle \tilde{\Phi}_{P_i}(v)\xi, \eta\rangle = \lim_{i\in I}\langle P_i\Phi(v)P_i\xi, \eta\rangle$$

από την (*). Όμως, αν δοθούν $\xi, \eta \in H$, ονομάζοντας $P_0 \in \mathcal{P}$ την προβολή στον span$\{\xi, \eta\}$, υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $P_{i_0}H \supseteq P_0H$ (από τον ορισμό του υποδικτύου). Επομένως, για κάθε $i \geqslant i_0$ στο I, θα έχουμε $\xi, \eta \in P_iH$ και άρα $P_i\xi = \xi$ και $P_i\eta = \eta$. Συνεπώς

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\Phi}(v)\xi, \eta\rangle &= \lim_{i\in I}\langle P_i\Phi(v)P_i\xi, \eta\rangle \\ &= \lim_{i\geqslant i_0}\langle \Phi(v)P_i\xi, P_i\eta\rangle \\ &= \langle \Phi(v)\xi, \eta\rangle\end{aligned}$$

όπως θέλαμε! $\square$