

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΙΙ

Για τους αναγκαίους ορισμούς και συμβολισμούς, δείτε τις διαφανείες.

**Άσκηση 1.** Αν  $\mathcal{A} = \mathbb{C}[x]$  είναι η μιγαδική αλγεβρα των πολυωνύμων,

(α) βρείτε το φάσμα κάθε (μη σταθερού)  $p \in \mathcal{A}$

(β) δείξτε ότι δεν υπάρχει νόρμα στην  $\mathcal{A}$  που να την κάνει  $C^*$  αλγεβρα.

**Άσκηση 2.** Δείξτε ότι στην αλγεβρα  $\mathcal{A} = M_2(\mathbb{C})$  το σύνολο  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  των χαρακτήρων είναι κeno: ισοδυναμικά, δεν υπάρχουν γνήσια μη μηδενικά αμφίπλευρα ιδεώδη.

**Άσκηση 3.** Στην  $C^*$ -αλγεβρα  $\mathcal{A} = M_2(\mathbb{C})$  θεωρούμε για κάθε  $t \geq 0$  το στοιχείο  $a_t := \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

Να υπολογίσετε το φάσμα  $\sigma(a_t)$ , τη φασματική ακτίνα  $\rho(a_t)$  και τη νόρμα  $\|a_t\|$  του  $a_t$ .

**Άσκηση 4.** Αν  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  είναι  $C^*$ -αλγεβρες και η  $\mathcal{B}$  έχει μονάδα  $\mathbf{1}_B$ , κάθε  $*$ -μορφισμός  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  επεκτείνεται μοναδικά σε  $*$ -μορφισμό  $\phi_1 : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{B}$  με  $\phi_1((0, 1)) = \mathbf{1}_B$ .

**Άσκηση 5.** Δείξτε ότι ο χώρος των χαρακτήρων της μεταθετικής  $C^*$  αλγεβρας  $c_0(\mathbb{N})$  δεν είναι συμπαγής.